ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 8: Πεπερασμένα Αυτόματα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1. Δομή και λειτουργία ΠΑ

2. Ντετερμινιστικό ΠΑ

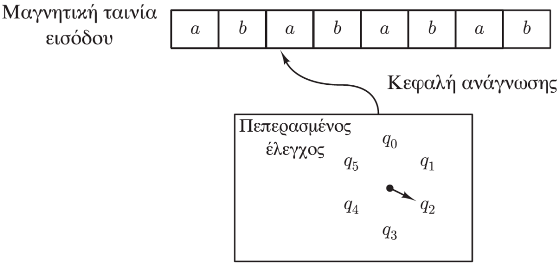
3. Διάγραμμα καταστάσεων - μεταβάσεων

Πεπερασμένο αυτόματο (1/2)

Ένα *πεπερασμένο αυτόματο* ή *μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων* είναι μια μηχανή αναγνώρισης γλώσσας

- έχει μία «κεντρική μονάδα επεξεργασίας» προκαθορισμένης και πεπερασμένης χωρητικότητας
- δέχεται ως είσοδο μία συμβολοσειρά τοποθετημένη πάνω σε μία μαγνητική ταινία
- παράγει ως έξοδο το αποτέλεσμα υπολογισμού για το αν η είσοδος είναι αποδεκτή από τη μηχανή

Πεπερασμένο αυτόματο (2/2)



Σχήμα : Το ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτομάτο (Πηγή: Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou: Elements of the Theory of Computation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981)

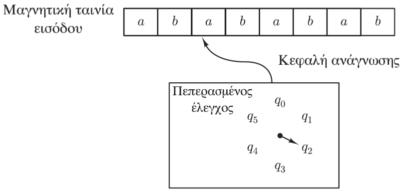
Η σημασία της επεξεργασίας του ΠΑ

- Το *πεπερασμένο αυτόματο* δε διαθέτει μνήμη για την εκτέλεση υπολογισμών.
  Σε τί χρησιμεύει ένας υπολογιστής χωρίς μνήμη;

  Στην πραγματικότητα έχει μνήμη με χωρητικότητα που καθορίζεται κατά τον ορισμό του.
- Ένα μοντέλο υπολογισμών με απεριόριστη μνήμη θεωρείται καταλληλότερο για την αναπαράσταση αλγορίθμων, αλλά παρόλα αυτά η μελέτη των ΠΑ είναι σημαντική.
- **Εφαρμογές** των πεπερασμένων αυτομάτων
  - Λεξική ανάλυση κατά τη μεταγλώττιση προγραμμάτων (αναγνωρίζονται οι συμβολοσειρές μιας γλώσσας)
  - Αναζήτηση μιας συμβολοσειράς μέσα σε μία άλλη

  ... κ.α.

Δομή ενός ΠΑ



Σχήμα : Το ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτομάτο [1]

- Στη **μαγνητική ταινία εισόδου** τοποθετείται η συμβολοσειρά εισόδου.
- Η **κεφαλή ανάγνωσης** αναγνωρίζει τα σύμβολα της ταινίας κινούμενη από το πρώτο σύμβολο προς τα δεξιά.
- Ο **πεπερασμένος έλεγχος** έχει ορισμένες **καταστάσεις**.
- Το ΠΑ βρίσκεται σε μία κατάσταση κάθε χρονική στιγμή. Αρχικά βρίσκεται στην **αρχική** και καταλήγει σε μία από τις **τελικές καταστάσεις)**

[1](Πηγή: Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou: Elements of the Theory of Computation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981)

Λειτουργία του ΠΑ

- Αρχικά, η *κεφαλή ανάγνωσης* είναι στην αριστερότερη θέση της ταινίας και ο έλεγχος είναι στην *αρχική κατάσταση*.
- Όσο υπάρχουν σύμβολα στην *ταινία εισόδου* που δεν έχουν αναγνωσθεί, η κεφαλή κινείται μία θέση προς τα δεξιά κάθε φορά και διαβάζει το επόμενο σύμβολο.
  - ο *πεπερασμένος έλεγχος* μεταβαίνει σε μία νέα κατάσταση που επιλέγεται με βάση την *τρέχουσα κατάσταση* και το σύμβολο που διαβάστηκε
  - η κεφαλή μετακινείται πάλι μία θέση δεξιά.
- Όταν η κεφαλή φτάσει στο τέλος, το ΠΑ
  - δέχεται τη συμβολοσειρά, αν ο έλεγχος βρίσκεται σε μία από τις *τελικές καταστάσεις* ή
  - απορρίπτει τη συμβολοσειρά σε κάθε άλλη περίπτωση

Το πεπερασμένο αυτόματο που οι μεταβάσεις του στην επόμενη κατάσταση προσδιορίζονται από την τρέχουσα κατάστασή του και ένα σύμβολο στην είσοδο, λέγεται **ντετερμινιστικό ΠΑ**.

Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο

Ορισμός 1 (Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο)

Ένα *ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο* ορίζεται ως μία πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο *καταστάσεων*
- Σ είναι ένα αλφάβητο
- $s \in K$ είναι η *αρχική κατάσταση*,
- $F \subseteq K$ είναι το σύνολο των *τελικών καταστάσεων* και
- $\delta : K \times \Sigma \mapsto K$ μία *συνάρτηση μετάβασης*

- Η **γλώσσα** που δέχεται ένα ντεντερμινιστικό ΠΑ δίνεται από το σύνολο των αποδεκτών συμβολοσειρών.

Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο

- Ως *συνολική κατάσταση* της μηχανής ορίζουμε τη θέση της σε μία χρονική στιγμή, δηλ. την εσωτερική κατάσταση του πεπερασμένου ελέγχου και τη θέση της κεφ. ανάγνωσης. Σε ένα ντεντερμινιστικό ΠΑ $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ κάθε συνολική κατάσταση είναι στοιχείο του $K \times \Sigma^*$.
- Ο υπολογισμός που εκτελεί ένα ΠΑ δίνεται ως ακολουθία συνολικών καταστάσεων.
- Αν $(r, z), (r', z')$ είναι δύο συνολικές καταστάσεις του M, τότε η (r, z) παράγει την (r', z') σε ένα βήμα και αυτό γράφεται ως

$$(r, z) \models_M (r', z')$$

αν και μόνο αν $z = \sigma z'$ για κάποιο σύμβολο $\sigma \in \Sigma$ και $\delta(r, \sigma) = r'$.

Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο

- Συμβολίζουμε με $\models_M^*$ την ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα της $\models_M$. Η σχέση

$$(r, z) \models_M^* (r', z') \tag{1}$$

διαβάζεται ως: *η (r, w) παράγει την (r', z') μετά από 0 ή περισσότερα βήματα.*

- Μία συμβολοσειρά $z \in \Sigma^*$ λέμε ότι γίνεται δεκτή από το M αν και μόνο αν υπάρχει κατάσταση $r \in F$, έτσι ώστε $(s, z) \models_M^* (r, e)$.
- Η **γλώσσα** που γίνεται δεκτή από το M, συμβολίζεται με $L(M)$ και αποτελείται από το σύνολο των συμβολοσειρών που δέχεται το M.

Παράδειγμα

Έστω το ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M, όπου

$$K = \{q_0, q_1\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0\}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0

- Το M αλλάζει κατάσταση όταν διαβάζει 1 (από q_0 στην q_1 και αντίστροφα) ενώ αγνοεί (δεν αλλάζει κατάσταση) τα 0.
- Για άρτιο αριθμό από 1, επανέρχεται στην q_0, άρα η $L(M)$ αποτελείται από τις συμβολοσειρές του $\{0,1\}^*$ με άρτιο αριθμό 0.
- Αν στο M δοθεί η είσοδος 0110.
  - Ισχύει $(q_0, 0110) \models_M (q_0, 110) \models_M (q_1, 10) \models_M (q_0, 0) \models_M (q_0, e)$
  - δηλαδή $(q_0, 0110) \models_M^* (q_0, e)$ και η συμβ/σειρά γίνεται δεκτή.

Διάγραμμα καταστάσεων - μεταβάσεων

Ορισμός 2 (Διάγραμμα καταστάσεων - μεταβάσεων)

Διάγραμμα καταστάσεων - μεταβάσεων είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με επιγραφές στα τόξα (μεταβάσεις) που συνδέουν τους κόμβους (καταστάσεις).

- Η συνάρτηση μετάβασης για ένα ΠΑ δίνεται από ένα διάγραμμα καταστάσεων - μεταβάσεων, όπου κάθε $\delta(q, a) = q'$ αναπαριστάται από ένα **τόξο** με επιγραφή a από τον κόμβο q στον κόμβο q'.
- Οι τελικές καταστάσεις σημειώνονται με διπλό περίγραμμα και η αρχική με ένα $>$ ή $\rightarrow$

Παράδειγμα 1

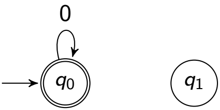
$$K = \{q_0, q_1\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0\}$$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$

Παράδειγμα 1

$$K = \{q_0, q_1\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0\}$$

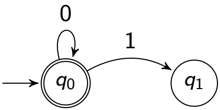
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0



Παράδειγμα 1

$$K = \{q_0, q_1\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0\}$$

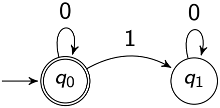
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1



Παράδειγμα 1

$$K = \{q_0, q_1\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0\}$$

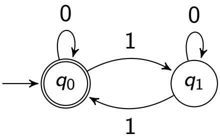
q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1



Παράδειγμα 1

$K = \{q_0, q_1\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0



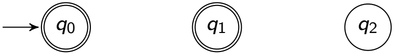
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0, q_1, q_2\}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$



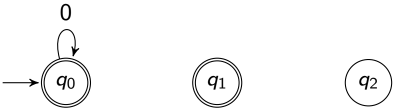
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0, q_1, q_2\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	0	q_0



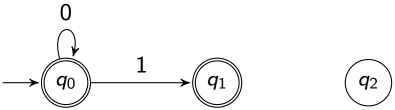
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$s = q_0$$
$$F = \{q_0, q_1, q_2\}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1



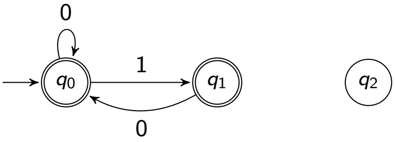
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0, q_1, q_2\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_0



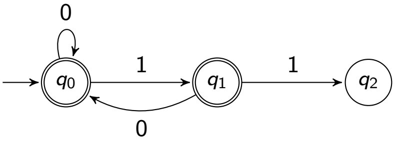
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0, q_1, q_2\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_0
q_1	1	q_2



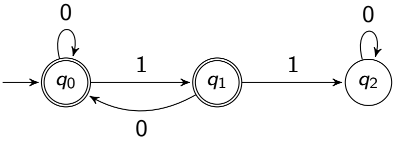
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0, q_1, q_2\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_0
q_1	1	q_2
q_2	0	q_2



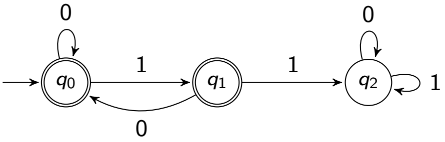
Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστεί το M για την

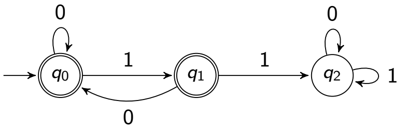
$$L(M) = \{\omega : \omega \in \{0,1\}^* : \omega \text{ δεν έχει δύο συνεχόμενα } 1\}$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0, q_1, q_2\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_0
q_1	1	q_2
q_2	0	q_2
q_2	1	q_2



Παράδειγμα 2 (Συνέχεια)



- Όσο δεν έχουν διαβαστεί δύο συνεχόμενα 1 βρίσκεται σε μία από τις τελικές καταστάσεις q_i έχοντας διαβάσει i συνεχόμενα 1.
- Όταν διαβάζει ένα 0 μεταβαίνει στην q_0
- Μετά από δύο συνεχόμενα 1 θα βρεθεί στην q_2 που δεν είναι τελική κατάσταση.
- Η q_3 ονομάζεται κατάσταση *καταβόθρα* γιατί όταν προσεγγίζεται ο υπολογισμός εγκλωβίζεται σ' αυτήν ανεξάρτητα από το υπόλοιπο της συμβολοσειράς.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014