Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Τεχνητή Νοημοσύνη

Αβεβαιότητα - Ασάφεια

Ιώαννης Βλαχάβας
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ

Θεσσαλονίκη, 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Αβεβαιότητα

Αβέβαιη Γνώση

- Στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου οι αποφάσεις συνήθως λαμβάνονται υπό αβεβαιότητα (*uncertainty*), δηλαδή έλλειψη ακριβούς πληροφορίας (π.χ. επείγοντα ιατρικά περιστατικά, στάθμευση ενός αυτοκινήτου, κλπ.).
- Οι κυριότερες πηγές αβεβαιότητας είναι:
  - Ανακριβή δεδομένα (*imprecise data*): π.χ. από ένα όργανο περιορισμένης ακρίβειας.
  - Ελλιπή δεδομένα (*incomplete data*): π.χ. σε ένα σύστημα ελέγχου, κάποιοι αισθητήρες τίθενται εκτός λειτουργίας και πρέπει να ληφθεί άμεσα μία απόφαση με τα δεδομένα από τους υπόλοιπους.
  - Υποκειμενικότητα ή/και ελλείψεις στην περιγραφή της γνώσης: π.χ. η υιοθέτηση ευριστικών μηχανισμών εισάγει πολλές φορές υποκειμενικότητα.
  - Κάθε είδους περιορισμοί που κάνουν το όλο πλαίσιο λήψης απόφασης ατελές. Π.χ.:
    - Οικονομικοί περιορισμοί που κάνουν ασύμφορη την πραγματοποίηση κάποιων μετρήσεων
    - Χρονικοί περιορισμοί που επιβάλουν την άμεση λήψη απόφασης για την αποσόβηση επικίνδυνων καταστάσεων
- Ανάγκη ύπαρξης "μη ακριβών" (βέβαιων) μεθόδων συλλογισμού.
  - *Χρήση κυρίως Θεωρίας Πιθανοτήτων* (Δύσκολη προσέγγιση)
  - *Εναλλακτικές Τεχνικές: Συντελεστές Βεβαιότητας* (*Certainty Factors*), *Θεωρία Dempster-Shafer*, *Ασαφής Λογική* (*Fuzzy Logic*).

Θεωρία Πιθανοτήτων

- Αν *E* είναι ένα γεγονός, η *άνευ συνθηκών πιθανότητα* (*unconditional probability*) *P*(*E*) να συμβεί το γεγονός εκφράζεται με έναν πραγματικό αριθμό για τον οποίο ισχύουν:
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(E) = 1$ αν Ε είναι ένα σίγουρο γεγονός
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$ (όπου με $\neg E$ συμβολίζεται η άρνηση του γεγονότος Ε)
- *Πιθανότητα υπό συνθήκη* (*conditional probability*):
  - Υποδηλώνει την πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα *H* δεδομένης της ισχύος μόνο του γεγονότος *E*.
  - *Συμβολίζεται με P(H|E)* και ορίζεται μέσω του πηλίκου της πιθανότητας να συμβούν ταυτόχρονα τα *H* και *E* προς την πιθανότητα του *E*

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

- Ιδιότητες
  - *Προσθετική Ιδιότητα (η πιθανότητα να ισχύει το A ή το B)*: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο μη ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B|A)$

Παράδειγμα:

- Έστω ότι έχουμε <u>ένα</u> ζάρι:
- $P(A) = P(\text{περιττός αριθμός}) = 3/6 = 0.5$
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,3,5) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B) = P(\text{αριθμός} \leq 3) = 3/6 = 0.5$
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,2,3) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B|A) = P(\text{αριθμός} \leq 3 \text{ δεδομένου ότι είναι περιττός}) = 2/3$
  - γιατί υπάρχουν 2 δυνατές τιμές (1,3) από σύνολο 3 δυνατών τιμών (1,3,5)
- $P(A \wedge B) = P(\text{περιττός αριθμός και} \leq 3) = P(A) * P(B|A) = 0.5*2/3 = 0.33$
- $P(A \vee B) = P(\text{περιττός ή} \leq 3) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) = 0.5+0.5-0.33=0.67$ (προσθετική ιδιότητα)

Ο Νόμος του Bayes (*Bayes' rule*)

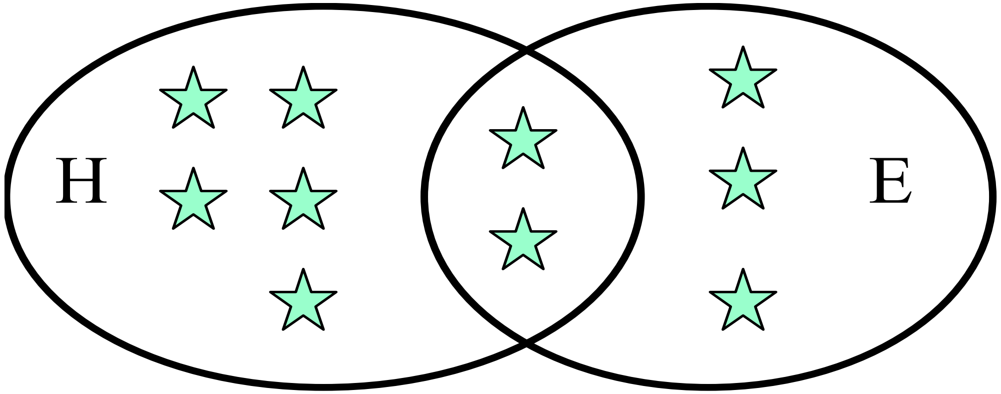
- Κάτω από μία περισσότερο υποκειμενική αντιμετώπιση της πιθανότητας που επιτρέπει τη **χρήση εκτιμήσεων αντί συχνοτήτων εμφάνισης γεγονότων**, ο νόμος του Bayes επιτρέπει τον υπολογισμό πιθανοτήτων υπό συνθήκη με χρήση άλλων πιθανοτήτων που είναι ευκολότερο να υπολογιστούν.
- Η απλούστερη εκδοχή του *νόμου του Bayes*:

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

  - Πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί, συγκριτικά με την σχέση της *πιθανότητας υπό συνθήκη*.
  - Αν H μία ασθένεια και E ένα σύμπτωμα που σχετίζεται με αυτήν, τότε για τον υπολογισμό της *πιθανότητας υπό συνθήκη* απαιτείται πληροφορία που συνήθως δεν είναι διαθέσιμη:
    - Πόσοι άνθρωποι στον κόσμο πάσχουν από την H και ταυτόχρονα εμφανίζουν το σύμπτωμα E.
    - Πόσοι εμφανίζουν απλά το σύμπτωμα E.
  - Στο νόμο του Bayes:
    - Ένας γιατρός μπορεί να δώσει μία εκτίμηση για το πόσοι ασθενείς που έπασχαν από την ασθένεια H εμφάνιζαν το σύμπτωμα E (ποσότητα P(E|H)). Αντίθετα, το κλάσμα των ασθενών με σύμπτωμα E που πάσχουν από την ασθένεια H, δηλαδή ο όρος P(H|E), τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να εκτιμηθεί.
    - Το P(H) μπορεί να υπολογιστεί από στατιστικά στοιχεία για τον συνολικό πληθυσμό.
    - Το P(E) από στατιστικά στοιχεία του ίδιου του γιατρού.

Παράδειγμα 1

- Έστω τα δύο σύνολα *H* και *E* με επτά και πέντε γεγονότα αντίστοιχα από ένα συνολικό πληθυσμό δέκα γεγονότων.
- Το σχήμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις απλές (άνευ συνθήκης) και τις υπό συνθήκη πιθανότητες με απλή εφαρμογή του ορισμού τους.



P(E) = 5/10 = 0.5
P(H) = 7/10 = 0.7
P(H|E) = 2/5 = 0.4
P(E|H) = 2/7 = 0.287514

- Στο παράδειγμα του σχήματος βλέπουμε ότι: P(H|E) * P(E) = P(E|H)*P(H)
- Άρα, γνωρίζοντας τρεις από τις πιθανότητες μπορούμε να υπολογίσουμε την τέταρτη.

Παράδειγμα 2

<u>Ορισμοί Παραμέτρων</u>

$P(H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη

$P(E)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό

$P(E|H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι έχει γρίπη

$P(E|\neg H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι <u>δεν</u> έχει γρίπη

<u>Δεδομένα</u>

$P(H)=0.0001 \quad P(E|H)=0.8 \quad P(E|\neg H)=0.1$

<u>Ερωτήσεις</u>

1) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό;

$P(E) = P(E \wedge H) + P(E \wedge \neg H) =$

(από ορισμό πιθαν. υπό συνθήκη)

$= P(E|H)*P(H) + P(E|\neg H)* P(\neg H) =$

$= 0.8 * 0.0001 + 0.1*(1-0.0001) =$

$= 0.0008 + 0.09999 = 0.10007$

2) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι έχει πυρετό;

$P(H|E) = P(H)*P(E|H)/P(E) =$ *(Bayes)*

$= 0.0001 * 0.8/0.10007 =$

$= 0.0007994$

3) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι <u>δεν</u> έχει πυρετό;

$P(H|\neg E) = P(H)*P(\neg E|H)/P(\neg E) =$

(σχέση Bayes με $\neg E$ αντί E)

$= 0.0001*(1-0.8)/(1-0.10007) =$

$= 0.0000222$

Γενική Σχέση του Νόμου του Bayes

- Η πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα H δεδομένης της ισχύος των γεγονότων $E_1, E_2, ..., E_k$:

$$P\left(H \mid E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k\right) = \frac{P\left(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k \mid H\right) \bullet P(H)}{P\left(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k\right)}$$

- **Πρόβλημα χρήσης**: για m πιθανές ασθένειες και n δυνατά συμπτώματα από τα οποία εμφανίζονται τα k, απαιτούνται $(m \cdot n)^k + m + n^k$ τιμές πιθανοτήτων, αριθμός υπερβολικά μεγάλος.
- **Απλούστερη περίπτωση**: αν τα διάφορα γεγονότα Ε θεωρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, τότε απαιτούνται μόνο $m \cdot n + m + n$ τιμές πιθανοτήτων.

Χρήση Θεωρίας Πιθανοτήτων - Συμπεράσματα

- είτε τα διάφορα γεγονότα θεωρούνται ανεξάρτητα με αποτέλεσμα ευκολότερους υπολογισμούς σε βάρος της ακρίβειας των συλλογισμών που πραγματοποιούνται
- ή καταγράφονται αναλυτικά όλες οι πιθανότητες και οι μεταξύ του συσχετίσεις ώστε να προκύπτουν ακριβή συμπεράσματα, με υψηλό όμως υπολογιστικό κόστος.
- Εναλλακτική προσέγγιση: Συντελεστές βεβαιότητας.

Συντελεστές Βεβαιότητας (*Certainty Factors*) (1/2)

- Αριθμητικές τιμές που εκφράζουν τη βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης ή γεγονότος
- Πρωτοεισήχθησαν στο έμπειρο σύστημα MYCIN για να προσδώσουν κάποιο βαθμό βεβαιότητας στα συμπεράσματα των διαφόρων κανόνων
- if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα* με βεβαιότητα CF
  Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
- Παίρνουν τιμές στο διάστημα [-1, +1]
  - Η τιμή –1 εκφράζει απόλυτη βεβαιότητα για το ψευδές της πρότασης.
  - Η τιμή +1 απόλυτη βεβαιότητα για την αλήθεια της πρότασης.
  - Η τιμή 0 εκφράζει άγνοια.
- Εκτός από τη βεβαιότητα που συνοδεύει τον κανόνα, είναι δυνατό να ορισθούν (ή να δοθούν) τιμές βεβαιότητας και στην τιμή του γεγονότος του κανόνα:
  Παράδειγμα: if πυρετός CF_1 0.7 then γρίπη CF 0.8
  - Η τελική βεβαιότητα του κανόνα είναι το γινόμενο των βεβαιοτήτων: 0.7x0.8=0.56
- Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα γεγονότα στο αριστερό τμήμα του κανόνα τα οποία συνδέονται με AND (ή OR) τότε ως συντελεστής βεβαιότητας του αριστερού τμήματος θεωρείται η μικρότερη (ή η μεγαλύτερη) τιμή CF που εμφανίζεται.

Συντελεστές Βεβαιότητας (*Certainty Factors*) (2/2)

- Αν η βεβαιότητα κάποιου υποθετικού συμπεράσματος είναι ήδη CF_p και η ενεργοποίηση ενός άλλου κανόνα συνάγει το ίδιο υποθετικό συμπέρασμα με βεβαιότητα CF_n, τότε η συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος καθορίζεται από τα πρόσημα των CF_p και CF_n βάσει των παρακάτω σχέσεων:
  - Αν CF_p και $CF_n > 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 - CF_p) = CF_p + CF_n - CF_n \cdot CF_p$
  - Αν CF_p και $CF_n < 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 + CF_p) = CF_p + CF_n + CF_n \cdot CF_p$
  - Αν CF_p και CF_n ετερόσημα, τότε: $CF = \dfrac{CF_p + CF_n}{1 - \min(|CF_p|, |CF_n|)}$
- Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
  if βήχας then γρίπη CF 0.5
- Συμπερασματικά:
  - Παρακάμπτεται το πρόβλημα του υπολογισμού όλων των απλών και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων που απαιτεί η χρήση του νόμου του Bayes.
    - Αντί για συχνότητες εμφάνισης γεγονότων που πρέπει να μετρηθούν, χρησιμοποιούνται συντελεστές βεβαιότητας που έχουν εκτιμηθεί από ειδικούς.
  - Οι υπολογισμοί κατά το συνδυασμό βεβαιοτήτων είναι απλούστεροι, λόγω της παραδοχής της ανεξαρτησίας των γεγονότων.
  - Πρέπει να αποφεύγεται η ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αναστρέφουν τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος. Π.χ. *if A then B* και *if B then A*

Παράδειγμα

- Έστω ότι δύο κανόνες οδηγούν στο ίδιο υποθετικό συμπέρασμα B, κάτω όμως από διαφορετικές παραδοχές, δηλαδή:

  if A then B CF 0.8

  if C AND D AND E then B CF 0.6

- Αν ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα A, C, D και E με βεβαιότητες: CF(A)=0.5, CF(C)=0.9, CF(D)=0.7 και CF(E)=0.5 τότε:

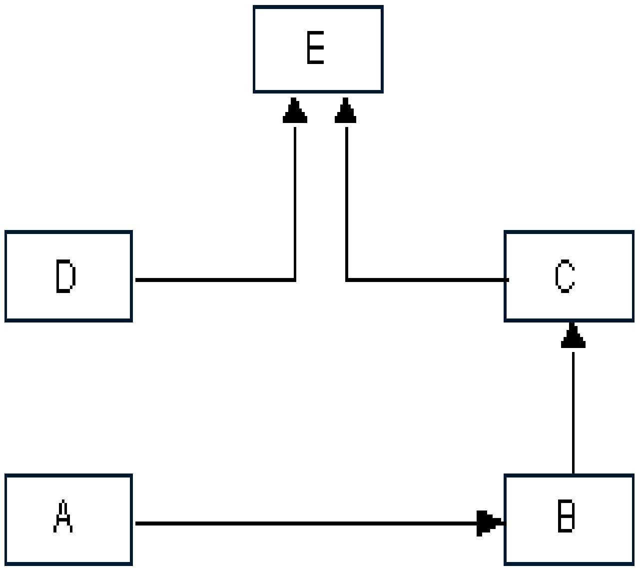
- Η ενεργοποίηση του πρώτου κανόνα δίνει: $CF_p(B)=0.5 * 0.8 = 0.4$

- Η ενεργοποίηση του δεύτερου κανόνα δίνει:
  $CF_n(B)=0.6 * \min(0.9, 0.7, 0.5) = 0.6 * 0.5 = 0.3$

- Επειδή τα CF_p και CF_n είναι και τα δύο θετικά, η συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος B θα είναι:
  $CF(B) = 0.4 + 0.3 - (0.4 \times 0.3) = 0.58$

Δίκτυα Πιθανοτήτων (*Bayesian Probability Networks*)

- Αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης των πιθανοτήτων που εμφανίζεται όταν ο χειρισμός της αβεβαιότητας γίνεται αυστηρά κατά Bayes.
- Βασίζονται στην παρατήρηση ότι στον πραγματικό κόσμο τα διάφορα γεγονότα δεν αλληλεπιδρούν όλα το ένα με το άλλο αλλά μερικώς. Δηλαδή μπορεί να οριστούν ομάδες από γεγονότα που αλληλεπιδρούν, δηλαδή δεν είναι απαραίτητο να υπολογίζονται οι πιθανότητες όλων των συνδυασμών γεγονότων.



if A then B
if B then C
if C then E
if D then E

- Κανόνες στα δίκτυα πιθανοτήτων:

  if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα*
- Διασυνδέονται μεταξύ τους με το υποθετικό συμπέρασμα του ενός να αποτελεί το γεγονός κάποιου άλλου.
- Δύο ή περισσότεροι κανόνες μπορεί να καταλήγουν στο ίδιο υποθετικό συμπέρασμα κάτω όμως από διαφορετικές παραδοχές.
- Απαγορεύεται η ύπαρξη βρόχων μέσα στο δίκτυο.
- Ειδικός μηχανισμός επιτρέπει την αλλαγή της ροής της πληροφορίας (πιθανοτήτων) στο δίκτυο των κανόνων, χωρίς όμως να γίνεται ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αντιστρέφουν την σχέση αιτίας-αποτελέσματος.

Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks) (1/2)

- Παραλλαγή των δικτύων πιθανοτήτων.
- Οι κανόνες υποδηλώνουν μία "χαλαρή" συνεπαγωγή:

  if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα* με βαθμό ισχύος *S*

- Μία περίπτωση υλοποίησης *Δικτύων Συμπερασμού* είναι με τη χρήση των μεγεθών της *λογικής επάρκειας* και της *λογικής αναγκαιότητας* σε συνδυασμό με την ποσότητα *εύνοια γεγονότος*.
  - **Εύνοια Γεγονότος** (Odds - O):
  - Εκφράζει τη σύγκριση μεταξύ πιθανοτήτων να συμβεί και να μην συμβεί ένα γεγονός.
  - **Λογική Επάρκεια** (Logical Sufficiency – LS):
  - Εκφράζει πόσο πιθανότερο είναι να συνδεθεί ένα γεγονός *E* με την αλήθεια ενός υποθετικού συμπεράσματος *H*, παρά με την άρνηση του *H* (συμβολίζεται ¬*H*)
  - **Λογική Αναγκαιότητα** (Logical Necessity – LN)
  - Εκφράζει πόσο πιθανότερο είναι να συνδεθεί η απουσία ενός γεγονότος *E* με την αλήθεια του υποθετικού συμπεράσματος *H* παρά με την άρνηση του *H*.

$$O(E) = \frac{P(E)}{1 - P(E)} \qquad LS = \frac{P(E \mid H)}{P(E \mid \neg H)} = \frac{O(H \mid E)}{O(H)} \qquad LN = \frac{P(\neg E \mid H)}{P(\neg E \mid \neg H)} = \frac{O(H \mid \neg E)}{O(H)}$$

Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks) (2/2)

$$E \xrightarrow[(LS,LN)]{} \underset{P_o(H)}{H}$$

- Στα δίκτυα συμπερασμού οι κανόνες περιέχουν και αρχικές τιμές πιθανότητας. Η γενική μορφή τους είναι:
  - $P_o(H)$ είναι η πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα H όταν απουσιάζει οποιαδήποτε ένδειξη για την ισχύ του γεγονότος E.
  - Αν κατά τη διάρκεια του συμπερασμού γίνει γνωστή η ύπαρξη του γεγονότος E τότε και η πιθανότητα του H αλλάζει σε $P(H|E)$.
  - Ο βαθμός αλλαγής καθορίζεται από το βαθμό ισχύος του κανόνα, δηλ. τις τιμές LS, LN.
  - Όλες οι αλλαγές προωθούνται μέσα στο δίκτυο των κανόνων από κόμβο σε κόμβο, ανάλογα και με τις συσχετίσεις που υπάρχουν.
- **Παράδειγμα** δικτύου συμπερασμού:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4\ ,LN_1=0.5\ )]{} \underset{p_o(Y)=0.1}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10\ ,LN_2=0.2\ )]{} \underset{p_o(Z)=0.2}{Z}$$

  - $P_o(Y)$ και $P_o(Z)$ είναι οι αρχικές τιμές πιθανότητας για τα Y και Z αντίστοιχα, χωρίς να υπάρχει οποιασδήποτε γνώση για το X.
  - Έστω ότι η τιμή του Χ γίνεται γνωστή. Μετά από πράξεις, η τελική μορφή του δικτύου:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4\ ,LN_1=0.5\ )]{} \underset{P(Y|X\ )=0.307}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10\ ,LN_2=0.2\ )]{} \underset{P(Z|X\ )=0.252}{Z}$$

Προσέγγιση Dempster-Shafer (D-S) (1/2)

- Ο χειρισμός της αβεβαιότητας γίνεται πιο εύκολα απ' ότι κατά Bayes, καθώς δεν απαιτείται η συλλογή όλων των απλών και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων
- Βασίζεται σε λογισμό με αριθμητικές τιμές *πεποίθησης* (*belief*),
  - δηλαδή πίστης για την ισχύ κάποιου υποθετικού συμπεράσματος για το οποίο υπάρχουν κάποιες ενδείξεις (γεγονότα).

Βασικά Στοιχεία

- *Πλαίσιο διάκρισης* (*frame of discernment*): το σύνολο U των διακριτών και αμοιβαία αποκλειόμενων προτάσεων ενός τομέα γνώσης.
  - π.χ. αν εξετάζεται η ασθένεια κάποιου, το U αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές διαγνώσεις, δηλαδή τα υποθετικά συμπεράσματα.
- Pow(U): Το σύνολο των υποσυνόλων του U (δυναμοσύνολο)
  - Αν U={A, B, C} είναι το σύνολο των πιθανών ασθενειών τότε το σύνολο:

    Pow(U) = { {}, {A}, {B}, {C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C} }

    υποδηλώνει τις πιθανές διαγνώσεις για μια περίπτωση ασθένειας.
  - Κάθε στοιχείο του Pow(U) αντιστοιχεί σε διαζευγμένες προτάσεις. Π.χ. {A, B} σημαίνει "ασθένεια A ή B".
  - Στοιχεία του U που δεν ανήκουν σε ένα στοιχείο του Pow(U), (π.χ. η ασθένεια C στο {A, B}), κάνουν σαφή την άρνηση του αντίστοιχου υποθετικού συμπεράσματος.
  - Το κενό υποσύνολο {} αντιστοιχεί στην περίπτωση που όλα τα υποθετικά συμπεράσματα είναι ψευδή (*null hypothesis*).

Προσέγγιση Dempster-Shafer (2/2)

- Η *βασική κατανομή πιθανότητας* (*basic probability assignment* - *bpa*) είναι μία απεικόνιση: m: Pow(U) $\rightarrow$ [0,1]
  δηλαδή το μέτρο της πεποίθησης που υπάρχει για το κατά πόσο ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα που εκφράζεται με το συγκεκριμένο στοιχείο του U.
  - Υποκειμενική ποσότητα που δε μοιράζεται στα επιμέρους στοιχεία κάθε στοιχείου του Pow(U).
    - π.χ. αν m({A, B})=0.3, τότε αυτή η πεποίθηση δε μοιράζεται στα {A} και {B} αλλά αφορά το {A, B}.
  - Για το στοιχείο {} ισχύει m({})=0
  - Δεδομένου ότι το αληθές υποθετικό συμπέρασμα βρίσκεται κάπου μέσα στα στοιχεία του Pow(U), ισχύει:

$$\sum_{X \in Pow(U)} m(X) = 1$$

  - Η ποσότητα m(X) εκφράζει το πόσο ισχυρή είναι η πεποίθηση για το ότι ένα συγκεκριμένο στοιχείο του U ανήκει στο X αλλά όχι σε κάποιο από τα τυχόν υποσύνολα του X.
- Η συνολική πεποίθηση (*belief*) ότι ένα στοιχείο του U ανήκει στο X καθώς και στα τυχόν υποσύνολα του X συμβολίζεται με *Bel(X)*

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

Dempster-Shafer vs. Bayes

- Bayes: η απουσία άλλων ενδείξεων για τις δυνατές εκδοχές τις καθιστά ισοπίθανες.
- Dempster-Shafer: η απουσία κάποιων ενδείξεων θέτει την πιθανότητα (*likelihood*) κάθε εκδοχής κάπου στο διάστημα [0, 1].
  - Καθώς συγκεντρώνονται ενδείξεις, τα διαστήματα αυτά αναμένεται να συρρικνωθούν, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο.
  - Η συρρίκνωση αναπαριστά την αυξημένη ή όχι εμπιστοσύνη με την οποία αντιμετωπίζονται οι δυνατές εκδοχές.
- Η κατά Dempster-Shafer αντιμετώπιση της αρχικής κατάστασης αποτυπώνει καλύτερα την έλλειψη ενδείξεων.
  - Η ισοπίθανη αντιμετώπιση των διαφόρων εκδοχών ελλείψει άλλης πληροφορίας στη θεωρία του Bayes, γίνεται κατά σύμβαση και είναι λιγότερο αντικειμενική.
  - Εάν ένα από τα ζητούμενα είναι η συλλογή ή όχι επιπλέον ενδείξεων ώστε να αξιολογηθούν καλύτερα οι εναλλακτικές εκδοχές, τότε η προσέγγιση D-S υπερτερεί.

Κανόνας Dempster-Shafer

❖ Αν m_1 και m_2 δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (βασικές κατανομές πιθανότητας) που αποδίδουν κάποιο βαθμό πεποίθησης στα στοιχεία του Pow(U), τότε αυτές συνδυάζονται σε μία τρίτη εκτίμηση $m_3=m_1\oplus m_2$ με τρόπο που ορίζεται με τον *κανόνα D-S*:

$$\underset{A\in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y\in U:X\cap Y=A}} m_1(\mathrm{X})\bullet m_2(\mathrm{Y})}{1-\sum_{\mathrm{X,Y\in U:X\cap Y=\varnothing}} m_1(\mathrm{X})\bullet m_2(\mathrm{Y})}$$

Παράδειγμα: Διάγνωση Ασθένειας

- Έστω $U=\{A, B, C\}$ το σύνολο των δυνατών ασθενειών που μπορεί να διαγνωσθούν.
- $Pow(U) = \{ \{ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}$
  - εκφράζει τις πιθανές διαγνώσεις για μια περίπτωση ασθενούς
- $m(\{\{ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}) = 1$
  - υποδηλώνει τη βεβαιότητα ότι η διάγνωση βρίσκεται κάπου στα στοιχεία του $Pow(U)$ αλλά ελλείψει άλλων ενδείξεων δεν είναι δυνατό να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα σε κάποιο
  - Bayes: θα έπρεπε κάθε στοιχείο του $Pow(U)$ να θεωρηθεί ισοπίθανο
- Έστω ότι γίνεται διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία, (π.χ. πραγματοποιούνται ιατρικές εξετάσεις) και προκύπτει ότι η ασθένεια είναι μία από τις A ή B με βαθμό πίστης 0.7
  - $m_1(\{A, B\}) = 0.7$
  - $m_1(\{\{ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}) = 0.3$
  - Δηλαδή, η έλλειψη πίστης σε ένα από τα υποθετικά συμπεράσματα του $Pow(U)$, ισοδυναμεί αυτόματα με ισόποσο βαθμό πίστης στα υπόλοιπα στοιχεία του $Pow(U)$, χωρίς όμως να δίνεται ιδιαίτερη προτίμηση σε κάποιο από αυτά.
  - Bayes: απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλου αριθμού υπό συνθήκη πιθανοτήτων, κάτι που είναι υπολογιστικά ακριβό και πολλές φορές αδύνατο.
- Πώς μπορεί να συνδυαστούν δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (π.χ. δύο ιατρών) σε μία;

Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

- Έστω ότι δύο γιατροί εξετάζουν ανεξάρτητα τον ασθενή και δίνουν την εκτίμησή τους m_1 και m_2 αντίστοιχα, για την αρρώστια από την οποία αυτός πάσχει.

	Γιατρός 1		**Γιατρός 2**	
Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	**m_1**	**Bel_1**	**m_2**	**Bel_2**
{A}	0.05	0.05	0.15	0.15
{B}	0	0	0	0
{C}	0.05	0.05	0.05	0.05
{A, B}	0.15	0.2	0.05	0.2
{A, C}	0.1	0.2	0.2	0.4
{B, C}	0.05	0.1	0.05	0.1
{A, B, C}	0.6	1	0.5	1

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- π.χ. $Bel_1(\{A,B\}) = m_1(\{A,B\}) + m_1(\{A\}) + m_1(\{B\}) = 0.015 + 0.05 + 0 = 0.2$
- Οι δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις m_1 και m_2 μπορεί να συνδυαστούν στην m_3 χρησιμοποιώντας τον κανόνα Dempster-Shafer:

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{A}} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}$$

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (1/2)

- Ο πίνακας αποτελεί έναν εποπτικό τρόπο για τον υπολογισμό της σχέσης D-S.

$m_3=m_1 \oplus m_2$		m_1						
		{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_2		0.05	0	0.05	0.15	0.1	0.05	0.6
{A}	0.15	{A} .0075	{ } 0	{ } .0075	{A} .0225	{A} .015	{ } .0075	{A} .09
{B}	0	{ } .0	{B} 0	{ } .0	{B} .0	{ } .0	{B} .0	{B} .0
{C}	0.05	{ } .0025	{ } 0	{C} .0025	{ } .0075	{C} .005	{C} .0025	{C} .03
{A,B}	0.05	{A} .0025	{B} 0	{ } .0025	{A,B} .0075	{A} .005	{B} .0025	{A,B} .03
{A,C}	0.2	{A} .01	{ } 0	{C} .01	{A} .03	{A,C} .02	{C} .01	{A,C} .012
{B,C}	0.05	{ } .0025	{B} 0	{C} .0025	{B} .0075	{C} .005	{B,C} .0025	{B,C} .03
{A,B,C}	0.5	{A} .025	{B} 0	{C} .025	{A,B} .075	{A,C} .05	{B,C} .025	{A,B,C} .3

- Κάθε στοιχείο του εσωτερικού πίνακα (σκιασμένη περιοχή) προκύπτει παίρνοντας την τομή των στοιχείων των m_1 και m_2 που βρίσκονται στην αντίστοιχη γραμμή και στήλη, όπως ορίζει δηλαδή ο αριθμητής της σχέσης D-S.
- Οι τιμές πεποίθησης για τις παραπάνω τομές προκύπτουν από το γινόμενο των τιμών πεποίθησης των στοιχείων των m_1 και m_2 που βρίσκονται στην αντίστοιχη γραμμή και στήλη.

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (2/2)

Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	m_3	Bel_3
{A}	0.21	0.21
{B}	0.01	0.01
{C}	0.09	0.09
{A, B}	0.12	0.34
{A, C}	0.20	0.50
{B, C}	0.06	0.16
{A, B, C}	0.31	1.00

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- Η αρχική εκτίμηση ότι η ασθένεια είναι μία από τις *A* ή *B* αποδυναμώθηκε.
  - Αν εξαιρεθεί η περίπτωση $\{A,B,C\}$ που περιέχει όλες τις διαγνώσεις, οι συνολικές τιμές πεποίθησης Bel_3, υποδεικνύουν τώρα ότι η διάγνωση βρίσκεται μάλλον στο σύνολο $\{A,C\}$ καθώς η τιμή $Bel_3(\{A,C\})=0.5$ υπερτερεί των υπολοίπων.
  - Επιπλέον, επειδή $Bel_3(\{A\})>Bel_3(\{C\})$, αρχίζει να διαφαίνεται ότι η τελική διάγνωση είναι μάλλον η *A*.
- Η παραπάνω συνδυασμένη εκτίμηση μπορεί να συνδυαστεί εκ νέου με μια άλλη εκτίμηση (π.χ. 3^{ου} ιατρού).

Ασκήσεις

- 8.1. Να υπολογίσετε τη συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος *B* με βάση τους ακόλουθους κανόνες: 1) *if* $A_{CF=0.2}$ *then B 0.4*, 2) *if* $C_{CF=0.4}$ *then B -0.5*
- 8.2. Να υπολογίσετε τη συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος *B* με βάση τους ακόλουθους κανόνες: 1) *if* $A_{CF=0.2}$ *then B -0.4*, 2) *if* $C_{CF=0.9}$ *and* $D_{CF=0.4}$ *and* $E_{CF=0.6}$ *then B -0.5*
- 8.3. Δίνονται οι ακόλουθοι κανόνες με τους αντίστοιχους συντελεστές βεβαιότητας:
  1. if A then B CF 0.8
  2. if C and D and E then B CF 0.6
  3. Οι συντελεστές βεβαιότητας των στοιχείων της μνήμης εργασίας είναι:
  4. CF(A)=-0.5, CF(C)=0.6, CF(D)=-0.5 και CF(E)=1.0
  5. Ποιος θα είναι ο συντελεστής βεβαιότητας του συμπεράσματος B που προκύπτει;
- 8.4. Αν στο MYCIN υπάρχουν οι εξής 2 κανόνες:

  1) if A then B CF 0.8 2) if C and D and E then B CF 0.6

  και κατά την εκτέλεση, ο χρήστης δώσει:

  CF(A)=-0.5, CF(C)=0.6, CF(D)=-0.5 και CF(E)=1.0

  ποιο θα είναι το CF του B που προκύπτει;

Ασάφεια

Ασάφεια (Fuzziness)

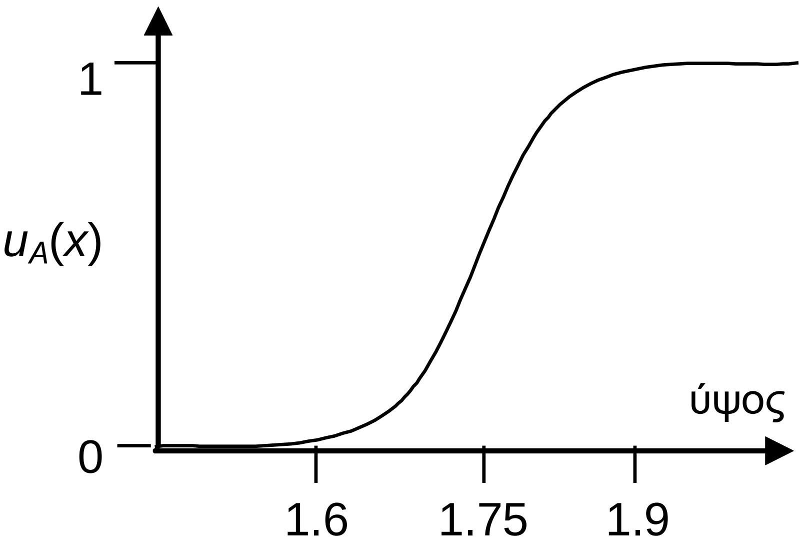
- Έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε *μη-ακριβή* (*imprecise*) δεδομένα.
  - Π.χ. *"Ο Νίκος είναι ψηλός"*: δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια το ύψος, αλλά μπορεί να ληφθούν ορισμένες αποφάσεις για θέματα σχετικά με το ύψος του Νίκου.
- Το πρόβλημα δεν οφείλεται τόσο στις έννοιες που χρησιμοποιούνται όσο στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών (*σημασιολογική ασάφεια*)
- Παραδείγματα:
  - Αν θεωρηθεί ότι ψηλός είναι όποιος έχει ύψος πάνω από 1.95 μέτρα, είναι απόλυτα σωστό να θεωρηθεί ότι κάποιος με ύψος 1.94 δεν είναι ψηλός ;
  - Προσδιορισμός των αντικειμένων που ανήκουν στο σύνολο "καρέκλα" και προσδιορισμός του συνόλου των αντικειμένων που μπορούν να "λειτουργήσουν" ως καρέκλα.
- Η ασάφεια είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας.
- Η *ασαφής λογική* (*fuzzy logic*) είναι ένα υπερσύνολο της κλασικής λογικής, η οποία έχει επεκταθεί ώστε να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του "απολύτως αληθούς" και του "απολύτως ψευδού".
- *Θεωρία Ασαφών Συνόλων* (*Fuzzy Set Theory*) - Lofti Zadeh '60

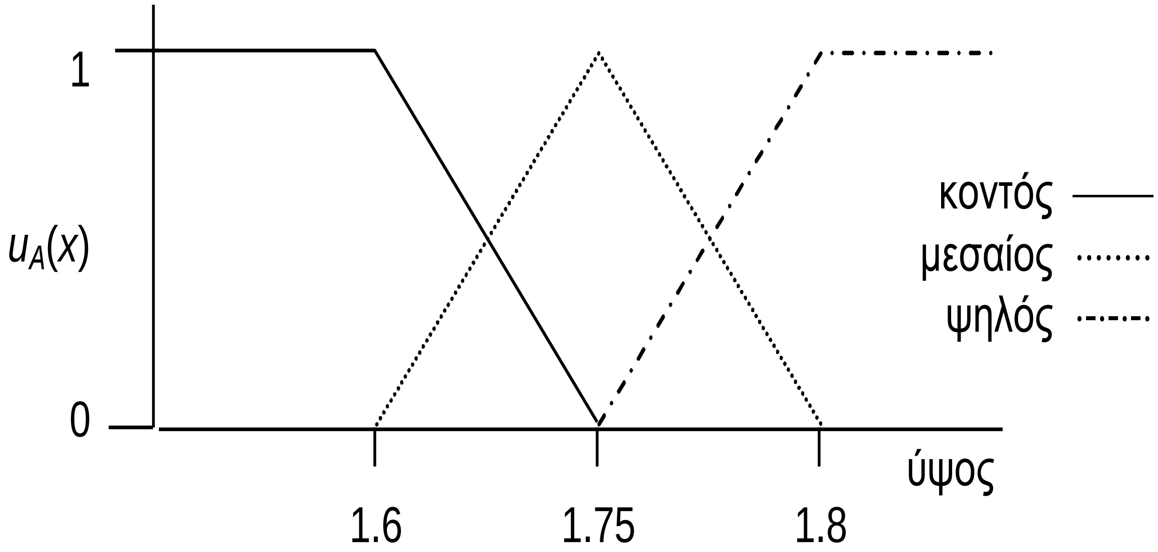
Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- *Ασαφές Σύνολο* (*fuzzy set*) A: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, u_A(x))$ όπου $x \in X$ και $u_A(x) \in [0,1]$).
  - Το σύνολο X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς (*universe of discourse*) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
  - Η τιμή $u_A(x)$ λέγεται *βαθμός αληθείας* (*degree of truth*), συμβολίζει το βαθμό της συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1].
  - Η συνάρτηση u_A ονομάζεται *συνάρτηση συγγένειας* (*membership function*) και στην πράξη μπορεί να προέρχεται από:
    - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
    - Προκαθορισμένες (ad hoc) και απλοποιημένες μορφές
    - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
    - Φυσικές μετρήσεις
    - Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως με νευρωνικά δίκτυα)

- Η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συγγένειας είναι μόνο 0 και 1.

Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων





- Μέσω της αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης συγγένειάς τους, u_A (σχ. αριστερά)
- Απλούστευση: *τμηματικώς γραμμικής απεικόνιση* της συνάρτησης συγγένειας (σχ.δεξιά)
- Με ζεύγη της μορφής $(x, u_A(x))$:
  - Π.χ. ψηλός = { (1.7, 0), (1.75, 0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9, 1), (1.95, 1) }
- Σύνολο ζευγών της μορφής $u_A(x)/x$ όπου x είναι το στοιχείο του συνόλου και $u_A(x)$ είναι ο βαθμός συγγένειάς του:
  - Π.χ. ψηλός = {0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95}
- **Διαφορά**: Η Αναλυτική Έκφραση περιγράφει συνεχείς τιμές ύψους ενώ το Σύνολο Ζευγών περιγράφει μόνο κάποια συγκεκριμένα ύψη στο διάστημα ορισμού της u(x).

Ασαφείς Σχέσεις (1/2)

- Είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. X×X, X×Y×Z, κλπ).
- **Παράδειγμα**: R = "x *είναι βαρύτερο από* y" x∈X, y∈Y και R∈ X×Y
- Ένας χρήσιμος τρόπος αναπαράστασης της R, είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} u_R(x_1, y_1) & u_R(x_1, y_2) & \cdots & u_R(x_1, y_n) \\ u_R(x_2, y_1) & u_R(x_2, y_2) & \cdots & u_R(x_2, y_n) \\ & \vdots & & \\ u_R(x_m, y_1) & u_R(x_m, y_2) & \cdots & u_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

- **Σύνθεση** (*composition*) Ασαφών Σχέσεων: συνδυασμός ασαφών σχέσεων.
  - Παράδειγμα: Αν η R_1(x,y) ορισμένη στο X×Y συνδυαστεί με την R_2(y,z) ορισμένη στο Y×Z, τότε θα προκύψει μία ασαφής σχέση R(x,z) ορισμένη στο X×Z.
  - Πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση συγγένειας u_R(x,z) της R, με χρήση των συναρτήσεων συγγένειας των R_1 και R_2, δηλαδή των u_{R1}(x,y) και u_{R2}(y,z).
- Οι κανόνες if-then αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση.

Ασαφείς Σχέσεις (2/2)

- Οι περισσότερο γνωστές μέθοδοι σύνθεσης ασαφών σχέσεων είναι:
  - *Σύνθεση max-min* (*max-min composition*)
  - *Σύνθεση max-product* (*max-product composition*).

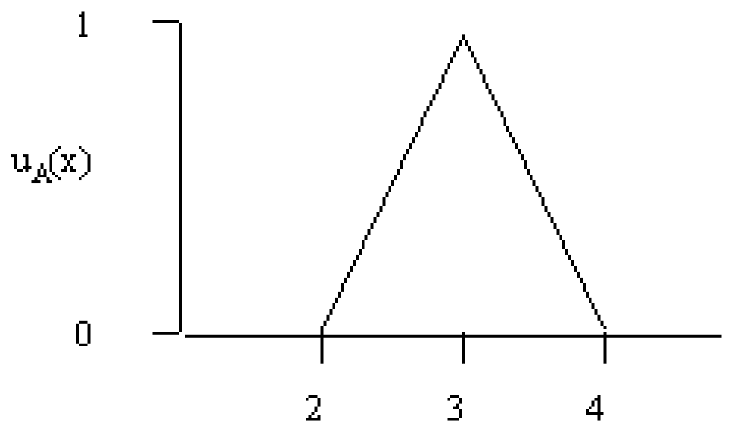
- Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα X×Y και Y×Z αντίστοιχα, τότε η σύνθεσή τους δίνει μία νέα σχέση $R_1 \circ R_2$ ορισμένη στο X×Z με συνάρτηση συγγένειας:
  - *Σύνθεση max-min*: $$u_{R1 \circ R2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R1}(x,y) \wedge u_{R2}(x,y)]$$
  - *Σύνθεση max-product*: $$u_{R1 \circ R2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R1}(x,y) \bullet u_{R2}(x,y)]$$

- Οι υπολογισμοί στο δεξιό μέρος των παραπάνω σχέσεων είναι παρόμοιοι με αυτούς του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- *Ασαφής Μεταβλητή* (*fuzzy variable*): Μια μεταβλητή της οποίας οι τιμές ορίζονται με ασαφή σύνολα.
  - Π.χ. τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής "ύψος".
  - Η μεταβλητή "ύψος" χαρακτηρίζεται και ως *λεκτική* (*linguistic*) μεταβλητή.
- Από ένα μικρό αρχικό αριθμό πρωταρχικών λεκτικών τιμών, να προκύψει ένας πολύ μεγαλύτερος αριθμός *σύνθετων λεκτικών τιμών* με τη χρήση *λεκτικών τελεστών* όπως AND, OR, NOT, VERY, κλπ. (βλ. πίνακα).

Λεκτικοί Τελεστές	**Επίδραση στη συνάρτηση συγγένειας**
VERY A	$u_{VERY(A)}(x) = [u_A(x)]^2$
A AND B	$u_{A\ AND\ B}(x) = [u_A(x) \wedge u_B(x)]$
A OR B	$u_{A\ OR\ B}(x) = [u_A(x) \vee u_B(x)]$
NOT A	$u_{NOT\ A}(x) = [1-u_A(x)]$
PLUS A	$u_{PLUS(A)}(x) = [u_A(x)]^{1.25}$
MINUS A	$u_{MINUS(A)}(x) = [u_A(x)]^{0.75}$



- *Ασαφείς αριθμοί* (*fuzzy numbers*): ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Π.χ. "Ασαφές 3" στο σχήμα αριστερά.
- Οι μη ασαφείς τιμές κάποιου μεγέθους αποκαλούνται crisp (*σαφείς, συγκεκριμένες*).

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- *Ασαφής πρόταση* είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή.
  - **Παράδειγμα**: στην ασαφή πρόταση "Το ύψος του Νίκου είναι μέτριο", το "ύψος" είναι η ασαφής μεταβλ. και "μέτριο" είναι ένα ασαφές σύνολο που είναι η τιμή της μεταβλ.
- *Ασαφής κανόνας* (*fuzzy rule*): είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
  - Παράδειγμα #1 (στην πιο απλή εκδοχή): "if x is A then y is B"
  - Παράδειγμα #2: "Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια τότε η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια"
    - τα "ταχύτητα" και "πίεση" είναι οι ασαφείς μεταβλητές
    - το ασαφές σύνολο "μέτρια" είναι η τιμή των ασαφών μεταβλητών "ταχύτητα" και "πίεση".
- Η αναλυτική περιγραφή ενός ασαφούς κανόνα if-then είναι μία ασαφής σχέση R(x,y) που ονομάζεται *σχέση συνεπαγωγής* (*implication relation*).
- Η *σχέση συνεπαγωγής* προκύπτει με κατάλληλο συνδυασμό του if και του then τμήματος του κανόνα, δηλ. των συναρτ. συγγένειας των ασαφών συνόλων A και B
- Γενική της μορφή της σχέσης (συνάρτησης) συνεπαγωγής:

$$R(x,y) \equiv u(x,y) = \varphi(\, u_A(x),\, u_B(y)\,)$$

  - Η συνάρτηση φ ονομάζεται *τελεστής συνεπαγωγής* (*implication operator*)
  - Υποδεικνύει τον ακριβή τρόπο συνδυασμού των συναρτήσεων συγγένειας του *if* και του *then* τμήματος ενός ασαφούς κανόνα, ώστε να προκύψει η αναλυτική του έκφραση.

Μερικοί Ασαφείς Τελεστές Συνεπαγωγής

Ονομασία Τελεστή	Αναλυτική Έκφραση του φ[uA(x),uB(y)]
φ_m: Zadeh Max-Min	$(u_A(x) \wedge u_B(y)) \vee (1- u_A(x))$
φ_c: Mandani Min	$u_A(x) \wedge u_B(y)$
φ_p: Larsen Product	$u_A(x) \bullet u_B(y)$
φ_α: Arithmetic	$1 \wedge (1-u_A(x) + u_B(y))$
φ_b: Boolean	$(1-u_A(x)) \vee u_B(y))$

Συλλογιστικές Διαδικασίας GMP και GMT

❖ Γενική μορφή προβλημάτων κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες:

- if x is A then y is B
- x is A' y is B' (?)

μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMP (Generalized Modus Ponens - GMP): B'=A'oR(*x*,*y*)

- if x is A then y is B
- x is A' (?) y is B'

μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMT (Generalized Modus Tollens - GMT): A'=R(*x*,*y*)oB'

❖ Η *σχέση συνεπαγωγής* R(x,y) που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί, πρέπει να συνδυαστεί (σύνθεση) με την κατά περίπτωση γνωστή παράμετρο (A' ή B') ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη παράμετρος.

Σύνοψη Ασαφούς Συλλογιστικής Διαδικασίας

- Με βάση έναν ασαφή κανόνα της μορφής:

"*if x is A then y is B*"

- και έστω συλλογιστική διαδικασία GMP (δηλαδή γνωστό το A' ως τιμή του x και ζητούμενο το B' ως τιμή του y), τα ασαφή σύνολα A και B συνδυάζονται με κάποιον από τους *τελεστές συνεπαγωγής* και παράγουν τη *σχέση συνεπαγωγής* $R(x,y)$.

- Από την $R(x,y)$ μέσω σύνθεσης (έστω *max-min σύνθεση*) με το A' προκύπτει η άγνωστη ποσότητα B':

$$B'=A'\circ R(x,y)$$

- Η περιγραφή ενός προβλήματος με ασαφείς μεταβλητές, ασαφείς τιμές και ασαφείς κανόνες ονομάζεται *ασαφής λεκτική περιγραφή* (*fuzzy linguistic description*) του προβλήματος.

Η Αρχή της Επέκτασης

- Μαθηματική μέθοδος που επιτρέπει την επέκταση των εννοιών και των υπολογιστικών τεχνικών των κλασσικών μαθηματικών στο πλαίσιο των ασαφών.
- Έστω μία συνάρτηση *f* που ορίζει μία απεικόνιση του συνόλου $X=\{x_1, x_2, .., x_n\}$ στο σύνολο $Y=\{y_1, y_2, .., y_n\}$, με τρόπο τέτοιο ώστε $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, .., $y_n=f(x_n)$.
- Έστω επίσης ένα ασαφές σύνολο *A* ορισμένο στα στοιχεία του *X*, δηλαδή στις μεταβλητές εισόδου της συνάρτησης *f*.

$$A = \{ u_A(x_1)/x_1 , u_A(x_2)/x_2 , ... , u_A(x_n)/x_n \}$$

- Αν η είσοδος *x* της συνάρτησης *f* γίνει ασαφής μέσω του συνόλου *A*, τότε τι συμβαίνει με την έξοδο *y* ;
- **Αρχή Επέκτασης**: επιτρέπει τον υπολογισμό του ασαφούς συνόλου *B* με εφαρμογή της συνάρτησης *f* στο ασαφές σύνολο *A*.

$$B = f(A) = \{ u_A(x_1)/f(x_1) , u_A(x_2)/f(x_2) , ... , u_A(x_n)/f(x_n) \}$$

  - δηλαδή, κάθε $y_i=f(x_i)$ γίνεται ασαφές σε βαθμό $u_A(x_i)$
  - πρακτικά, η $u_B(y)$ προκύπτει από την $u_A(x)$ όπου το *x* αντικαθίσταται με την έκφραση που προκύπτει για αυτό από την επίλυση της *f* ως προς *x*

- Ειδικές Περιπτώσεις
  - αν περισσότερα του ενός διαφορετικά x (έστω τα x_m και x_n) δίνουν μέσω της συνάρτησης f το ίδιο y (έστω το y_0), τότε: $u_B(y_o)=u_A(x_m) \vee u_A(x_n)$.
    - η μέγιστη τιμή συγγένειας των x_m και x_n στο A επιλέγεται ως βαθμός συγγένειας του y_0 στο B
  - αν για κάποιο y_o του B δεν υπάρχει x_0 του A τέτοιο ώστε $y_o=f(x_o)$, τότε η τιμή συγγένειας του B στο y_o είναι μηδέν.

- Γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις:
  - αν υπάρχουν οι μεταβλητές u, v, ..., w ορισμένες στα σύνολα U, V, ..., W αντίστοιχα
  - m διαφορετικά ασαφή σύνολα A_1, A_2, .., A_m ορισμένα στο $U\times V\times\ldots\times W$
  - η πολυπαραμετρική συνάρτηση $y=f(u,x,\ldots,w)$

τότε η ασαφοποίηση του χώρου των y, δηλαδή η συνάρτηση συγγένειας του συνόλου B, ορίζεται ως εξής:

$$u_B(y) = \vee_{U\times V\times\ldots\times W}[u_{A1}(u) \wedge u_{A2}(v) \wedge \ldots \wedge u_{Am}(w)] / f(u,y,\ldots,w)$$

Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης (1/2)

- Πρόσθεση των αριθμών Α:"ασαφές 3" και Β:"ασαφές 7"
  - Α: "ασαφές 3" = { 0/1, 0.5/2, 1/3, 0.5/4, 0/5 }
  - Β: "ασαφές 7" = { 0/5, 0.5/6, 1/7, 0.5/8, 0/9 }

- Κατασκευάζεται ο πίνακας:

B \ A	**x=2**	**x=3**	**x=4**
y=6	0.5 0.5	1 0.5	0.5 0.5
y=7	0.5 1	1 1	0.5 1
y=8	0.5 0.5	1 0.5	0.5 0.5

  - Έχει τόσες στήλες (3), όσα είναι τα στοιχεία του *A* που έχουν τιμή συγγένειας $\neq 0$
  - Έχει τόσες γραμμές (3) όσα είναι τα στοιχεία του *B* που έχουν τιμή συγγένειας $\neq 0$
  - Σε κάθε κελί γράφεται πάνω δεξιά ο βαθμός συγγένειας του *x* στο *A* και κάτω αριστερά ο βαθμό συγγένειας του *y* στο *B*.

- Σύμφωνα με την αρχή της επέκτασης θα είναι:

$$u_{C=A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} [u_A(x) \wedge u_B(y)]/(x+y)$$

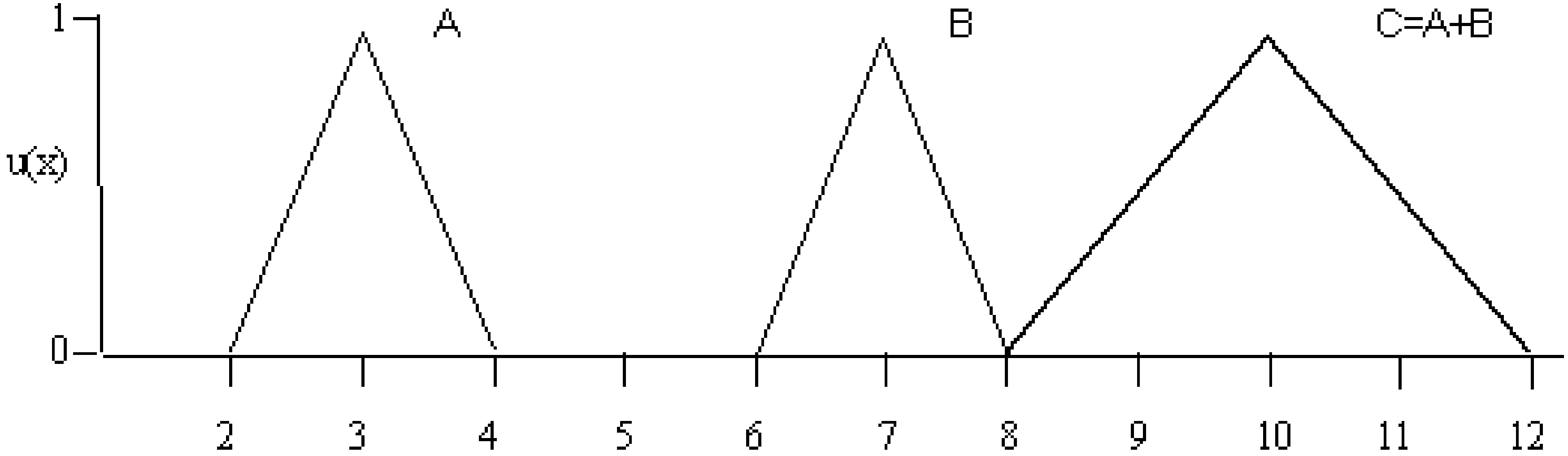
Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης (2/2)

- Έστω z=9. Υπάρχουν δύο συνδυασμοί *x* και *y* που μας δίνουν άθροισμα 9.
- Η αρχή της επέκτασης λέει ότι η τιμή συγγένειας του 9 στο ασαφές σύνολο *C=A+B*, ισούται με το μέγιστο των ελαχίστων των τιμών συγγένειας των σκιασμένων κελιών

$$u_{A+B}(9) = \max(\ \min(u_A(3), u_B(6)),\ \min(u_A(2), u_B(7))\ ) =$$
$$\max(\ \min(1, 0.5),\ \min(0.5, 1) =$$
$$\max(\ 0.5,\ 0.5\ ) = 0.5$$

  - Άρα ο βαθμός συγγένειας του z=9 στο ασαφές σύνολο *C=A+B* είναι 0.5.
- Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται ο βαθμός συγγένειας και για τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα οπότε προκύπτει:

$$u_{A+B}(z) = \{\ 0/8,\ 0.5/9,\ 1/10,\ 0.5/11,\ 0/12\ \}$$



Παράδειγμα Άμεσης Εφαρμογής Αρχής Επέκτασης

- Αν $y=f(x)$ και η είσοδος x της f γίνεται ασαφής μέσω μιας συνάρτησης συγγένειας $u_A(x)$, τότε και η έξοδος y γίνεται ασαφής, με την $u_B(y)$ να προκύπτει με επίλυση της $y=f(x)$ ως προς x και αντικατάσταση της έκφρασης που προκύπτει για το x στην $u_A(x)$
- Έστω η παρακάτω συνάρτηση $y=f(x)$:

$$y = f(x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

- Έστω ότι το x γίνεται ασαφές μέσω της:

$$u_A(x)=1/2\cdot x$$

- Η έξοδος y της f γίνεται ασαφής με το $u_B(y)$ να προκύπτει με επίλυση της f ως προς x:

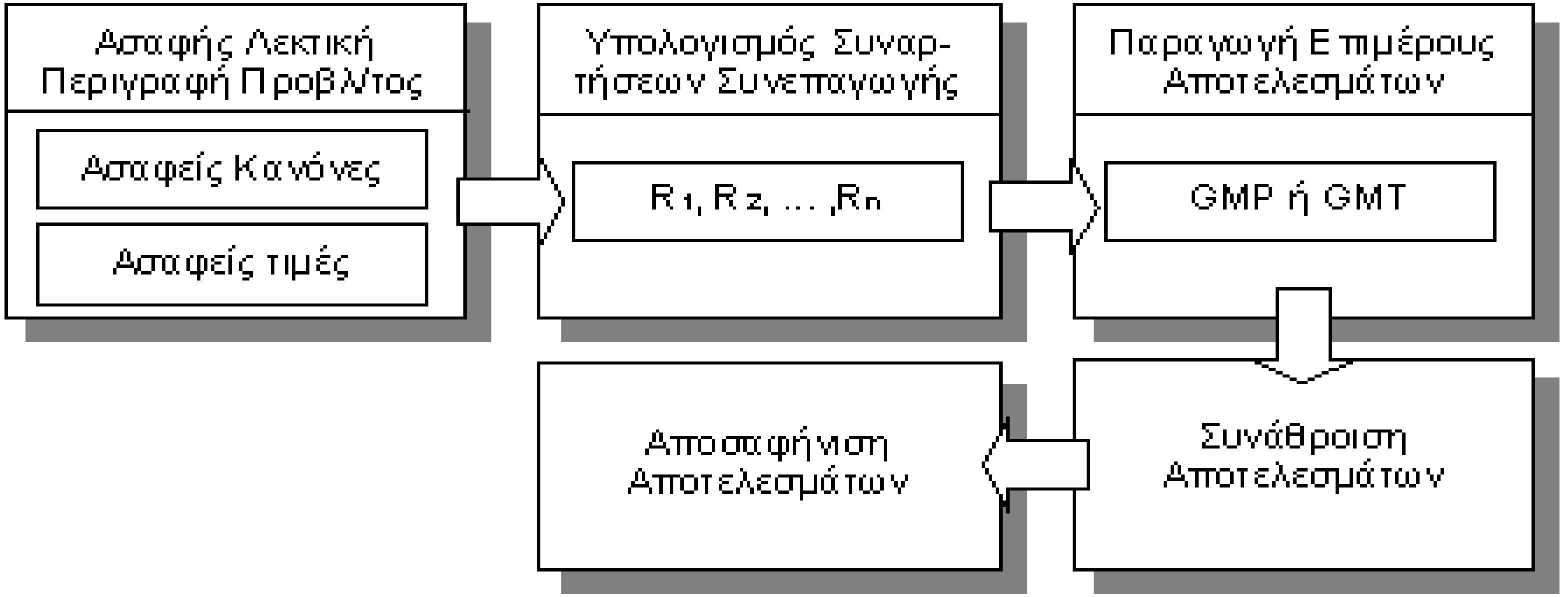
$$x = 2\sqrt{1-y^2}$$

και αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για το x στην $u_A(x)$, δηλαδή:

$$u_B(y) = u_A(2\sqrt{1-y^2}) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-y^2}$$

Ασαφής Συλλογιστική

- Αφορά την εξαγωγή συμπερασμάτων (ενδεχομένως σε ασαφή μορφή) με χρήση ασαφών κανόνων.
- Απαιτεί την ύπαρξη μιας *ασαφούς λεκτικής περιγραφής* του προβλήματος
- Περιλαμβάνει τα εξής τέσσερα στάδια:
  - Υπολογισμός της συνάρτησης συνεπαγωγής για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα.
  - Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων μέσω κάποιας συλλογιστικής διαδικασίας.
  - Συνάθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων (διότι ίσως ενεργοποιηθούν πολλοί κανόνες).
  - Αποσαφήνιση αποτελεσμάτων.



Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής (1/2)

- Έστω σύστημα ασαφούς συλλογιστικής που ρυθμίζει τη δόση D μιας φαρμακευτικής ουσίας που πρέπει να χορηγηθεί σε ασθενή, με βάση τη θερμοκρασία του T.
- Έστω ότι το σύστημα βασίζεται στους εξής δύο ασαφείς κανόνες:

  K_1: if T is HIGH then D is HIGH

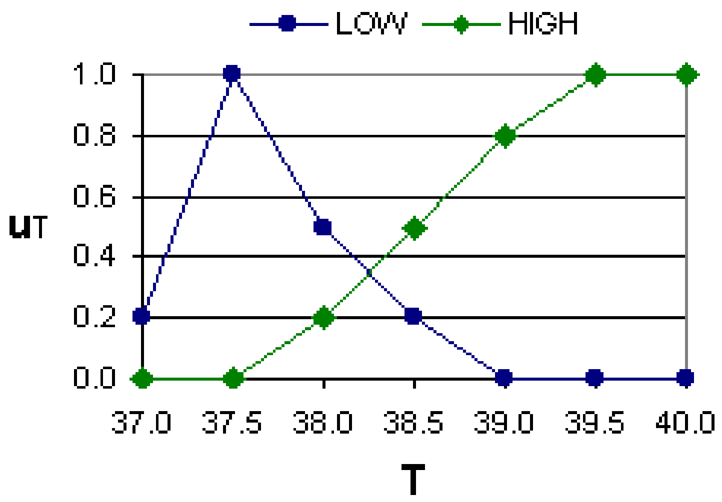
  K_2: if T is LOW then D is LOW
- Δίνονται επίσης τα ασαφή σύνολα HIGH και LOW για τα μεγέθη T και D:

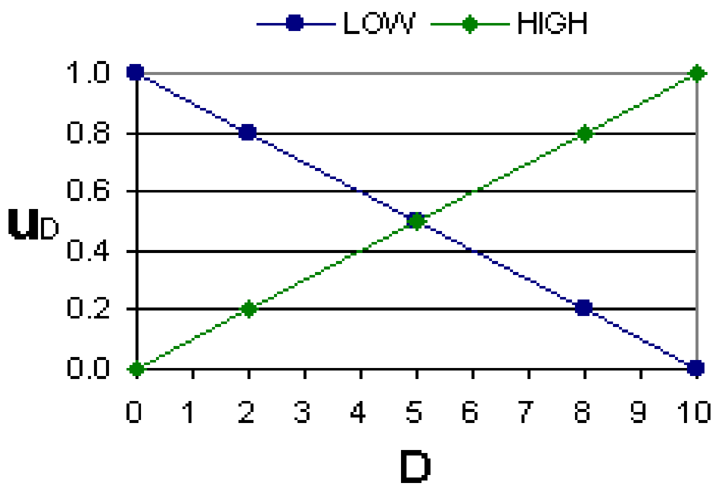
  T_{LOW} = { 0.2/37, 1/37.5, 0.5/38, 0.2/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 }

  T_{HIGH} = { 0/37, 0/37.5, 0.2/38, 0.5/38.5, 0.8/39, 1/39.5, 1/40 }

  D_{LOW} = { 1/0, 0.8/2, 0.5/5, 0.2/8, 0/10 }

  D_{HIGH} = { 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.8/8, 1/10 }

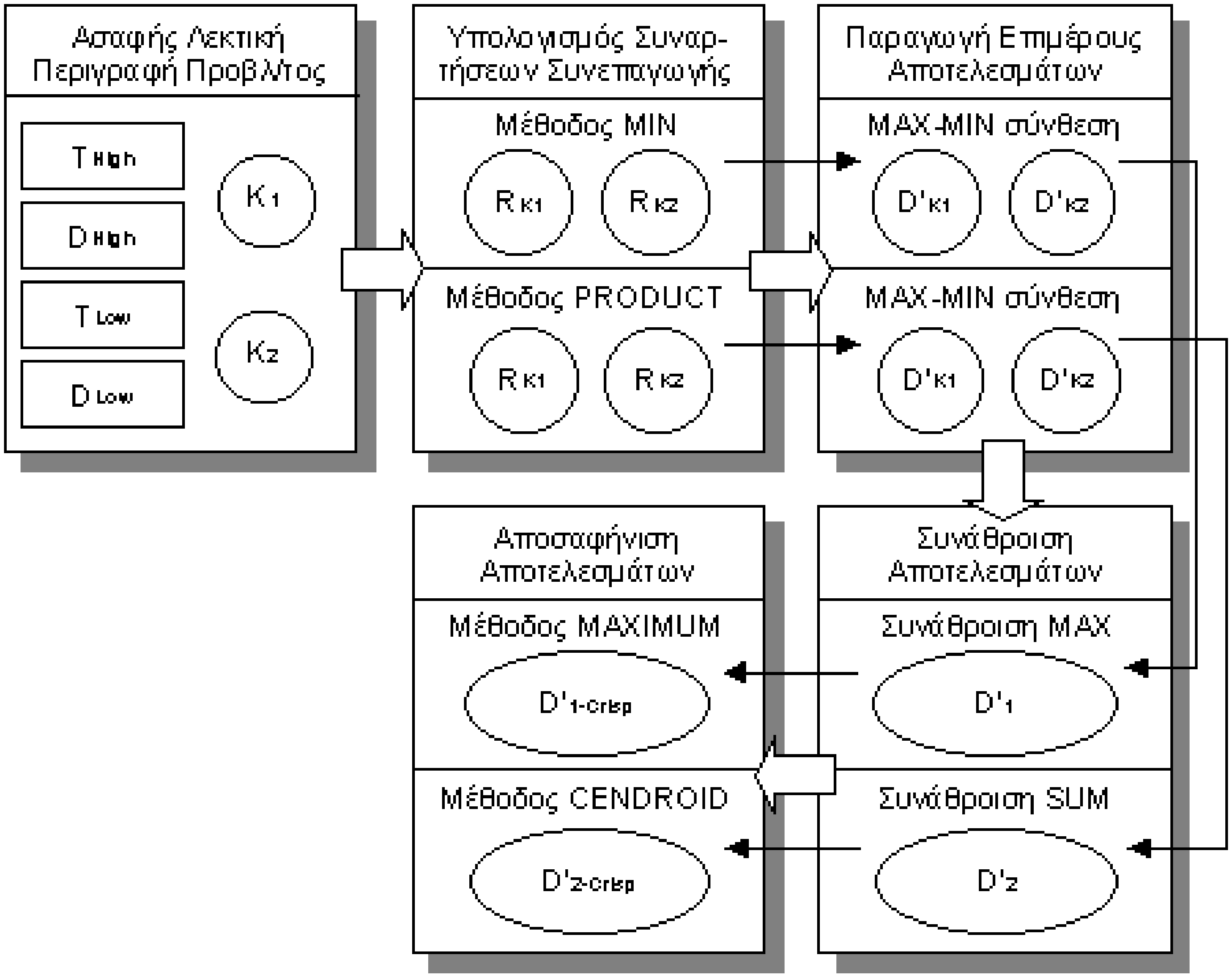




- Αν T'=38.5, να υπολογιστεί η τιμή του D' με συλλογιστική διαδικασία GMP.

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής (2/2)

- Δύο εναλλακτικές οδοί (μαύρα βέλη) που χρησιμοποιούν διαφορετικές μεθόδους σε κάθε ένα από τα 4 απαιτούμενα βήματα.



Βήμα Α1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής (Μέθοδος MIN)

- Επειδή υπάρχουν δύο κανόνες, πρέπει να υπολογιστούν δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2}. Χρησιμοποιείται ο τελεστής συνεπαγωγής Mandani min (ή απλά MIN).

  K_1: if T is HIGH then D is HIGH **K_2**: if T is LOW then D is LOW

- Έστω ο κανόνας K_1. Κατασκευάζεται ο κάτω πίνακας (αριστερά) με τον εξής τρόπο:

R_{K1}	**D**	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37.0	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38.0	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39.0	0.8	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	**D**	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37.0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0
38.5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
39.0	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40.0	0	0	0	0	0	0

- Οι δύο πρώτες γραμμές περιέχουν το ασαφές σύνολο D_{HIGH}, ενώ οι δύο πρώτες στήλες το ασαφές σύνολο T_{HIGH}. Η μεταβλητή του δεξιού τμήματος του κανόνα τοποθετείται πάντα στο πάνω μέρος.
- Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα περιέχει το $\min(u_{THIGH}, u_{DHIGH})$ για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται. Ο εσωτερικός αυτός πίνακας αποτελεί και τη σχέση συνεπαγωγής R_{K1}.
- Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)
- **Γενίκευση**: Αν το if τμήμα περιέχει N εκφράσεις προκύπτει πίνακας N+1 διαστάσεων.

Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (1/2)

- Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
  - Κανόνας K_1: $D'_{K1}=T' \circ R_{K1}(T_{HIGH},D_{HIGH})$
  - Κανόνας K_2: $D'_{K2}=T' \circ R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας T'=38.5 σε μορφή ασαφούς συνόλου, δηλαδή:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37,\ 0/37.5,\ 0/38,\ 1/38.5,\ 0/39,\ 0/39.5,\ 0/40 \}$$

- Χρησιμοποιείται η μέθοδος *σύνθεσης* ($\circ$) max-min (η συνηθέστερη περίπτωση).
- Τεχνική όμοια με πολλαπλασιασμό πινάκων: χρησιμοποιείται min αντί πολλαπλασιασμού και max αντί πρόσθεσης.
- $1^{ος}$ πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και $2^{ος}$ ο αριστερά του βήματος Α1 (7x5)
- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}.

$D'_{K1}=$ [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40] o

T \ D	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

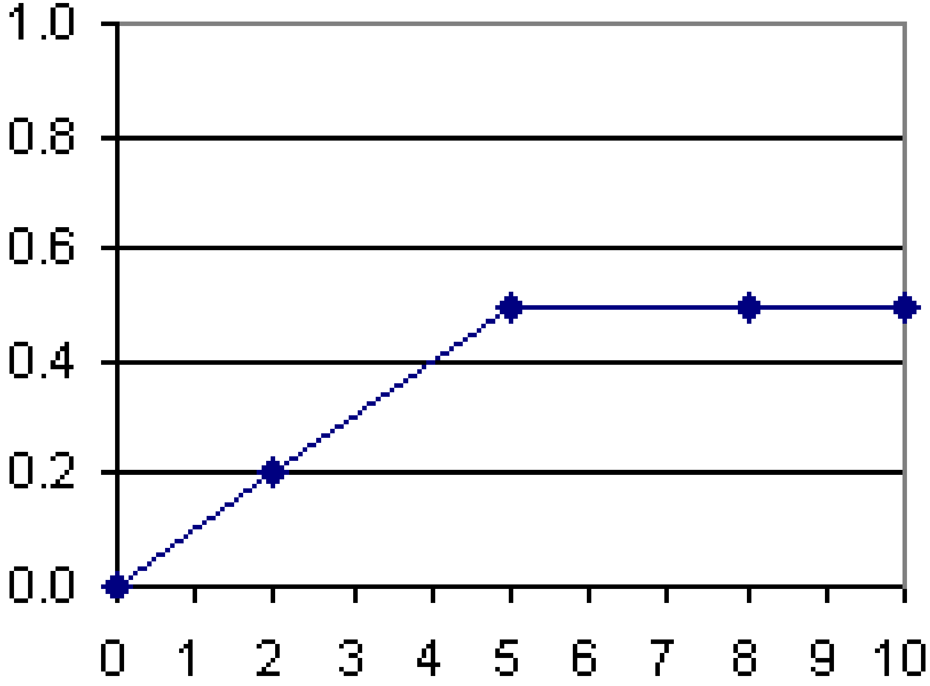
$\Rightarrow$

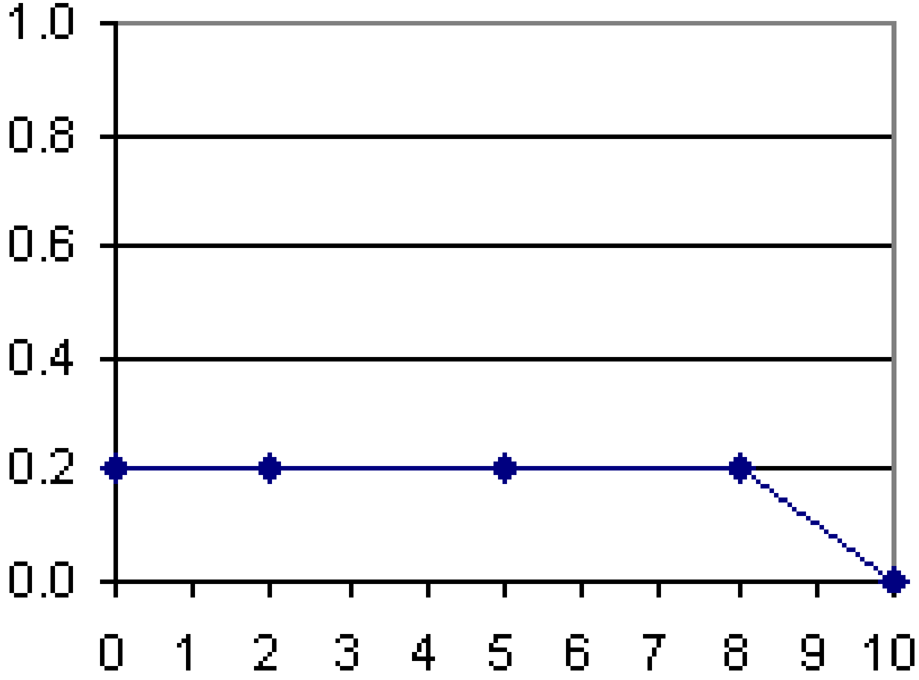
$$D'_{K1} = \{ 0/0,\ 0.2/2,\ 0.5/5,\ 0.5/8,\ 0.5/10 \}$$

- Όμοια προκύπτει ότι ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K2} = \{ 0.2/0,\ 0.2/2,\ 0.2/5,\ 0.2/8,\ 0/10 \}$

Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (2/2)

- Γραφική απεικόνιση των D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).





Βήμα Α3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων (Μέθοδος MAX)

- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας τη μέγιστη τιμή συγγένειας από τις παραμέτρους εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (*pointwise maximum* - $\max_{p/w}$).
- Προτιμάται όταν στον υπολογισμό της συνάρτησης συνεπαγωγής R έχει γίνει χρήση του τελεστή συνεπαγωγής Mandani min.
- Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:

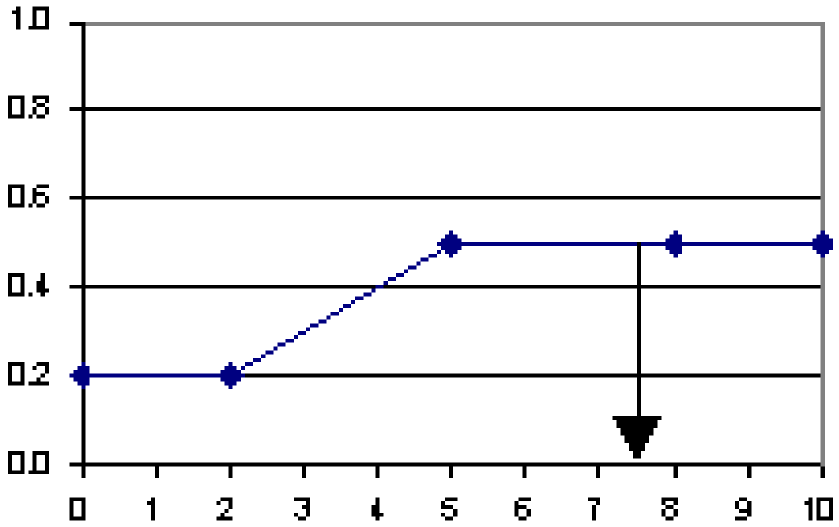
$D_1'_{K1}$ = { 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 }

$D_1'_{K2}$ = { 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 }

η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει

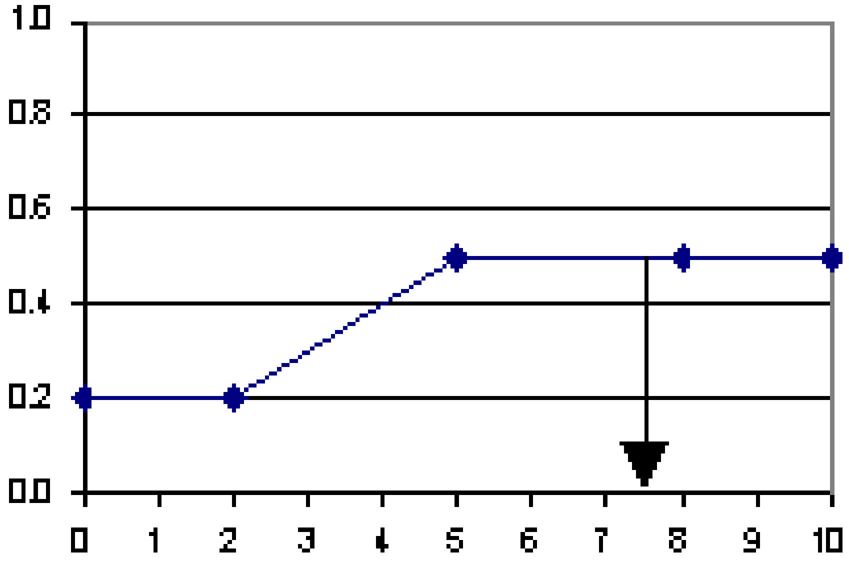
D_1'= {max(0,0.2)/0, max(0.2,0.2)/2, max(0.5,0.2)/5, max(0.5,0.2)/8, max(0.5,0)/10} =

= { 0.2/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 }



Βήμα Α4: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος αποσαφήνισης MAXIMUM
  - Η διακριτή τιμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή συγγένειας του τελικού αποτελέσματος.
  - Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες τιμές, τότε λαμβάνεται ο μέσος όρος τους (average-of-maxima).
  - Χρησιμοποιώντας average-of-maxima αποσαφήνιση στο αποτέλεσμα της συνάθροισης max προκύπτει η διακριτή τιμή: $D_1 = (5+8+10)/3 = 7.7$



Βήμα Β1: Υπολ. συνάρτησης συνεπαγωγής (Μέθοδος PRODUCT)

- Επειδή υπάρχουν δύο κανόνες, πρέπει να υπολογιστούν δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2}. Χρησιμοποιείται ο τελεστής συνεπαγωγής Larsen Product (ή απλά PRODUCT).

K₁: if T is HIGH then D is HIGH **K₂**: if T is LOW then D is LOW

- Έστω ο κανόνας K_1. Κατασκευάζεται ο παρακάτω πίνακας (αριστερά) με τον εξής τρόπο:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38	0.2	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0.8	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38	0.5	0.5	0.4	0.25	0.1	0
38.5	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
39	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0

- Οι δύο πρώτες γραμμές περιέχουν το ασαφές σύνολο D_{HIGH}, ενώ οι δύο πρώτες στήλες το ασαφές σύνολο T_{HIGH}. Η μεταβλητή του δεξιού τμήματος του κανόνα τοποθετείται πάντα στο πάνω μέρος.
- Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα περιέχει το ($u_{THIGH} \cdot u_{DHIGH}$) για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται. Ο εσωτερικός αυτός πίνακας αποτελεί και τη σχέση συνεπαγωγής R_{K1}.
- Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (1/2)

- Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
  - Κανόνας K_1: $D'_{K1}=T' \circ R_{K1}(T_{HIGH},D_{HIGH})$
  - Κανόνας K_2: $D'_{K2}=T' \circ R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας T'=38.5 σε μορφή ασαφούς συνόλου, δηλαδή:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37,\ 0/37.5,\ 0/38,\ 1/38.5,\ 0/39,\ 0/39.5,\ 0/40 \}$$

- Χρησιμοποιείται η μέθοδος *σύνθεσης* ($\circ$) max-min (η συνηθέστερη περίπτωση).
- Τεχνική όμοια με πολλαπλασιασμό πινάκων: χρησιμοποιείται min αντί πολλαπλασιασμού και max αντί πρόσθεσης.
- 1ος πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και 2ος ο εσωτερικός του βήματος B1 (7x5)
- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}.

$D'_{K1}=$ [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40] $\circ$

T \ D	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

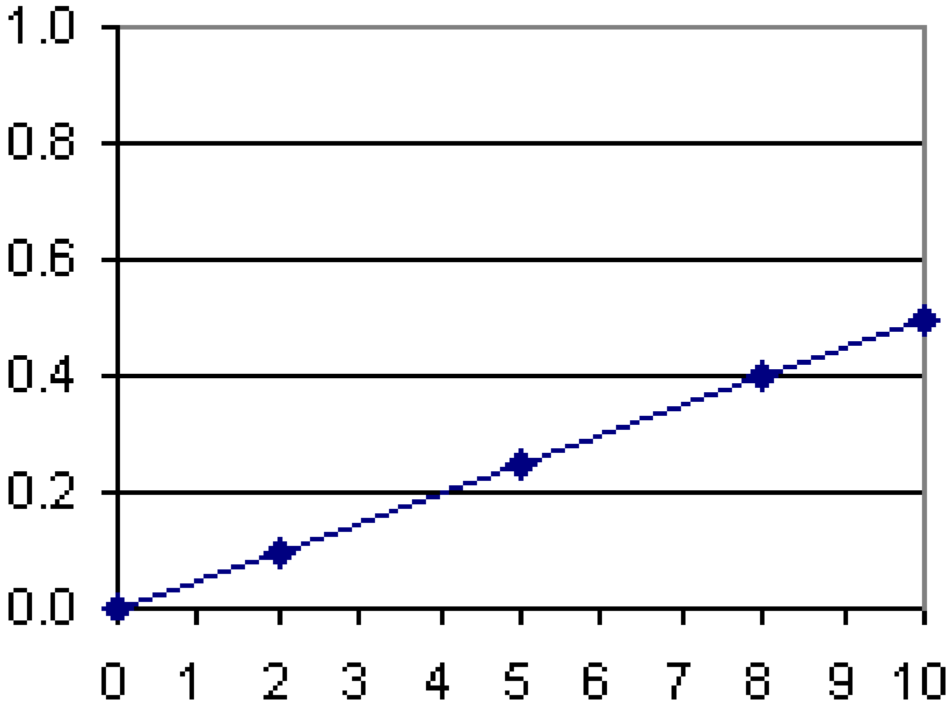
$\Rightarrow$

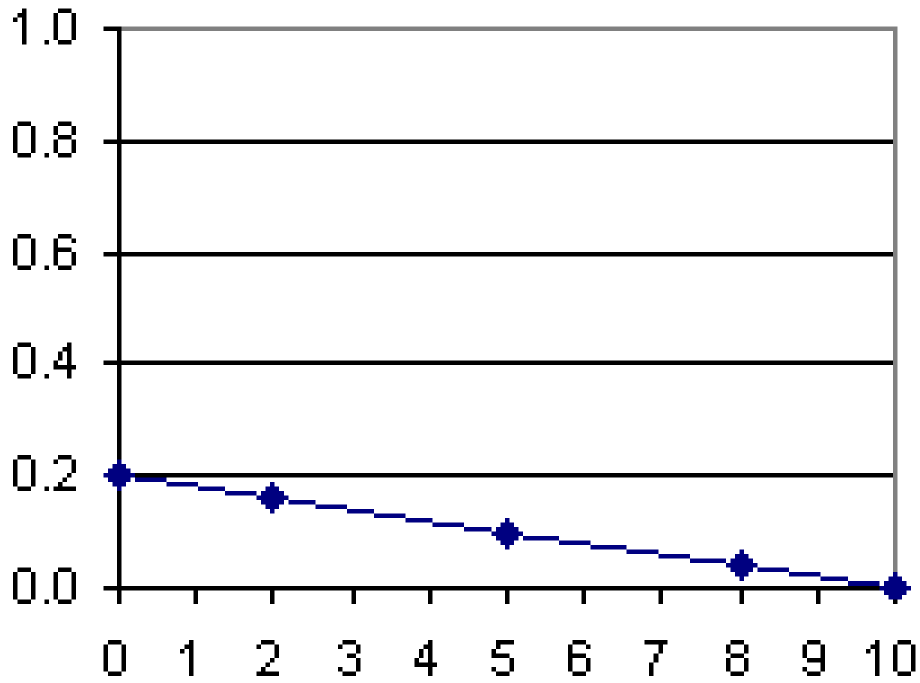
$$D'_{K1} = \{ 0/0,\ 0.1/2,\ 0.25/5,\ 0.4/8,\ 0.5/10 \}$$

- Όμοια προκύπτει ότι ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K2} = \{ 0.2/0,\ 0.16/2,\ 0.1/5,\ 0.04/8,\ 0/10 \}$

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (2/2)

- Γραφική απεικόνιση των D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).





Βήμα Β3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων (Μέθοδος SUM)

- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας το άθροισμα των τιμών συγγένειας των παραμέτρων εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (*pointwise sum* - $\text{sum}_{p/w}$).
- Προτιμάται όταν στον υπολογισμό της συνάρτησης συνεπαγωγής R έχει γίνει χρήση του τελεστή συνεπαγωγής Larsen product.
- Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:

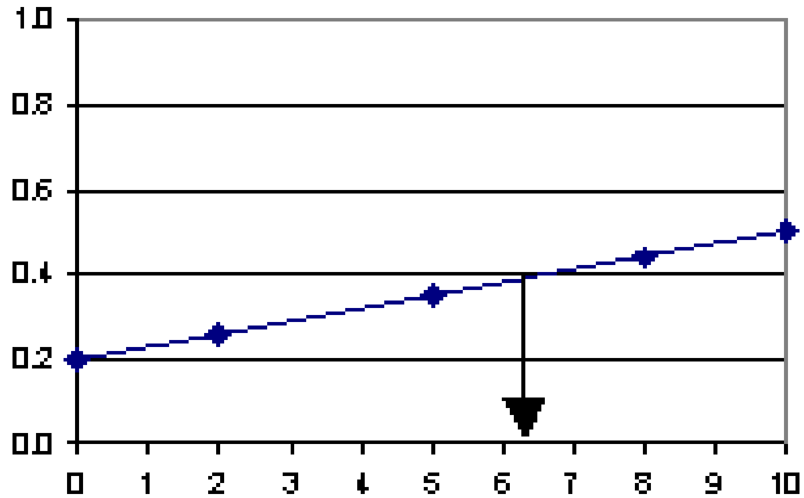
$D_2'_{K1}$ = { 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 }

$D_2'_{K2}$ = { 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 }

η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει

D_2'= { (0+0.2)/0, (0.1+0.16)/2, (0.25+0.1)/5, (0.4+0.04)/8, (0.5+0)/10} =

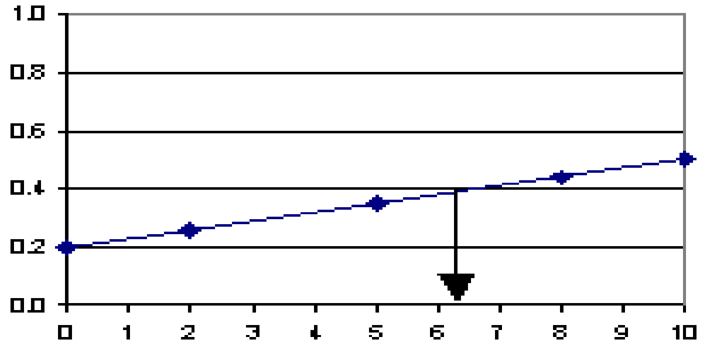
= { 0.2/0, 0.26/2, 0.35/5, 0.44/8, 0.5/10 }



- Η *συνάθροιση sum* μπορεί να οδηγήσει σε τιμές αληθείας μεγαλύτερες της μονάδας.
- Για αυτό το λόγο πριν γίνει *αποσαφήνιση* του αποτελέσματος οι τιμές κανονικοποιούνται.
- Δεν απαιτείται κανονικοποίηση αν η μέθοδος *αποσαφήνισης* είναι η *cendroid*.

Βήμα Β4: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος αποσαφήνισης CENDROID
  - Η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συγγένειας για την ασαφή παράμετρο εξόδου.
  - Το κέντρο βάρους μιας επιφάνειας που ορίζεται από μία συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη μεταξύ t_1 και t_2 και τον άξονα x, βρίσκεται στη θέση $t_{\kappa\beta}$ που ορίζεται από τη γενική σχέση (1):



$$(1)\quad t_{\kappa\beta} = \frac{\int_{t1}^{t2} t \cdot f(t)dt}{\int_{t2}^{t1} f(t)dt} \qquad (2)\quad t_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i \cdot u_{OUT}(t_i)}{\sum_{i=1}^{N} u_{OUT}(t_i)}$$

  - Στην περίπτωση διακριτού συνόλου αναφοράς, με u_{OUT} συνάρτηση συγγένειας εξόδου, τα ολοκληρώματα αντικαθίστανται με διακριτό άθροισμα και γίνεται δειγματοληψία N σημείων στο σύνολο αναφοράς της u_{OUT} (σχ.2).
  - Με CENDROID αποσαφήνιση στα αποτελέσματα της συνάθροισης SUM, προκύπτει:

$$t_{D2'} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i \cdot u_{D2'}(t_i)}{\sum_{i=1}^{5} u_{D2'}(t_i)} = \frac{0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.26 + 5 \cdot 0.35 + 8 \cdot 0.44 + 10 \cdot 0.5}{0.2 + 0.26 + 0.35 + 0.44 + 0.5} = 6.2$$

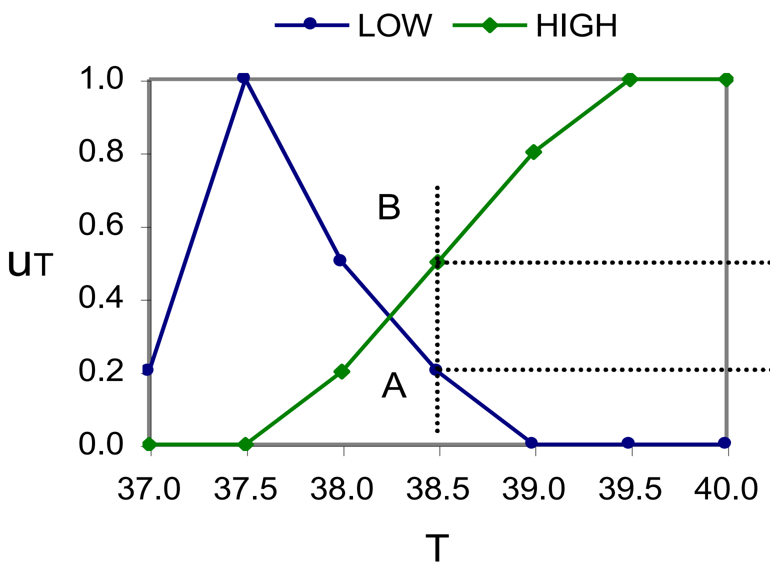
  - Αν έχει γίνει σύνθεση αποτελεσμάτων από επιμέρους κανόνες και υπάρχουν τυχόν αλληλοεπικαλυπτόμενες περιοχές, αυτές λαμβάνονται υπ' όψη μία μόνο φορά.

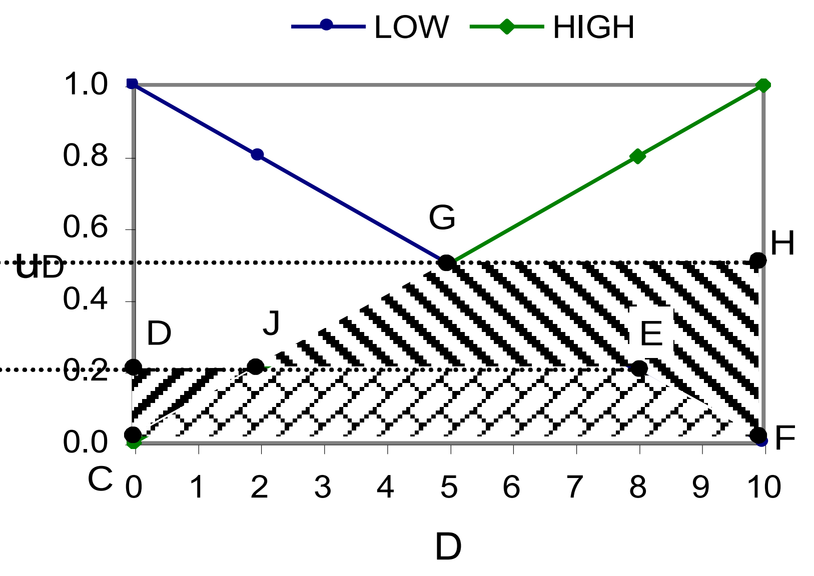
Διαγραμματική Επίλυση (1/2)

- **Προϋπόθεση**: οι συναρτ. συγγένειας να είναι συνεχείς καμπύλες - όχι ζεύγη (x,u(x))
- **Πρόβλημα**: υπολογισμός της δόσης D' μιας φαρμακευτικής ουσίας με βάση την θερμοκρασία T' και τους ασαφείς κανόνες:

K$_1$: if T is HIGH then D is HIGH **K$_2$**: if T is LOW then D is LOW

- Θεωρώντας μέθοδο MIN για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:

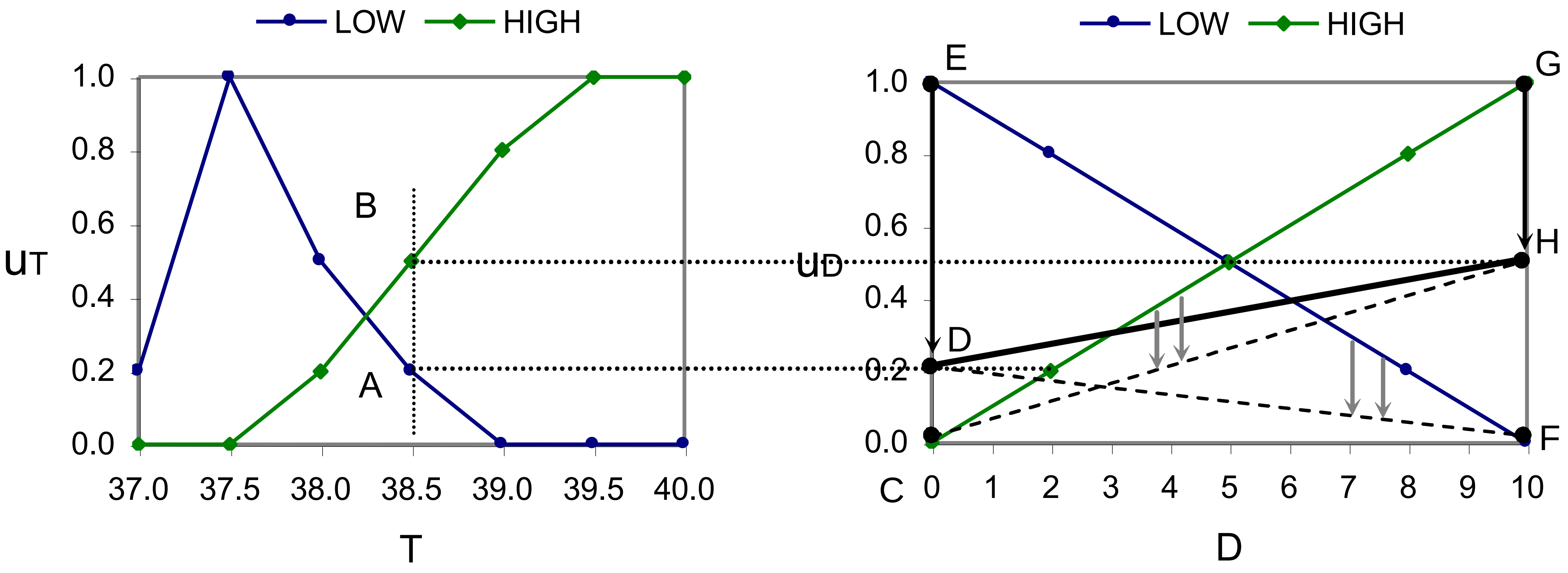




- Οι "καμπύλες" DEF και CGH αποτελούν την συνάρτηση συγγένειας της εξόδου των κανόνων K$_2$ και K$_1$ αντίστοιχα.
- Η συνάθροιση max στις "καμπύλες" DEF και CGH δίνει την "καμπύλη" DJGH που είναι σε συμφωνία με την αναλυτική λύση. Η αποσαφήνιση γίνεται όπως και στην αναλυτική επίλυση.

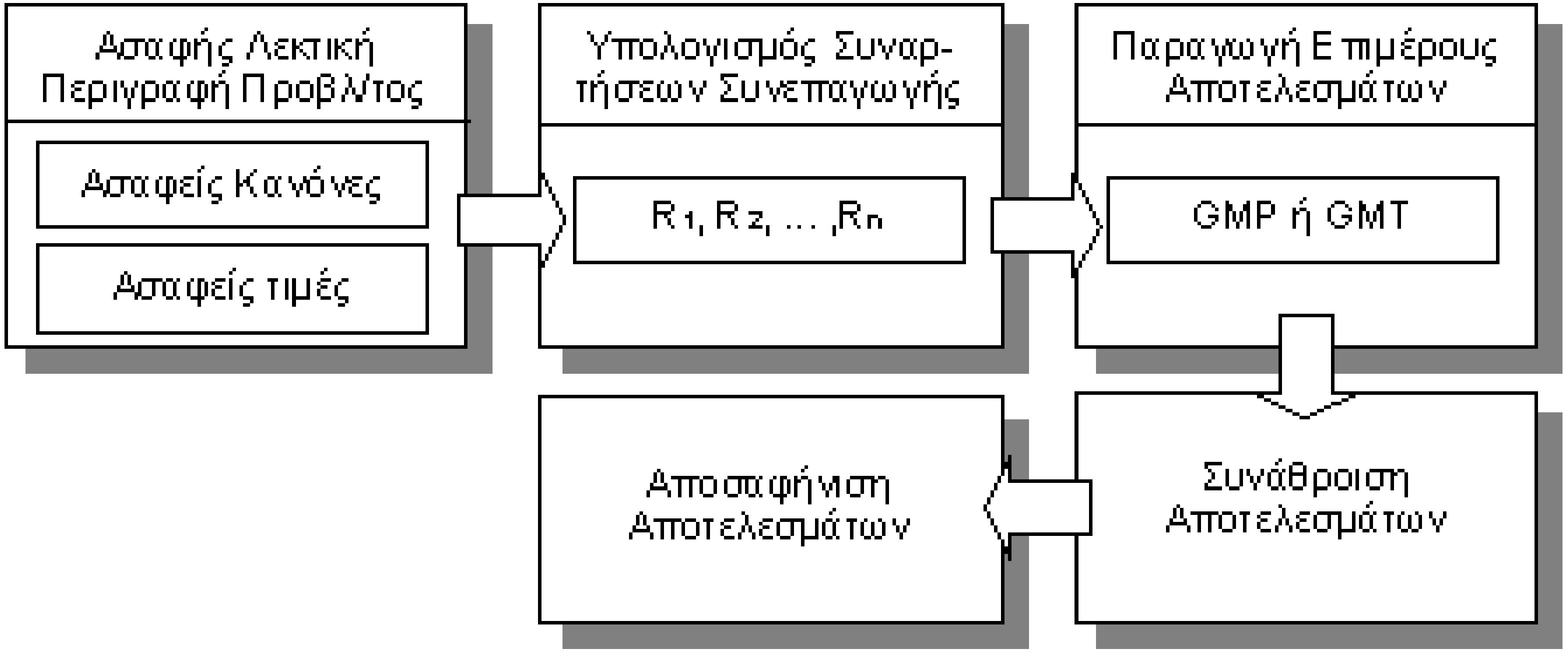
Διαγραμματική Επίλυση (2/2)

- Θεωρώντας μέθοδο PRODUCT για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:



- Οι "καμπύλες" DF και CH αποτελούν την συνάρτηση συγγένειας της εξόδου των κανόνων K_2 και K_1 αντίστοιχα.
- Η συνάθροιση SUM στις "καμπύλες" DF και CH δίνει την "καμπύλη" DH που είναι σε συμφωνία με την αναλυτική λύση.
- Η αποσαφήνιση για τον υπολογισμό του D' γίνεται όπως και στην αναλυτική επίλυση

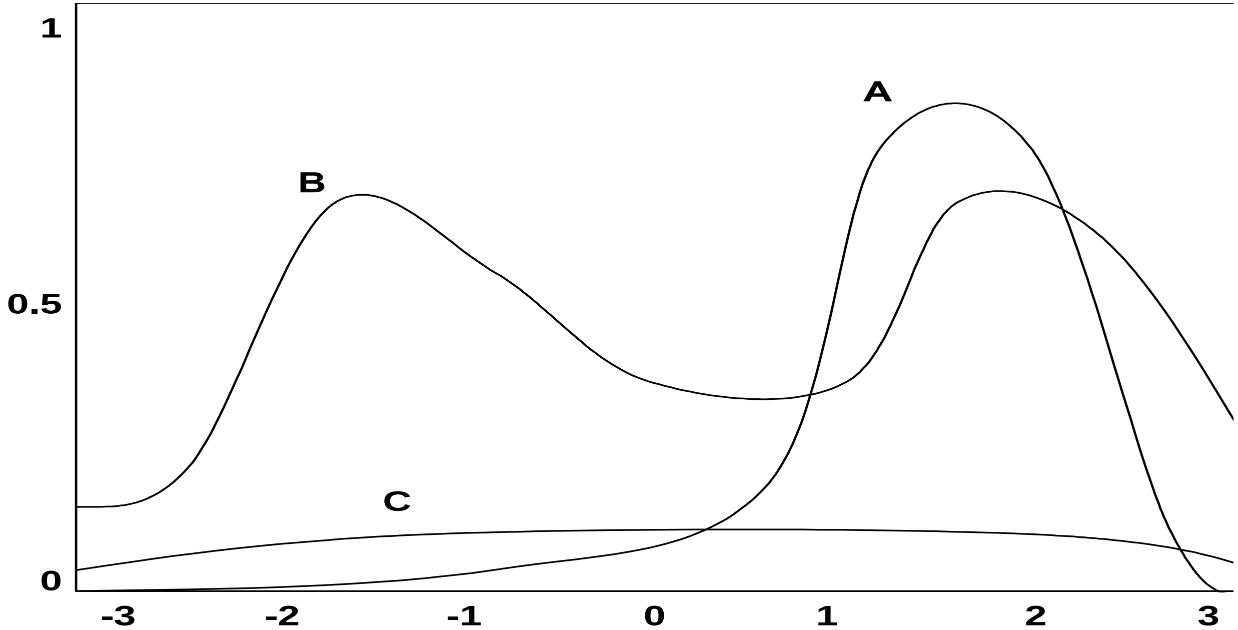
Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής



- Καλή κατανόηση της διαδικασίας που πρόκειται να μοντελοποιηθεί.
- **Δυσκολότερο σημείο**: η επιλογή των ασαφών μεταβλητών, των τιμών τους και των κανόνων με τους οποίους θα συνδυαστούν.
- Ο προσδιορισμός των διαφόρων συναρτήσεων συγγένειας, πολλές φορές γίνεται αυτόματα με χρήση νευρωνικών δικτύων.
- Άλλα σημεία που απαιτούν προσοχή: η επιλογή του κατάλληλου τελεστή συνεπαγωγής, της μεθόδου αποσαφήνισης, κλπ.

Σταθερότητα/Ποιότητα Ασαφούς Συστήματος

- **Σταθερότητα**: η ικανότητα του ασαφούς συστήματος να εμφανίζει καλή συμπεριφορά σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου.
- Συνήθως η σταθερότητα συμπεριλαμβάνεται σαν ασαφής μεταβλητή στην περιγραφή του συστήματος και σχετικοί κανόνες ρυθμίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος σε ακραίες καταστάσεις.
- Επειδή περισσότεροι του ενός κανόνες συνεισφέρουν στο αποτέλεσμα του σταδίου της *συνάθροισης*, η μορφή του τελικού αποτελέσματος πολλές φορές δίνει μία καλή ένδειξη για την ποιότητα του συνολικού συστήματος.



Χαρακτηριστικές περιπτώσεις ασαφούς εξόδου.

Παράδειγμα

a) Ύπαρξη ενός "ισχυρού" κανόνα που διαμορφώνει δραστικά το αποτέλεσμα (επιθυμητό χαρακτηριστικό).

b) Οι δύο κορυφές της συνάρτησης συγγένειας της εξόδου φανερώνουν την ύπαρξη δύο κανόνων (ή ομάδων κανόνων) οι οποίοι έχουν αντιφατική συμπεριφορά (απαιτείται βελτίωση του συστήματος κανόνων).

c) Το μεγάλο πλατό, υποδηλώνει ότι το σύστημα των κανόνων είναι ελλιπές.

Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- Σύστημα Linkman (ιστορικά η πρώτη εφαρμογή): έλεγχε την μίξη των υλικών και την κατεργασία τους σε περιστρεφόμενο κλίβανο, σε βιομηχανίες παραγωγής τσιμέντου (σε χρήση και στην Ελλάδα).
- Ο υπόγειος σιδηρόδρομος Sendai στην Ιαπωνία: έλεγχος ρυθμού επιτάχυνσης και επιβράδυνσης των συρμών, κλπ.
- Φωτογραφικές μηχανές που εστιάζουν και ρυθμίζουν το χρόνο έκθεσης αυτόματα.
- Πλυντήρια ρούχων που αποφασίζουν μόνα τους το πρόγραμμα πλύσης ανάλογα με την ποσότητα ρούχων, το πόσο βρώμικα είναι και την ποιότητα του νερού.
- Συσκευές video-camera: για συνεχή εστίαση αλλά και σταθεροποίηση της εικόνας.
- Ασαφή συστήματα πέδησης (fuzzy ABS) και μετάδοσης κίνησης σε αυτοκίνητα.
- Ασαφή συστήματα ελέγχου λαβής σε ρομποτικούς βραχίονες.
- Ασαφείς συσκευές κλιματισμού.
- Ασαφείς βαλβίδες για έλεγχο ροής.
- Ασαφή συστήματα κατανομής καυσίμου ανάλογα με το φάκελο πτήσης σε δεξαμενές πολεμικών αεροσκαφών.
- Έμπειρα συστήματα για οικονομικές εφαρμογές (χρηματιστήριο) με ασαφείς κανόνες.

Ασκήσεις

- 8.5. Πως θα χαρακτηρίζατε ένα σπίτι 80 m^2 με βάση τα ασαφή σύνολα:
  Μεγάλο={0.0/40, 0.1/50, 0.15/60, 0.5/80, 0.6/100, 0.7/110, 0.8/120, 0.9/140} και
  Μικρό={1.0/40, 0.9/50, 0.8/60, 0.6/80, 0.3/100, 0.2/110, 0.1/120, 0.0/140}.

- 8.6. Πως θα χαρακτηρίζατε κάποιον με μισθό 800€ με βάση τα ασαφή σύνολα:
  Χαμηλόμισθος={1/650, 0.9/700, 0.7/800, 0.5/1000, 0.3/1200, 0.1/1500} και
  Υψηλόμισθος={0/650, 0.1/700, 0.2/800, 0.4/1000, 0.6/1200, 0.7/1500}.

- 8.7. Πως θα χαρακτηρίζατε κάποιον με ηλικία 30 ετών με βάση τα ασαφή σύνολα:
  Νέος={1/10, 0.9/20, 0.7/30, 0.4/40, 0.2/50, 0/60} και
  Μεσήλικας={0/10, 0.1/20, 0.3/30, 0.5/40, 0.7/50, 0.9/60}.

- 8.8. Πως θα χαρακτηρίζατε κάποιον με ύψος 1.8 με βάση τα ασαφή σύνολα:
  Κοντός={1/1.5, 1/1.6, 0.8/1.7, 0.3/1.8, 0.1/1.9, 0/1.95} και
  Ψηλός={0/1.5, 0/1.6, 0.2/1.7, 0.5/1.8, 0.7/1.9, 1/1.95}.