ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 4: Ισοδυναμία, διάταξη, άπειρα σύνολα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

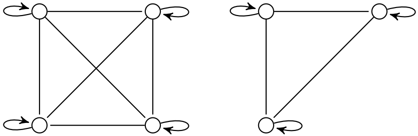
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σχέσεις ισοδυναμίας

- Μία *ανακλαστική*, *συμμετρική* και *μεταβατική* σχέση, ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας**.
  - Ο γράφος μιας σχέσης ισοδυναμίας αποτελείται από ένα σύνολο συνδεδεμένων συνιστωσών.
  - Σε κάθε συνιστώσα κάθε δύο κόμβοι συνδέονται με ένα μονοπάτι.



Κλάσεις ισοδυναμίας I

Ορισμός 1 (Κλάσεις ισοδυναμίας)

Οι *συνδεδεμένες συνιστώστες* μιας *σχέσης ισοδυναμίας* ονομάζονται **κλάσεις ισοδυναμίας**.

- Συμβολίζουμε με [α] την κλάση ισοδυναμίας για ένα στοιχείο α, αν η σχέση ισοδυναμίας R προκύπτει από τα συμφραζόμενα. Δηλαδή $[\alpha]=\{\beta:(\alpha,\beta)\in R\}$

Κλάσεις ισοδυναμίας II

Θεώρημα 2

Για μία σχέση ισοδυναμίας R ενός μη κενού συνόλου A, οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι μια διαμέριση Π του A.

Απόδειξη: Αρκεί τα σύνολα του Π$=\{[\alpha]: \alpha\in A\}$ να είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους να δίνει το Α.

- Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας $[\alpha]$ είναι μη κενές, αφού περιέχουν τουλάχιστον το στοιχείο α.
- Έστω $[\alpha]$ και $[\beta]$. Αν $[\alpha]\cap[\beta]\neq\emptyset$, υπάρχει c ώστε $c\in[\alpha]$ και $c\in[\beta]$. Άρα $(\alpha,c)\in R$ και $(c,\beta)\in R$. Αφού η R είναι μεταβατική $(\alpha,\beta)\in R$ και επειδή είναι συμμετρική $(\beta,\alpha)\in R$. Τώρα αν $d\in[\alpha]$, $(d,\alpha)\in$R και από τη μεταβατική ιδιότητα $(d,\beta)\in$R. Άρα $d\in[\beta]$, και συνεπώς $[\alpha]\subseteq[\beta]$. Ομοίως $[\beta]\subseteq[\alpha]$ και επομένως $[\alpha]=[\beta]$, που όμως δεν ισχύει. Άρα $[\alpha]\cap[\beta]=\emptyset$.
- Η $\bigcup\Pi=A$ ισχύει γιατί κάθε στοιχείο α του Α ανήκει σε κάποιο σύνολο του Π.

Κλάσεις ισοδυναμίας ΙΙΙ

- Μία αντίστοιχη διαμέριση μπορεί *πάντα* να κατασκευαστεί από μια σχέση ισοδυναμίας.
  Παράδειγμα: Αν R={(α,β):α,β έχουν ίδιους γονείς}, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι σύνολα με αδέρφια.
- Μια αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας μπορεί *πάντα* να κατασκευαστεί από μια διαμλεριση.
  Παράδειγμα: Αν Π η διαμέριση ενός συνόλου A , τότε η R={(α,β):α,β ανήκουν στο ίδιο σύνολο του Π} είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Άρα, υπάρχει ένας *φυσικός ισομορφισμός* ανάμεσα στα σύνολα

- των σχέσεων ισοδυναμίας στο σύνολο A
- των διαμερίσεων του A

Μερική διάταξη

Ορισμός 3 (Μερική διάταξη)

Μία σχέση που είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική ονομάζεται **μερική διάταξη**.

- Παράδειγμα: {(α,β): α πρόγονος του β} θεωρώντας και κάθε άτομο πρόγονο του εαυτού του
- Σε μια μερική διάταξη ένα στοιχείο α∈A είναι **ελάχιστο** αν: για κάθε ζεύγος (β,α)∈R ισχύει α=β.
  Παράδειγμα: Στη σχέση προγόνου μόνο ο Αδάμ και η Εύα είναι ελάχιστα στοιχεία.
- Πεπερασμένη μερική διάταξη: περιέχει τουλάχιστο ένα ελάχιστο στοιχείο
- Άπειρη μερική διάταξη: δεν περιέχει απαραίτητα ελάχιστο στοιχείο

Ολική διάταξη

Ορισμός 4 (Ολική διάταξη)

Μία μερική διάταξη R⊆A×A είναι και **ολική διάταξη** αν: για κάθε α, β∈A είτε (α, β)∈R ή (β, α)∈R.

- Αν η R δηλώνει τη σχέση προγόνου, δεν είναι ολική διάταξη, αφού δεν ορίζεται για κάθε ζεύγος στοιχείων (π.χ. τα αδέρφια δεν συνδέονται μεταξύ τους με τέτοια σχέση).
  - Δηλαδή ενώ (Ιακώβ,Ισαάκ)∈R και (Ιακώβ,Ισαύ)∈R δεν ισχύει κάποιο από τα (Ισαύ,Ισαάκ)∈R ή (Ισαάκ,Ισαύ)∈R
- Η σχέση «μικρότερος ή ίσος» για τους αριθμούς είναι ολική διάταξη.

Μονοπάτι

Ορισμός 5 (Μονοπάτι)

Μονοπάτι σε μία δυαδική σχέση R είναι μία ακολουθία $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ για κάποιο $n \geq 1$ έτσι ώστε $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in R$ για $i = 1, \ldots, n-1$.

Ένα τέτοιο μονοπάτι

- λέμε ότι είναι *από* το α_1 *στο* α_n
- έχει μήκος n
- ονομάζεται **κύκλος** αν τα α_i είναι όλα διαφορετικά και επίσης $(\alpha_n, \alpha_1) \in R$

Μέγεθος πεπερασμένου συνόλου

Ορισμός 6 (Μέγεθος συνόλου)

Το **μέγεθος** ενός πεπερασμένου συνόλου ισούται με τον αριθμό των στοιχείων που περιέχει.

- Αν $A \subseteq B$, τότε το μέγεθος του A είναι μικρότερο ή ίσο από το μέγεθος του B.
- Το μέγεθος του A είναι 0 αν και μόνο αν $A = \emptyset$

Μέγεθος άπειρου συνόλου

- Για σύνολα με άπειρα στοιχεία δεν είναι εύκολο να οριστεί το μέγεθος.
    - Παράδειγμα 1: Τα πολλαπλάσια του δύο $\{2,4,6,8,10,\ldots\}$
    - Παράδειγμα 2: Τα έτη μΧ $\{0, 1, \ldots, 2012, 2013, \ldots\}$
    - Ποιο άπειρο σύνολο έχει μεγαλύτερο μέγεθος;
- Θεωρείται ότι τα άπειρα σύνολα έχουν όλα το *ίδιο μέγεθος*.

Ισάριθμα σύνολα

Ορισμός 7 (Ισάριθμα σύνολα)

Δύο σύνολα A και B είναι **ισάριθμα** αν υπάρχει *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* f: A $\mapsto$ B

- Αν υπάρχει *αμφιμονοσήμαντη* f: A $\mapsto$ B, τότε υπάρχει και f^{-1}:B $\mapsto$ A και άρα η σχέση αυτή είναι και συμμετρική.
- Αποδεικνύεται ότι είναι και *σχέση ισοδυναμίας*.
  Παράδειγμα: Τα {8,ΙΑα,{0,β}} και {1,2,3} είναι ισάριθμα γιατί υπάρχει f ώστε f(8)=1, f(ΙΑα)=2, f({0,β})=3.

Πεπερασμένο σύνολο

Ορισμός 8 (Πεπερασμένο σύνολο)

Ένα σύνολο είναι **πεπερασμένο** αν είναι ισάριθμο με το $\{1, 2, \ldots, n\}$ για κάποιο φυσικό αριθμό n.

- Το $\emptyset$ ($n=0$) είναι πεπερασμένο σύνολο αφού είναι ισάριθμο με τον εαυτό του.
- Αν τα A και $\{1, \ldots, n\}$ είναι ισάριθμα, τότε λέμε ότι ο **πληθικός αριθμός** του A που συμβολίζεται με $|A|$ είναι n.

Άπειρο σύνολο

Ορισμός 9 (Άπειρο σύνολο)

Ένα σύνολο είναι άπειρο αν δεν είναι πεπερασμένο.

- Παράδειγμα: το σύνολο N των φυσικών
- Δεν είναι όλα τα άπειρα σύνολα ισάριθμα

Ορισμός 10 (Μετρήσιμα άπειρο σύνολο)

Ένα σύνολο λέγεται **μετρήσιμα άπειρο** αν είναι ισάριθμο του N

- Παράδειγμα: τα $\{1,2,3\ldots\}$ και $\{2,4,6,\ldots\}$ γιατί $1\leftrightarrow 2$, $2\leftrightarrow 4$, $3\leftrightarrow 6$ … $n \leftrightarrow 2n$

Ορισμός 11 (Μετρήσιμο σύνολο)

Ένα σύνολο λέγεται **μετρήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή μετρήσιμα άπειρο.

Απόδειξη μετρήσιμα άπειρου συνόλου

Τεχνική Απόδειξης: Μετρήσιμα άπειρο σύνολο

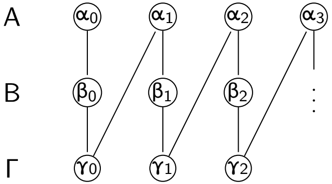
Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο A είναι μετρήσιμα άπειρο: Προτείνουμε έναν τρόπο ώστε το A να μπορεί να απαριθμηθεί ως $A=\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Μία τέτοια απαρίθμηση σημαίνει ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f: A \mapsto N$.

- Παράδειγμα: το $\{0,2,4,6,\ldots\}$ μπορεί να γραφτεί ως $\{\alpha_i : \alpha_i = 2i,\ i = 0, 1, \ldots, n\}$
- **Άσκηση**: Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένου αριθμού μετρήσιμα άπειρων συνόλων είναι μετρήσιμα άπειρο σύνολο. Επίσης, η ένωση μιας μετρήσιμα άπειρης συλλογής μετρήσιμα άπειρων συνόλων είναι μετρήσιμα άπειρο σύνολο.

Άσκηση απόδειξης

Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένου αριθμού μετρήσιμα άπειρων συνόλων είναι ένα μετρήσιμα άπειρο σύνολο.

- Αρκεί να εξηγήσουμε την απόδειξη για τρία, ξένα μεταξύ τους μετρήσιμα άπειρα σύνολα Α,Β,Γ
- Ισχύει $A=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\}$, $B=\{\beta_0,\beta_1,\ldots\}$, $\Gamma=\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots\}$ και $A\cup B\cup\Gamma=\{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\ldots\}$
- Η παράθεση αυτή της ένωσης μοιάζει με την επίσκεψη όλων των στοιχείων της με εναλλαγή στα διαφορετικά σύνολα



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014