ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 10: Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και μη ντετερμινιστικών αυτομάτων

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Μη ντεντερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- Δύο πεπερασμένα αυτόματα M1 και M2(ντεντερμινιστικά ή μη)είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $L(M_1) = L(M_2)$.

Θεώρημα 1

Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο υπάρχει ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

Η απόδειξη επιδεικνύει την κατασκευή ενός μη ντετερμινιστικού αυτόματου από ντετερμινιστικό.

Μη ντεντερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:
  Ένα μη ντεντερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο θεωρούμε ότι βρίσκεται κάθε στιγμή σε ένα σύνολο από καταστάσεις και πιο συγκεκριμένα, *σε όλες τις καταστάσεις που μπορεί να οδηγηθεί* με την είσοδο που έχει διαβαστεί ως εκείνη τη στιγμή.
  - Για παράδειγμα, αν το M έχει πέντε καταστάσεις $\{q0, ..., q4\}$ και μετά την ανάγνωση μιας συγκεκριμένης συμβολοσειράς εισόδου, θα μπορούσε να βρίσκεται στην κατάσταση $q0, q2$ ή $q3$ η κατάστασή του θα είναι το σύνολο $\{q0, q2, q3\}$.
  - Αν το επόμενο σύμβολο της εισόδου θα μπορούσε να οδηγήσει το M από την $q0$ σε μία από τις $q1, q2$, από την $q2$ στην $q0$ και από την $q3$ στην $q2$, τότε η επόμενη κατάσταση του M θα είναι το σύνολο $\{q0, q1, q2\}$.

Μη ντεντερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- Το σύνολο των καταστάσεων του ντεντερμινιστικού αυτόματου $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ θα είναι το 2K όπου K το σύνολο καταστάσεων του μη ντεντερμινιστικού πεπερασμένου αυτόματου.
- Το σύνολο των τελικών καταστάσεων του M θα αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του K που περιέχουν μία τουλάχιστο τελική κατάσταση του M.

Συνάρτηση μετάβασης

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ:

- Μία κίνηση του M όταν αυτό διαβάζει ένα σύμβολο εισόδου $\alpha \in \Sigma$, μιμείται την κίνηση του M με σύμβολο εισόδου α, πιθανώς ακολουθούμενη από κάποιο αριθμό κενών μεταβάσεων του M.
- Ορίζουμε με $E(q)$ το σύνολο όλων των καταστάσεων του M που είναι προσβάσιμες από την κατάσταση χωρίς να διαβαστεί κανένα σύμβολο στην είσοδο.

$$E(q) = \{p \in K : (q, e) \vdash_M^* (p, e)\} \tag{1}$$

δηλαδή το $E(q)$ είναι η κλειστότητα του συνόλου $\{q\}$ ως προς τη σχέση

$$\{(p, r) : \text{υπάρχει μετάβαση}(p, e, r) \in \Delta\} \tag{2}$$

Αλγόριθμος υπολογισμού των $E(q)$

Αρχικά θέτουμε $E(q) := \{q\}$
while υπάρχει μετάβαση $(p, e, r) \in \Delta$ με $p \in E(q)$
και $r \notin E(q)$
    do $E(q) := E(q) \cup \{r\}$

Κατασκευή ισοδύναμου ΝΠΑ

- Η κατασκευή του ντετερμινιστικού M′:
  - K′=2^K(δε χρειάζεται να υπολογιστούν όλα τα υποσύνολα)
  - $s' = E(s)$
  - $F' = \{Q \subseteq K : Q \cap F \neq \emptyset\}$
  - για κάθε $Q \subseteq K$ και κάθε σύμβολο $\alpha \in \Sigma$, ορίζουμε $\delta'(Q, \alpha) = \cup\{E(p) : p \in K$ και $(q, \alpha, p) \in \Delta$ για κάποιο $q \in Q\}$
- Το παραπάνω αυτόματο
  - είναι ντεντερμινιστικό (δ′ μονοσήμαντη και καλά ορισμένη)
  - είναι ισοδύναμο με το M(απόδειξη συνεχίζεται...)

Μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- ΘΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ ΟΤΙ ΙΣΧΥΕΙ:
  για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ και οποιεσδήποτε καταστάσεις $q, r \in K$

  $$(q, w) \vdash_M^* (p, e) \text{ αν και μόνο αν } (E(q), w) \vdash_M^* (P, e) \qquad (3)$$

  για κάποιο σύνολο P που περιέχει την κατάσταση p
- Έστω μία συμβολοσειρά $w \in L(M)$ δηλαδή $(s, w) \vdash_M^* (f, e)$, για κάποια $f \in F$
  αυτό όμως θα ισχύει σύμφωνα με την παραπάνω αν και μόνο αν $(E(s), w) \vdash_M^* (Q, e)$ για ένα Q που περιέχει την f,
  δηλαδή ανν $(s', w) \vdash_M^* (Q, e)$ για κάποιο $Q \in F'$,
  δλδ ανν $w \in L(M')$

Μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- Ο ισχυρισμός

$$(q, w) \vdash_M^* (p, e) \text{ αν και μόνο αν } (E(q), w) \vdash_M^* (P, e) \qquad (4)$$

  αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς την $|w|$
- Βασικό βήμα:
  Για $|w| = 0$, δηλαδή για $w = e$ πρέπει να δείξουμε ότι $(q, e) \vdash_M^* (p, e)$ αν και μόνο αν $(E(q), w) \vdash_M^* (P, e)$, για κάποιο σύνολο P που περιέχει την p.
  Από την πρώτη φαίνεται ότι $p \in E(q)$
  από τη δεύτερη και εφόσον το M′ είναι ντεντερμινιστικό ισχύει $P = E(q)$ και το P περιέχει την p, άρα $p \in E(q)$;
  ΑΠΟΔΕΙΧΘΗΚΕ
- Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλες τις συμβολοσειρές w μήκους k ή μικρότερο, για κάποιο $k \geq 0$
- Θα πρέπει να αποδειχθεί ο ισχυρισμός για κάθε συμβολοσειρά w μήκους $k + 1$. Έστω $w = va$, όπου $a \in \Sigma$

Μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ «ΜΟΝΟ ΑΝ»
  έστω $(q, w) \vdash_M^* (p, e)$
  υπάρχουν r_1 και r_2 τέτοιες ώστε

$$(q, w) \vdash_M^* (r_1, \alpha) \vdash_M (r_2, e) \vdash_M^* (p, e) \tag{5}$$

- εφόσον $(q, v\alpha) \vdash_M^* (r_1, \alpha)$, τότε $(q, v) \vdash_M^* (r_1, e)$ και εφόσον $|v| = k$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ισχύει ότι $(E(q), v) \vdash_M^* (R_1, e)$ για κάποιο σύνολο R_1 που περιέχει την r_1
- από τη σχέση (5) υπάρχει τριάδα $(r_1, \alpha, r_2) \in \Delta$ και συνεπώς από κατασκευής του M′ θα είναι $E(r_2) \subseteq \delta'(R_1, \alpha)$
- πάλι από τη σχέση (5), αφού $(r_2, e) \vdash_M^* (p, e)$, σχύει ότι $p \in E(r_2)$ και έτσι $p \in \delta'(R_1, \alpha)$
- συνεπώς $(R_1, \alpha) \vdash_M^* (P, e)$ για κάποιο P που περιέχει την p και επομένως $(E(q), v\alpha) \vdash_M^* (R_1, \alpha) \vdash_M (P, e)$- ΑΠΟΔΕΙΧΘΗΚΕ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014