ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 11: Κλειστότητα, ΠΑ & καν. εκφράσεις

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

1. Θεώρημα κλειστότητας
2. Κανονικές γλώσσες και ΠΑ
3. Παραδείγματα

Θεώρημα κλειστότητας

Θεώρημα 1 (Θεώρημα κλειστότητας)

Η κλάση των γλωσσών που γίνονται δεκτές από ΠΑ είναι κλειστή ως προς την:

1. *Ένωση*
2. *Παράθεση*
3. *Kleene star*
4. *Συμπλήρωση*
5. *Τομή*

Θεώρημα κλειστότητας

Θεώρημα 1 (Θεώρημα κλειστότητας)

Η κλάση των γλωσσών που γίνονται δεκτές από ΠΑ είναι κλειστή ως προς την:

1. *Ένωση*
2. *Παράθεση*
3. *Kleene star*
4. *Συμπλήρωση*
5. *Τομή*

Απόδειξη. Δοθέντων δύο αυτομάτων $M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ και $M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ κατασκευάζουμε ένα αυτόματο M, που θα δέχεται τη γλώσσα που προκύπτει από την εφαρμογή της κάθε πράξης στις $L(M_1)$ και $L(M_2)$.

Κλειστότητα ως προς την ένωση κανονικών γλωσσών

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε ένα μη ντεντερμινιστικό ΠΑ M τέτοιο ώστε $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$. Το M

- με *μη ντετερμινισμό «επιλέγει»* αν η είσοδος είναι συμβολοσειρά της $L(M_1)$ ή της $L(M_2)$ και
- την επεξεργάζεται σύμφωνα με τη σχέση μετάβασης του αντίστοιχου αυτόματου.

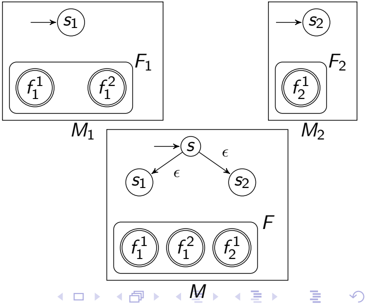
$K = K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$

$F = F_1 \cup F_2$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s_2)\}$

$(s, w) \vdash_M^* (q, \epsilon)$ για $q \in F$ ανν

- $(s_1, w) \vdash_{M_1}^* (q, \epsilon)$ με $q \in F_1$ ή
- $(s_2, w) \vdash_{M_2}^* (q, \epsilon)$ με $q \in F_2$



Κλειστότητα ως προς την παράθεση κανονικών γλωσσών

Κατασκευάζουμε ένα μη ντεντερμινιστικό ΠΑ M τέτοιο ώστε $L(M) = L(M_1)L(M_2)$. Το M

- προσομοιώνει το M_1 μέχρι να μεταβεί σε μία τελική κατάσταση του
- στη συνέχεια προσομοιώνει το M_2 συνδέοντας τις τελικές καταστάσεις του M_1 με την αρχική του κατάσταση

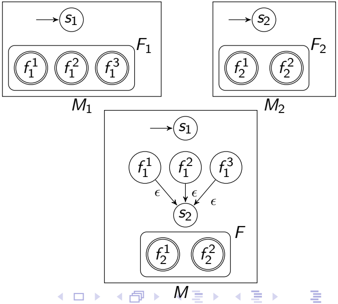
$K = K_1 \cup K_2$

$F = F_2$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_1^1, \epsilon, s_2), (f_1^2, \epsilon, s_2), (f_1^3, \epsilon, s_2)\}$

$(s, w) \vdash_M^* (q, \epsilon)$ για $q \in F$ ανν

- $w = w_1 w_2$ και
- $(s_1, w_1) \vdash_{M1}^* (q', \epsilon)$ με $q' \in F_1$
- $(q', w_2) \vdash_{M2}^* (q, \epsilon)$ με $q \in F_2$



Κλειστότητα ως προς την Kleene star κανονικής γλώσσας

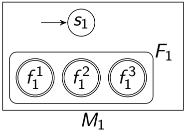
Κατασκευάζουμε μη ντεντερμινιστικό ΠΑ M, τέτοιο ώστε $L(M) = L(M_1)^*$. Το M

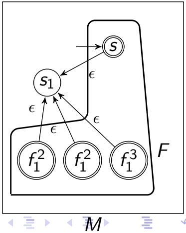
- έχει όλες τις τελικές καταστάσεις του M_1.
- έχει μια νέα αρχική κατάσταση s που είναι και τελική (για να γίνεται δεκτή η ϵ).
- έχει ϵ-μεταβάσεις από κάθε τελική κατάσταση του M_1 στην αρχική του M_1 (ο υπολογισμός μπορεί να επαναλαμβάνεται μετά την ανάγνωση συμβολοσειράς της $L(M_1)$).

$$K = K_1 \cup \{s\}$$

$$F = F_1 \cup \{s\}$$

$$\Delta = \Delta_1 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (f_1^1, \epsilon, s_1), (f_1^2, \epsilon, s_1), (f_1^3, \epsilon, s_1)\}$$





Κλειστότητα για συμπλήρωμα και τομή με καν. γλώσσα

Συμπλήρωμα Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ ένα ντεντερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο. Τότε το συμπλήρωμα της γλώσσας $\overline{L} = \Sigma^* - L(M)$ γίνεται δεκτό από το ΠΑ $(K, \Sigma, \delta, s, K - F)$

Τομή Προκύπτει από το γεγονός ότι ισχύει η

$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$$

Έτσι, η κλειστότητα ως προς την τομή προκύπτει από την κλειστότητα ως προς την ένωση και το συμπλήρωμα.

Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

Απόδειξη. Μόνο αν.

- Το κενό και τα μονομελή σύνολα γίνονται δεκτά από ΠΑ.

βήμα 1: $a; b$

Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

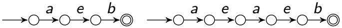
Απόδειξη. Μόνο αν.

- Το κενό και τα μονομελή σύνολα γίνονται δεκτά από ΠΑ.

  βήμα 1: $a; b$

- Οι γλώσσες των ΠΑ είναι κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση, Kleene star [Θεώρημα 1]. Άρα κάθε κανονική γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα ΠΑ.

  βήμα 2: $ab; aab$



Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

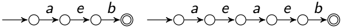
Απόδειξη. Μόνο αν.

- Το κενό και τα μονομελή σύνολα γίνονται δεκτά από ΠΑ.

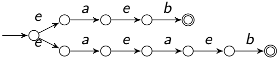
βήμα 1: a; b

- Οι γλώσσες των ΠΑ είναι κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση, Kleene star [Θεώρημα 1]. Άρα κάθε κανονική γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα ΠΑ.

βήμα 2: ab; aab



βήμα 3: $ab \cup aab$



Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

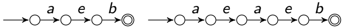
Απόδειξη. Μόνο αν.

- Το κενό και τα μονομελή σύνολα γίνονται δεκτά από ΠΑ.

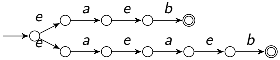
  βήμα 1: $a; b$

- Οι γλώσσες των ΠΑ είναι κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση, Kleene star [Θεώρημα 1]. Άρα κάθε κανονική γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα ΠΑ.

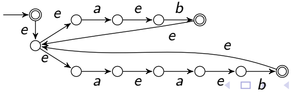
  βήμα 2: $ab; aab$



  βήμα 3: $ab \cup aab$



  βήμα 4: $(ab \cup aab)^*$



Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Απόδειξη. Αν.

- Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ ένα ΠΑ. Κατασκευάζουμε μια κανονική έκφραση R τέτοια ώστε $L(R) = L(M)$
- Αναπαριστούμε την $L(M)$ ως ένωση ενός πεπερασμένου συνόλου απλών γλωσσών.
  - Έστω $K = \{q_1, .., q_n\}$ και $s = q_1$.
  - Για $i, j = 1, ..., n$ και $k = 0, ..., n$ ορίζουμε $R(i, j, k)$ το σύνολο των συμβολοσειρών του Σ^* που οδηγούν από την q_i στην q_j χωρίς να περάσουν από κατάσταση με δείκτη μεγαλύτερο του k.
  - Αν $k = n$, τότε $R(i, j, n) = \{w \in \Sigma^* : (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, e)\}$ και άρα $L(M) = \bigcup\{R(1, j, n) : q_j \in F\}$
- Όπως όλα τα $R(i, j, k)$, έτσι συνάγεται ότι και η $L(M)$ είναι κανονική.

Απόδειξη θεωρήματος κανονικών γλωσσών

Κάθε $R(i,j,k)$ είναι κανονικό.

Απόδειξη. με επαγωγή ως προς το k

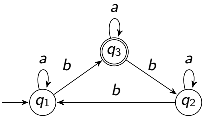
- Για $k = 0$, το $R(i,j,k)$ είναι είτε
  - $\{a \in \Sigma \cup \{e\} : (q_i, a, q_j) \in \Delta\}$ αν $i \neq j$ ή
  - $\{e\} \cup \{a \in \Sigma \cup \{e\} : (q_i, a, q_j) \in \Delta\}$ αν $i = j$.
  - Καθένα από τα σύνολα αυτά είναι πεπερασμένο και συνεπώς κανονικό.
- Υποθέτουμε ότι τα $R(i,j,k)$ για κάθε i,j έχουν οριστεί ως κανονικές γλώσσες για όλα τα i,j.
  - Τότε κάθε σύνολο $R(i,j,k)$ μπορεί να οριστεί συνδυάζοντας τις κανονικές γλώσσες που ορίσαμε μέσω των κανονικών πράξεων της ένωσης, της Kleene star και της παράθεσης:

$$R(i,j,k) = R(i,j,k-1) \cup R(i,k,k-1)R(k,k,k-1)^* R(k,j,k-1)$$

- Συνεπώς, η γλώσσα $R(i,j,k)$ είναι κανονική για όλα τα i,j,k και έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγή.

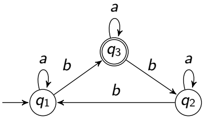
Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί κανονική έκφραση για τη γλώσσα που δέχεται το ΠΑ: $\{w \in \{a, b\}^*$:η w έχει $3k+1$ χαρακτήρες b για κάποιο$k \in N\}$



Παράδειγμα

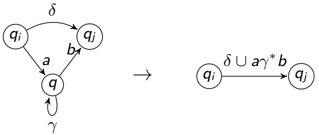
Να κατασκευαστεί κανονική έκφραση για τη γλώσσα που δέχεται το ΠΑ: $\{w \in \{a, b\}^*$:η w έχει $3k + 1$ χαρακτήρες b για κάποιο$k \in N\}$



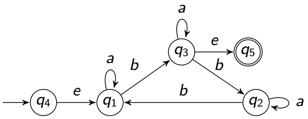
- Κατασκευάζουμε ένα μη ντεντερμινιστικό αυτόματο M που έχει τις ιδιότητες:
  - Μία μοναδική τελική κατάσταση, δηλ. $F = \{f\}$
  - Αν $(q, u, p) \in \Delta$, τότε $q \neq f$ και $p \neq s$
- Επίσης, αριθμούμε τις καταστάσεις του αυτόματου $q_1, q_2, ..., q_n$ όπως απαιτείται από την κατασκευή, έτσι ώστε $s = q_{n-1}$ και $f = q_n$.
- Η ζητούμενη κανονική έκφραση θα δίνεται από την $R(n-1, n, n)$

Παράδειγμα

- Υπολογίζουμε πρώτα τις $R(i,j,0)$, από αυτές τις $R(i,j,1)$ κλπ. Σε κάθε βήμα αναπαριστούμε κάθε $R(i,j,k)$ με μια ακμή από την q_i στην q_j, απαλείφοντας την κατάσταση q_k.
- Κατά την απαλειφή μιας q

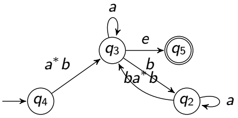


- Ξεκινάμε με τις $R(i,j,0)$

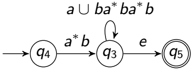


Παράδειγμα

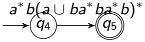
- Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις $R(i,j,1)$.
  - Απαλείφεται η q_1 γιατί όσες συμβολοσειρές δέχεται το M και παιρνούν από αυτήν είναι στις $R(i,j,1)$



- Απαλείφουμε την q_2 για να πάρουμε τις $R(i,j,2)$



- Απαλείφουμε την q_3 για να πάρουμε τις $R(i,j,3)$



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014