ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 19: Ντετερμινιστικές ΓΧΣ - Μηχανές Turing

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ντετερμινιστικές ΓΧΣ

Ντετερμινιστικά ΑΣ

Μπορούμε να κάνουμε τα Αυτόματα Στοίβας να λειτουργούν ντετερμινιστικά σε όλες τις περιπτώσεις όπως τα Πεπερασμένα Αυτόματα (βλ. ισοδυναμία μη ντετερμινιστικής & ντετερμινιστικής αναπαράστασης);

- Η απάντηση στο ερώτημα καθορίζει το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα στην κατασκευή αλγορίθμων.
- Οι αλγόριθμοι επεξεργασίας γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα έχουν εφαρμογές στη μεταγλώττιση γλωσσών προγραμματισμού και άλλων τεχνητών γλωσσών (π.χ. HTML).
- Επικεντρωνόμαστε στα ντετερμινιστικά ΑΣ και θα δούμε ότι υπάρχουν γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα που δε μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα ντετερμινιστικό ΑΣ.

Ντετερμινιστικά ΑΣ

Ορισμός 1 (Συμβατές μεταβάσεις σε ΑΣ)

Δύο συμβολοσειρές είναι σύμφωνες αν η πρώτη είναι πρόθεμα της δεύτερης ή αν συμβαίνει το αντίστροφο. Δύο μεταβάσεις $((p, \alpha, \beta), (q, \gamma))$ και $((p, \alpha', \beta'), (q', \gamma'))$ σε ένα ΑΣ είναι συμβατές, αν οι α και α' είναι σύμφωνες και οι β και β' είναι επίσης σύμφωνες.

Ορισμός 2 (Ντετερμινιστικό ΑΣ)

Ένα ΑΣ M είναι ντετερμινιστικό αν δεν έχει δύο διαφορετικές συμβατές μεταβάσεις.

- Σε ένα ντετερμινιστικό ΑΣ για κάθε συνολική κατάσταση υπάρχει το πολύ μία επόμενη συνολική κατάσταση κατά τη διάρκεια ενός υπολογισμού του.
  - Ντετερμινιστικό ΑΣ: η μηχανή του Παραδείγματος ΑΣ1 στη ΘΓΑ 15 για τη γλώσσα $\{wcw^R : w \in \{\alpha, b\}^*\}$
  - Μη ντετερμινιστικό ΑΣ: η μηχανή του Παραδείγματος ΑΣ2 στη ΘΓΑ 15 για τη γλώσσα $\{ww^R : w \in \{\alpha, b\}^*\}$

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

- Θεωρούμε το \$ ως ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο Σ και σηματοδοτεί το τέλος των συμβολοσειρών.

Ορισμός 3 (Ντετερμινιστική Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα)

Ονομάζουμε μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ ντετερμινιστική χωρίς συμφραζόμενα αν $L\$ = L(M)$ για κάποιο ντετερμινιστικό ΑΣ M.

Θεώρημα 1

Κάθε ντετερμινιστική γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα είναι μία γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Απόδειξη

Αν ένα ντετερμινιστικό ΑΣ M δέχεται τη γλώσσα $L\$$, τότε μπορεί να κατασκευαστεί κάποιο άλλο μη ντετερμινιστικό ΑΣ M' που να δέχεται τη γλώσσα L. Κάθε στιγμή, το M' μπορεί συνυπολογίζει και την ενδεχόμενη εμφάνιση \$ στην είσοδο που θα το οδηγεί σε ένα νέο σύνολο καταστάσεων στις οποίες δεν καταναλώνει καθόλου επιπλέον είσοδο.

Ιδιότητα Κλειστότητας

Θεώρημα 2 (Κλειστότητα ως προς τη συμπλήρωση)

Η κλάση των ντετερμινιστικών γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστή ως προς τη συμπλήρωση.

Απόδειξη

Η απόδειξη παραλείπεται.

Παράδειγμα: Η γλώσσα $L = \{\alpha^n \beta^m c^p : m \neq n$ ή $m \neq p\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (βλ. άσκηση 3.5.14 βιβλίου Lewis & Papadimitriou), αλλά δεν είναι ντετερμινιστική. Αν η L ήταν ντετερμινιστική, τότε το συμπλήρωμά της $\overline{L}$ θα ήταν επίσης ντετερμινιστική χωρίς συμφραζόμενα και άρα θα ήταν γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
Σε αυτη την περίπτωση, η τομή της $\overline{L}$ με την κανονική γλώσσα $\alpha^* b^* c^*$ θα ήταν χωρίς συμφραζόμενα σύμφωνα με το Θεώρημα της κλειστότητας.
Επειδή όμως

$$\overline{L} \cap \alpha^* b^* c^* = \{\alpha^n b^n c^n : n \geq 0\}$$

που έχουμε δείξει ότι δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα, συμπεραίνουμε ότι η L δεν είναι ντετερμινιστική γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Θεώρημα 3

Η κλάση των ντετερμινιστικών γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι γνήσιο υποσύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα.

Απόδειξη

Προκύπτει από το προηγούμενο αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα:

Η $L = \{\alpha^n b^n\}$ παράγεται από τη ΓΧΣ $G = (\{\alpha, b, S\}, \{\alpha, B\}, R, S)$ με τους κανόνες:

$S \rightarrow \alpha Sb$

$S \rightarrow \epsilon$

που σύμφωνα με την κατασκευή του Λήμματος 1 στη ΘΓΑ 16 μας δίνει το ΑΣ $M_1 = (\{p, q\}, \{\alpha, b\}, \{\alpha, b, S\}, \Delta_1, p, \{q\})$ με

$$\Delta_1 = \{((p, \epsilon, \epsilon), (q, S)), ((q, \epsilon, S), (q, \alpha Sb)), ((q, \epsilon, S), (q, \epsilon)) \\ ((q, \alpha, \alpha), (q, \epsilon)), ((q, b, b), (q, \epsilon))\}$$

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Παράδειγμα (συνέχεια):

- Στο M_1 υπάρχουν δύο διαφορετικές μεταβάσεις, που αντιστοιχούν στους κανόνες της G που αναφέρονται στο ίδιο μη τερματικό σύμβολο. Άρα πρόκειται για μη ντετερμινιστικό ΑΣ.
- Η L είναι ντετερμινιστική γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα και επομένως το ΑΣ M_1 μπορεί να μετατραπεί σε ντετερμινιστικό ΑΣ M_2 που δέχεται την $L\$$.
- Αρκεί το νέο ΑΣ να «γνωρίζει» ποιο είναι το επόμενο σύμβολο στην είσοδο για να επιλέξει ποια μετάβαση θα χρησιμοποιήσει: αν πρόκειται για το α τότε το M_1 θα αντικαταστήσει το S στη στοίβα με το αSb. Αν το επόμενο σύμβολο εισόδου είναι b τότε πρέπει να εξάγει από τη στοίβα το S.
- Έτσι μπορεί ο υπολογισμός να οδηγήσει σε αποδοχή.
- Αυτή η τεχνική κατασκευής ντετερμινιστικού ΑΣ ονομάζεται **ανάλυση πρόγνωσης**, επειδή προβλέπεται η μετάβαση που θα χρησιμοποιηθεί ανάλογα με το σύμβολο στην είσοδο.

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Παράδειγμα (συνέχεια):
Το νέο ΑΣ είναι το

$$M_2 = (\{p, q, q_\alpha, q_b, q_\$\}, \{\alpha, b\}, \{\alpha, b, S\}, \delta_2, p, \{q_\$\})$$

με τη συνάρτηση μετάβασης δ_2 να περιέχει τις ακόλουθες μεταβάσεις:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & ((p, \epsilon, \epsilon), (q, S)) \\
(2) & ((q, \alpha, \epsilon), (q_\alpha, \epsilon)) \\
(3) & ((q_\alpha, \epsilon, \alpha), (q, \epsilon)) \\
(4) & ((q, b, \epsilon), (q_b, \epsilon)) \\
(5) & ((q_b, \epsilon, b), (q, \epsilon)) \\
(6) & ((q, \$, \epsilon), (q_\$, \epsilon)) \\
(7) & ((q_\alpha, \epsilon, S), (q_\alpha, \alpha S b)) \\
(8) & ((q_b, \epsilon, S), (q_b, \epsilon))
\end{array}
$$

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Παράδειγμα (συνέχεια):
Από την κατάσταση q το M_2 διαβάζει ένα σύμβολο και χωρίς να αλλάξει τη στοίβα περνά σε μία από τις καταστάσεις q_α, q_b ή $q_\$$. Τότε χρησιμοποιεί την πληροφορία αυτή για να διαφοροποιηθεί ανάμεσα στις δύο συμβατές μεταβάσεις $((q, \epsilon, S), (q, \alpha Sb))$ και $((q, \epsilon, S), (q, \epsilon))$:

- Χρησιμοποιεί την πρώτη μετάβαση μόνο από την q_α και
- τη δεύτερη μετάβαση μόνο από την κατάσταση q_b.

Έτσι, η μηχανή M_2 συμπεριφέρεται ως ένα ντετερμινιστικό ΑΣ.

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Παράδειγμα (συνέχεια):
Το M_2 χρησιμεύει ως νετντερμινιστική μηχανή αναγνώρισης συμβολοσειρών της μορφής $\alpha^n b^n$. Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει τον υπολογισμό του M_2 για την αναγνώριση της συμβολοσειράς $\alpha b\$$.

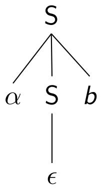
Κατάσταση	Υπόλοιπη είσοδος	Στοίβα	Μετάβαση	Κανόνας γραμματικής G
p	$\alpha b\$$	ϵ	-	
q	$\alpha b\$$	S	M1	
q_α	$b\$$	S	M2	
q_α	$b\$$	αSb	M7	$S \to \alpha Sb$
q	$b\$$	Sb	M3	
q_b	$\$$	Sb	M4	
q_b	$\$$	b	M8	$S \to \epsilon$
q	$\$$	ϵ	M5	
$q_\$$	$\$$	ϵ	M6	

Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Παράδειγμα (συνέχεια):
Από τον υπολογισμό της M_2 για την αναγνώριση της συμβολοσειράς $\alpha b\$$ με βάση τη σειρά των μεταβάσεων που αντιστοιχούν σε κανόνες της G ανακατασκευάζεται μία αριστερότερη παραγωγή:

$$S \overset{L}{\Rightarrow} \alpha Sb \overset{L}{\Rightarrow} ab$$

Αυτές είναι οι μεταβάσεις όπου ένα μη τερματικό σύμβολο αντικαθιστάται στην κορυφή της στοίβας και αντιστοιχούν στην κατασκευή ενός συντακτικού δέντρου από τη ρίζα προς τα φύλλα:



Λέμε ότι το M_2 ορίζει μία **καθοδική συντακτική ανάλυση** για τη γλώσσα της γραμματικής G.

Εισαγωγή στις Μηχανές Turing

- Καμία από τις μηχανές αναγνώρισης που εξετάσαμε - Πεπερασμένα Αυτόματα και Αυτόματα Στοίβας - δεν είναι αρκετά γενική.
- Δε μπορούν να αναπαραστήσουν μία οποιαδήποτε γλώσσα, π.χ. δε μπορούν να αναγνωρίζουν απλές γλώσσες όπως η $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$
- Οι **μηχανές Turing** (ΜΤ) αναγνωρίζουν πιο πολύπλοκες γλώσσες. Σε σχέση με τα ΠΑ και ΑΣ έχουν:
  - παρόμοια εμφάνιση (μονάδα ελέγχου, ταινία εισόδου και κεφαλή για ανάγνωση/εγγραφή)
  - λειτουργία που ορίζεται από αντίστοιχη μαθηματική δομή
  - επιπρόσθετες υπολογιστικές δυνατότητες

Εισαγωγή στις Μηχανές Turing

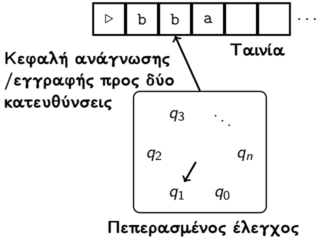
- Δεν ισχυρότερη κλάση αυτομάτων από τις ΜΤ. Κάθε προσπάθεια να ενισχύσουμε τις υπολογιστικές τους δυνατότητες (π.χ. πολλές ταινίες, μνήμη τυχαίας προσπέλασης κ.α.) κατέληξε σε ισοδύναμη αναπαράσταση από απλή ΜΤ.
- Άρα οι υπολογισμοί που μπορούν να εκτελεστούν τις όποιες επεκτάσεις έχουν προταθεί για τις ΜΤ μπορούν να εκτελεστούν επίσης και από την πρότυπη ΜΤ.
- Αποδεικνύεται επίσης ότι ένα είδος παραγωγού γλώσσας, που είναι γενίκευση των των ΓΧΣ και λέγονται **συστήματα επανεγγραφής** ή **γραμματικές χωρίς περιορισμούς**, είναι ισοδύναμος με τη ΜΤ.
- Για να απαντηθεί το πότε μία αριθμητική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη καταλήγουμε σε έννοια ισοδύναμη με τις ΜΤ.
- Τελικά οποιοσδήποτε τρόπος τυποποιήσης της έννοιας του «αλγορίθμου» πρέπει να είναι ισοδύναμος με την έννοια της ΜΤ.

Χαρακτηριστικά Μηχανών Turing

- Οι MT σχεδιάζονται με τα εξής *κριτήρια*
  1. Είναι αυτόματα: η κατασκευή και η λειτουργία τους διέπεται από το ίδιο γενικό πνεύμα.
  2. Είναι όσο πιο απλές γίνεται ως προς την περιγραφή, τον τυπικό ορισμό και την επιχειρηματολογία για τη λειτουργία τους.
  3. Είναι όσο το δυνατόν πιο γενικές ως προς τους υπολογισμούς που μπορούν να εκτελέσουν.

Λειτουργία Μηχανής Turing

- Ο **πεπερασμένος έλεγχος** λειτουργεί σε διακριτά βήματα. Σε κάθε βήμα:
  1. Τοποθετεί τον έλεγχο σε μία νέα κατάσταση και
  2. (α) αντικαθιστά το σύμβολο στη θέση της ταινίας που μόλις σαρώθηκε ή
     (β) μετακινεί την κεφαλή κατά ένα τετράγωνο αριστερά ή δεξιά
- Η **ταινία** περιορίζεται από ένα $\triangleright$ στο αριστερό της άκρο και εκτείνεται σε άπειρο μήκος προς τα δεξιά μετά από τη συμβολοσειρά εισόδου με $\sqcup$ (κενά).
- Η **κεφαλή** της **ταινίας**
  - κινείται είτε $\leftarrow$ ή $\rightarrow$
  - αμέσως μετά από $\triangleright$ κινείται $\rightarrow$



Τυπικός ορισμός ΜΤ

Ορισμός 4 (Μηχανή Turing)

Μία μηχανή Turing ορίζεται ως μία πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$, όπου

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**
- Σ είναι ένα **αλφάβητο**, το οποίο περιέχει το **κενό σύμβολο** $\sqcup$ και το **σύμβολο αριστερού άκρου** $\triangleright$, αλλά δεν περιέχει τα $\rightarrow$ και $\leftarrow$
- $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**
- $H \subseteq K$ είναι το σύνολο των **καταστάσεων τερματισμού**
- δ, η **συνάρτηση μετάβασης**, είναι μια συνάρτηση από το $(K - H) \times \Sigma$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\})$ τέτοια ώστε,
  (α) για κάθε $q \in K - H$, αν $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, τότε $b = \rightarrow$
  (β) για κάθε $q \in K - H$ και $\alpha \in \Sigma$, αν $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, τότε $b \neq \triangleright$

Ερμηνεία ορισμού ΜΤ

- Αν $\delta(q, \alpha) = (p, b)$, όταν η M βρίσκεται στην q και διαβάζει α θα εισέλθει στην p και
  (1) αν b είναι σύμβολο του Σ, γράφει b στη θέση του α, ή
  (2) αν b είναι $\rightarrow$ ή $\leftarrow$, μετακινεί την κεφαλή στην κατεύθυνση b
- Εφόσον η δ είναι συνάρτηση, η λειτουργία της M είναι νετντερμινιστική και θα σταματήσει όταν αυτή εισέλθει σε κατάσταση τερματισμού.
- Το σύμβολο $\triangleright$ δε διαγράφεται ποτέ γιατί από το (α) του ορισμού, όταν η M το συναντήσει τότε μετακινείται στα δεξιά.
- Η δ δεν ορίζεται για καταστάσεις του H. Όταν η M οδηγηθεί σε κατάσταση τερματισμού η λειτουργία της σταματάει.

Παράδειγμα 1

$K = \{q_0, q_1, h\}$

$\Sigma = \{\alpha, \sqcup, \triangleright\}$

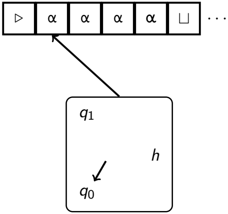
$s = q_0$

$H = \{h\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

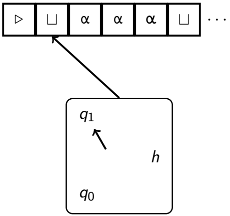
- Η M ξεκινώντας από την q_0 σαρώνει την ταινία προς τα δεξιά, μεταβάλλοντας τα α σε $\sqcup$, ώσπου να βρει μία θέση με $\sqcup$, όπου τερματίζει.
- Συγκεκριμένα, για είσοδο $\alpha\alpha\alpha\alpha\sqcup$
  1. στα πρώτα 4 α, μετακινείται ανάμεσα στις q_0 και q_1 4 φορές, αλλάζοντας τα α σε $\sqcup$ και εκτελώντας $\rightarrow$.
  2. έπειτα, η M θα βρεθεί στην q_0, με επόμενο το $\sqcup$ και θα τερματίσει
- Η 4η γραμμή του πίνακα είναι αδιάφορη καθώς ποτέ η M δεν θα είναι στην q_1 με επόμενο το α, αλλά απαιτείται γιατί η δ έχει πεδίο ορισμού το $K \times \Sigma$

Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 1/9)



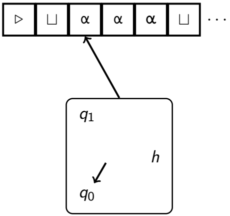
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 2/9)



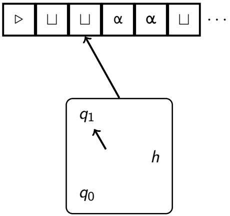
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 3/9)



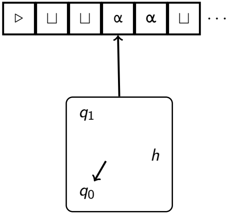
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 4/9)



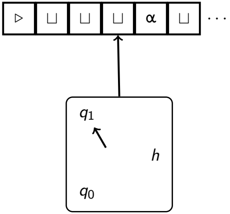
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 5/9)



q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

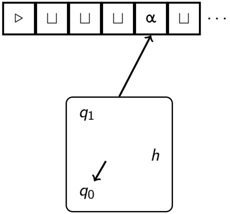
Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 6/9)



q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

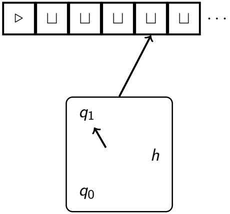
Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 7/9)

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$



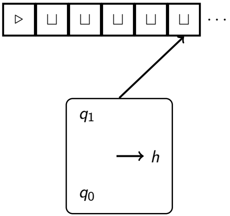
Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 8/9)

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$



Παράδειγμα 1 (προσομοίωση βήμα 9/9)

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	α	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	α	(q_0, α)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$



ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ

Παράδειγμα 2

- $K = \{q_0, h\}$
- $\Sigma = \{\alpha, \sqcup, \triangleright\}$
- $s = q_0$
- $H = \{h\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	α	$(q_0, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$

- Η M ξεκινώντας από την q_0 σαρώνει προς τα αριστερά, ώσπου να βρει μία θέση με $\sqcup$, όπου τερματίζει.
- Συγκεκριμένα, για είσοδο $\alpha\alpha \ldots \alpha\alpha$
  1. για κάθε α, παραμένει στην q_0 και εκτελεί $\leftarrow$.
  2. όταν φθάσει στο $\triangleright$ εκτελεί $\rightarrow$, επιστρέφοντας στο βήμα 1.
  3. στη συνέχεια η κεφαλή μετακινείται συνεχώς ανάμεσα στο αριστερότερο άκρο και τη θέση δεξιά του.

** Αντίθετα με τις άλλες ντετερμινιστικές μηχανές που περιγράψαμε, η λειτουργία μιας μηχανής Turing μπορεί να μη τερματίσει ποτέ.

Τυπικός ορισμός υπολογισμού ΜΤ

Ορισμός 5 (Συνολική κατάσταση)

Συνολική κατάσταση μιας ΜΤ $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ είναι κάθε στοιχείο του $K \times \triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\sqcup\}) \cup \{\epsilon\})$.

- Δηλαδή οι συνολικές καταστάσεις αρχίζουν με το σύμβολο αριστερού άκρου και δεν τελειώνουν ποτέ με κενό - εκτός αν το κενό είναι το σύμβολο που διαβάστηκε.
- Άρα οι $(q, \triangleright\alpha, \alpha b\alpha)$, $(h, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup, \sqcup\alpha)$ και $(q, \triangleright\sqcup\alpha\sqcup\sqcup, \epsilon)$ είναι συνολικές καταστάσεις, ενώ οι $(q, \triangleright b\alpha\alpha, \alpha b\sqcup)$ και $(q, \alpha\alpha, \alpha b)$ όχι.
- Μία συνολική κατάσταση που περιέχει μια κατάσταση που είναι στο H ονομάζεται **τερματισμένη συνολική κατάσταση**.
- Η θέση της κεφαλής σημειώνεται υπογραμμισμένη, ως $\triangleright\underline{\alpha}b$
- Μπορούμε να γράφουμε $(q, w\underline{\alpha}u)$ αντί για $(q, w\alpha, u)$.

Τυπικός ορισμός υπολογισμού ΜΤ

Ορισμός 6

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ και έστω $(q_1, w_1\underline{\alpha_1}u_1)$ και $(q_2, w_2\underline{\alpha_2}u_2)$ δύο συνολικές καταστάσεις του, όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma$. Τότε

$$(q_1, w_1\underline{\alpha_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{\alpha_2}u_2) \tag{1}$$

αν και μόνο αν, για κάποιο $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}, \delta(q_1, \alpha_1) = (q_2, b)$ και είτε

1. $b \in \Sigma, w_1 = w_2, u_1 = u_2$ και $a_2 = b$, είτε
2. $b = \leftarrow, w_1 = w_2\alpha_2$, και είτε
   - α $u_2 = \alpha_1 u_1$, αν $\alpha_2 \neq \sqcup$ ή $u_1 \neq \epsilon$ ή
   - β $u_2 = \epsilon$, αν $\alpha_2 = \sqcup$ και $u_1 = \epsilon$ είτε
3. $b = \rightarrow, w_2 = w_1\alpha_1$, και είτε
   - α $u_1 = \alpha_2 u_2$ ή
   - β $u_1 = u_2 = \epsilon$ και $\alpha_2 = \sqcup$ είτε

Τυπικός ορισμός υπολογισμού ΜΤ

Ορισμός 7 (α)

Για κάθε ΜΤ M, έστω $\vdash_M^*$ η ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα του $\vdash_M$. Λέμε ότι η συνολική κατάσταση C_1 παράγει τη συνολική κατάσταση C_2 αν $C_1 \vdash_M^* C_2$. Ένας υπολογισμός της M είναι μια ακολουθία από συνολικές καταστάσεις $C_i, 0 \leq i \leq n$ για n τέτοιο ώστε

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n \quad (2)$$

Λέμε ότι ο υπολογισμός είναι μήκους n ή ότι έχει n βήματα και γράφουμε $C_0 \vdash_M^n C_n$

Παράδειγμα υπολογισμού ΜΤ

Στο Παράδειγμα 1 που περιγράφηκε προηγουμένως

$$
\begin{aligned}
(q_1, \triangleright\underline{\sqcup}\alpha\alpha\alpha\alpha) & \vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\underline{\alpha}\alpha\alpha\alpha) \\
& \vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\underline{\sqcup}\alpha\alpha\alpha) \\
& \vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{\alpha}\alpha\alpha) \\
& \vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}\alpha\alpha) \\
& \vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\alpha}\alpha) \\
& \vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}\alpha) \\
& \vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\alpha}) \\
& \vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}) \\
& \vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}) \\
& \vdash_M (h, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})
\end{aligned}
$$

- Ο υπολογισμός αυτός έχει 10 βήματα

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014