



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 14: Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



- 1 Αναγνωριστές & παραγωγοί γλωσσών
 - Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα ως Παραγωγοί Γλωσσών
 - Παραδείγματα

- 2 Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα
 - Τυπικός Ορισμός
 - Παραγωγή Γλωσσών
 - Παράδειγμα παραγωγής γλώσσας

Αναγνωριστές και παραγωγοί γλωσσών

- Μηχανές όπως τα πεπερασμένα αυτόματα, που με συστηματικό τρόπο αναγνωρίζουν αν οι συμβολοσειρές εισόδου υπακούουν στους κανόνες μιας γλώσσας ονομάζονται **αναγνωριστές γλώσσας**.
 - Παράδειγμα: Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μηχανή που να αναγνωρίζει αν μία πρόταση συμμορφώνεται στους κανόνες σύνταξης μιας γλώσσας.
- Ένα πρότυπο, όπως η κανονική έκφραση ή ένα σύνολο κανόνων που παράγει τις συμβολοσειρές μιας γλώσσας ονομάζεται **παραγωγός γλώσσας**.
 - Η παραγωγή ξεκινά από μία συμβολοσειρά «εκκίνησης» και εξελίσσεται όχι εντελώς καθορισμένα, αλλά με βάση κάποιους περιορισμούς (πρότυπο ή κανόνες)
 - Η γλώσσα που αναπαριστά ένας παραγωγός είναι το σύνολο των παραγόμενων συμβολοσειρών.

Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα ως Παραγωγοί Γλωσσών

Οι Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

- είναι παραγωγοί γλωσσών με πιο σύνθετη δομή από τις κανονικές γλώσσες
- μπορούν να περιγράψουν εμφωλευμένες δομές, όπως τα ζεύγη παρενθέσεων στις γλώσσες προγραμματισμού
- έχουν περισσότερες εκφραστικές δυνατότητες από τις κανονικές εκφράσεις και τα πεπερασμένα αυτόματα, αν και δεν είναι αρκετά εκφραστικές για την περιγραφή όλων των γλωσσών με θεωρητικό και υπολογιστικό ενδιαφέρον

Παράδειγμα (1/3)

Εξετάζουμε τη γλώσσα που παράγεται από την $a(a^* \cup b^*)b$

- Κάθε συμβολοσειρά αποτελείται από (i)ένα αρχικό a , (ii) ένα μεσαίο τμήμα $(a^* \cup b^*)$ και (iii) ένα τελικό b
- Αν συμβολίσουμε με S μια «συμβολοσειρά της γλώσσας» και με M το μεσαίο τμήμα, τότε ισχύει ο **κανόνας**:

$$S \rightarrow aMb$$

όπου το \rightarrow διαβάζεται «μπορεί να είναι»

- Το M μπορεί να είναι είτε μια συμβολοσειρά από a , έστω A , είτε μια συμβολοσειρά από b έστω B

$$M \rightarrow A; M \rightarrow B$$

όπου γίνεται πρόσθεση των κανόνων

Παράδειγμα (2/3)

- Η A ή είναι κενή ή περιέχει ένα ή περισσότερα a . Ομοίως και η B , που όμως αποτελείται από b .

$$A \rightarrow \epsilon; A \rightarrow aA$$

$$B \rightarrow \epsilon; B \rightarrow bB$$

Παραγωγή συμβολοσειρών γλώσσας

- Εκκίνηση με συμβολοσειρά που περιέχει μόνο το σύμβολο S .
 - Βρίσκουμε ένα σύμβολο που εμφανίζεται σε κανόνα της γραμματικής στα αριστερά του \rightarrow .
 - Αντικαθιστούμε την εμφάνιση του συμβόλου στη συμβολοσειρά με τα σύμβολα του κανόνα στα δεξιά του \rightarrow .
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να απαλειφτούν όλα τα σύμβολα που εμφανίζονται σε κάποιον κανόνα της γραμματικής στα αριστερά του \rightarrow .

Παράδειγμα (3/3)

Για να παράγουμε τη συμβολοσειρά $aaab$

- Ξεκινάμε από το S
- Αντικαθιστούμε το S με την aMb (από $S \rightarrow aMb$)
- Αντικαθιστούμε το M με A (από $M \rightarrow A$) και προκύπτει aAb
- Αντικαθιστούμε το A με aA (από $A \rightarrow aA$) και προκύπτει $aaAb$
- Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο βήμα προκύπτει $aaaAb$
- Αντικαθιστούμε το A με ϵ (από $A \rightarrow \epsilon$) και προκύπτει $aaab$
- Στην $aaaAb$ δε μπορούμε να βρούμε κάποιο σύμβολο που να είναι στα αριστερά κάποιου κανόνα, άρα τελειώνει η παραγωγή.

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

- Μία Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα:
 - Έχει κανόνες όπως ο $A \rightarrow aA$, που εκφράζει ότι το A μπορεί να αντικατασταθεί με το aA **ανεξάρτητα από τα συμφραζόμενά** του, δηλαδή τις συμβολοσειρές που το περιβάλλουν.
 - Χρησιμοποιεί μεταβλητές, δηλ. σύμβολα που αναπαριστούν σύνολα συμβολοσειρών.
 - Ορίζει τα σύμβολα-μεταβλητές μέσω κανόνων «παραγωγής» με όρους άλλων μεταβλητών, κατάλληλων για επαναληπτική εφαρμογή στην παραγωγή συμβολοσειρών.
 - Χρησιμοποιεί στους κανόνες μόνο την πράξη της παραθέσης.
 - Μπορεί να διαθέτει για ένα σύμβολο-μεταβλητή εναλλακτικούς κανόνες, δηλ. γίνεται και χρήση της ένωσης.

Ορισμός Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

Ορισμός 1 (Ορισμός 1 (Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα))

Μία **γραμματική χωρίς συμφραζόμενα** G ορίζεται ως μια τετράδα (V, Σ, R, S) , όπου

- V ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων, που λέγεται αλφάβητο
- Σ ένα υποσύνολο του V , που λέγεται σύνολο **τερματικών**
- R ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(V - \Sigma) \times V^*$, που ορίζει τους **κανόνες παραγωγής**
- S είναι ένα στοιχείο του $V - \Sigma$, που λέγεται αρχή της G

- Τα στοιχεία του $V - \Sigma$ ονομάζονται **μη τερματικά** σύμβολα:
- Για όλα τα $A \in V - \Sigma$ και για $u \in V^*$, γράφουμε $A \rightarrow_G u$ αν $(A, u) \in R$.

Παραγωγή Γλωσσών

- Για όλες τις $u, v \in V^*$ γράφουμε $u \Rightarrow_G v$ αν υπάρχουν $x, y \in V^*$ και $A \in V - \Sigma$ έτσι ώστε $u = xAy, v = xv'y$ και $A \rightarrow_G v'$.
- Η \Rightarrow_G^* είναι η ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα της \Rightarrow_G .
- Η γλώσσα $L(G)$ που παράγεται από την G είναι $\{w \in \Sigma^* : \Sigma \Rightarrow_G^* w\}$
 - Η G λέμε ότι **παράγει** κάθε συμβολοσειρά της $L(G)$.
- Μια γλώσσα L είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αν δίνεται ως $L(G)$ για κάποια γραμματική G χωρίς συμφραζόμενα.

Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα

- Κάθε ακολουθία της μορφής $w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow_G w_n$ με $w_n \in \Sigma^*$, $w_0 = S$ και $w_i \in V^*$ για $i \neq n$
 - ονομάζεται παραγωγή της w_n από την w_0 στην G
 - έχει μήκος παραγωγής n , όπου $n \geq 0$
 - λέμε ότι είναι παραγωγή n βημάτων

Παράδειγμα

- Θεωρήστε τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα $G = (V, \Sigma, R, S)$, όπου $V = \{S, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ και το R αποτελείται από $S \rightarrow aSb$ και $S \rightarrow \epsilon$
 - Μια πιθανή παραγωγή είναι η $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$
 - Στα δύο πρώτα βήματα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας $S \Rightarrow aSb$ και στο τελευταίο ο $S \Rightarrow \epsilon$
 - Η γλώσσα της γραμματικής είναι η $L(G) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, που όπως είναι γνωστό δεν είναι κανονική.
 - Άρα υπάρχουν γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα, που δεν είναι κανονικές.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014