ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 20: Μηχανές Turing: Σύνθεση και Υπολογισμοί

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Ιεραρχικός συμβολισμός για μηχανές Turing

- Χρειαζόμαστε έναν ξεκάθαρο και σχηματικό συμβολισμό για τις MT.
  - Η αναπαράσταση με πίνακα είναι πολύπλοκη και ερμηνεύεται δύσκολα.
- Υιοθετούμε έναν ιεραρχικό συμβολισμό, σύμφωνα με τον οποίο όλο και πιο πολύπλοκες μηχανές χτίζονται από απλούστερες. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να ορίσουμε
  - ποιες είναι οι βασικές μηχανές
  - ποιοί είναι οι κανόνες σύνθεσης μηχανών

Βασικές μηχανές Turing

- Ως **βασικές** θεωρούμε τις απλούστερες δυνατές μηχανές:
  - μηχανές εγγραφής συμβόλων
  - μηχανές μετακίνησης της κεφαλής
- Για ένα αλφάβητο Σ και κάθε α - ενέργεια ή σύμβολο του Σ (εκτός $\triangleright$) -, ορίζουμε μια μηχανή, η οποία είτε γράφει α ή μετακινείται προς α και αμέσως μετά τερματίζει.
  - δηλαδή, ορίζουμε $M_\alpha = (\{s, h\}, \Sigma, \delta, s, \{h\})$, $\forall\alpha \in \Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\} - \{\triangleright\}$, όπου $\delta(s, b) = (h, \alpha)$, $\forall b \in \Sigma - \{\triangleright\}$
- Γράφουμε α αντί για M_α για τις μηχανές εγγραφής συμβόλων
- Γράφουμε R (right) ή L (left) αντί για $M_\rightarrow$ και $M_\leftarrow$, αντιστοίχως για τις μηχανές μετακίνησης της κεφαλής.

Κανόνες σύνθεσης μηχανών Turing

- Οι MT θα συνδυάζονται μεταξύ τους όπως οι καταστάσεις ενός πεπερασμένου αυτομάτου.
  - Οι μεμονωμένες μηχανές είναι σαν τις καταστάσεις ενός ΠΑ.
- Κανόνες σύνθεσης:
  - Η μετάβαση από μια MT σε μια άλλη γίνεται αφού η πρώτη τερματίσει.
  - Η επόμενη MT ξεκινά από την αρχική της κατάσταση με την ταινία και την κεφαλή όπως προέκυψαν από τον τερματισμό της προηγούμενης MT.

Κανόνες σύνθεσης μηχανών Turing

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "b"] & M_2 \\
& M_3 &
\end{tikzcd}
$$

- Έστω η MT της εικόνας, που συντίθεται από τις M_1, M_2 και M_3
    1. ξεκινάει από την αρχική κατάσταση της M_1
    2. λειτουργεί όπως η M_1 μέχρι το σημείο που η M_1 θα τερμάτιζε
    3. τότε,
        - 3` αν το τρέχον σύμβολο είναι α, αρχικοποιεί τη M_2 και λειτουργεί όπως αυτή
        - 3‘ αν το τρέχον σύμβολο είναι b, αρχικοποιεί τη M_3 και λειτουργεί όπως αυτή

Ορισμός μιας σύνθετης μηχανής Turing

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 \\ \big\downarrow b & & \\ M_3 & & \end{array}$$

- Θεωρούμε ότι $M_i = (K_i, \Sigma, \delta_i, s_i, H_i)$, για $i \in \{1, 2, 3\}$
- Τα σύνολα των καταστάσεων των M_1, M_2 και M_3 είναι ξένα μεταξύ τους.
- Η σύνθετη μηχανή θα είναι η $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$, όπου
  - K: η ένωση των καταστάσεων, $\bigcup_{i=1}^{3} K_i$
  - s: η αρχική της πρώτης μηχανής, s_1
  - H: η ένωση των τελικών καταστάσεων των M_2 και M_3, $H_2 \cup H_3$
  - δ: για κάθε μη τελική κατάσταση q, ορίζεται από την δ_i της μηχανής όπου ανήκει η q.
    - Δηλαδή $\forall \sigma \in \Sigma$ και $\forall q \in K_i - H_i$, $\delta(q, \sigma) = \delta_i(q, \sigma)$

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 1

$$\longrightarrow R \;\begin{matrix}\xrightarrow{\alpha}\\ \xrightarrow{b}\\ \xrightarrow{\triangleright}\\ \xrightarrow{\sqcup}\end{matrix}\; R$$

Σχήμα : α

$$\longrightarrow R \xrightarrow{\alpha, b, \triangleright, \sqcup} R$$

Σχήμα : β

- Σχήμα α
  - Μηχανή που αποτελείται από δύο αντίγραφα της R.
  - Αρχικά εκτελεί $\rightarrow$ και έπειτα αν η θέση έχει α ή b ή $\triangleright$ ή $\sqcup$, εκτελεί $\rightarrow$ ξανά.
- Σχήμα β
  - Πιο βολική περιγραφή για τη μηχανή του Σχήματος α.
  - Πολλά σύμβολα στην επιγραφή = *παράλληλα* βέλη, ένα για κάθε σύμβολο.
  - Μια επιγραφή με όλα τα σύμβολα του Σ μπορεί να παραλείπεται.
    - Δηλαδή, αν $\Sigma = \{\alpha, b, \triangleright, \sqcup\}$ τότε $R \rightarrow R$, ή RR ή R^2

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 2

$\longrightarrow R \circlearrowleft \overline{\sqcup}$

Σχήμα : α

$\longrightarrow R \circlearrowleft \alpha \neq \sqcup$

Σχήμα : β

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & R \arrow[loop above, "\sqcup"] \arrow[r, "\alpha \neq \sqcup"] & L_\alpha \end{tikzcd}$$

Σχήμα : γ

- Σχήμα α
  - Μηχανή που διαβάζει προς τα δεξιά μέχρι να βρει κενό. Συμβολίζεται και $R_\sqcup$.
  - Έπιγραφή $\overline{\alpha} =$ «οποιοδήποτε σύμβολο εκτός του α»
- Σχήμα β
  - Πιο βολική περιγραφή για τη μηχανή του Σχήματος α.
  - Πλεονέκτημα της επιγραφής $\alpha \neq \sqcup$ είναι ότι το α μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε άλλο σημείο στο διάγραμμα ως το όνομα μιας μηχανής.
    - Παράδειγμα: Η μηχανή στο Σχήμα γ διαβάζει προς τα δεξιά μέχρι να βρει μη κενό και τότε αντιγράφει το σύμβολο της θέσης αυτής στην αμέσως αριστερή θέση.

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 3

$\longrightarrow R \circlearrowleft \overline{\sqcup}$	$\longrightarrow L \circlearrowleft \overline{\sqcup}$	$\longrightarrow R \circlearrowleft \sqcup$	$\longrightarrow L \circlearrowleft \sqcup$
Σχήμα : (α) $R_{\sqcup}$	Σχήμα : (β) $L_{\sqcup}$	Σχήμα : (γ) $R_{\overline{\sqcup}}$	Σχήμα : (δ) $L_{\overline{\sqcup}}$

Μηχανές για την ανεύρεση επιγραμμένων ή μη θέσεων

(α) βρίσκει το πρώτο *κενό* στα *δεξιά* της τρέχουσας θέσης.

(β) βρίσκει το πρώτο *κενό* στα *αριστερά* της τρέχουσας θέσης.

(γ) βρίσκει το πρώτο *μη κενό* στα *δεξιά* της τρέχουσας θέσης.

(δ) βρίσκει το πρώτο *μη κενό* στα *αριστερά* της τρέχουσας θέσης.

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 5

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & L_{\sqcup} \arrow[r] & R \arrow[r, "\alpha \neq \sqcup"] \arrow[d, "\sqcup"] & \sqcup R^2_{\sqcup} \alpha L^2_{\sqcup} \alpha \arrow[l, bend right] \\
 & & R_{\sqcup} &
\end{tikzcd}
$$

Η μηχανή C λειτουργεί ακολούθως:

- Αν ξεκινά με είσοδο w, δηλαδή αν η συμβολοσειρά w, με μη κενά σύμβολα που είναι πιθανώς κενή, τοποθετείται σε μια ταινία με κενά στοιχεία εκτός της w
- ... και έχει μία κενή θέση στα αριστερά της w,
- .... και η κεφαλή βρίσκεται στη θέση στα αριστερά της w,
- ... τότε η μηχανή θα σταματήσει κάποτε με $w \sqcup w$ σε μια κατά τα άλλα κενή ταινία.
- Λέμε ότι η C μετασχηματίζει την $\sqcup w \underline{\sqcup}$ σε $\sqcup w \sqcup w \underline{\sqcup}$

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 6

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\sqcup"] & \sqcup R_{\sqcup} \alpha L_{\sqcup} \arrow[l, bend right, "\alpha \neq \sqcup"'] \\
& R_{\sqcup} &
\end{tikzcd}
$$

Η μηχανή δεξιάς μετατόπισης $S \rightarrow$ μετασχηματίζει την $\sqcup w \underline{\sqcup}$, όπου η w δεν περιέχει κενά, σε $\sqcup \sqcup w \underline{\sqcup}$

Κατασκευή σύνθετης μηχανής Turing: Παράδειγμα 7

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & R \arrow[r, "\alpha"] & \sqcup \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Μηχανή που διαγράφει τα α στην ταινία της.

Μηχανές Turing ως αναγνωριστές γλώσσας

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ και $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$

- Η συνολική κατάσταση της M με είσοδο w είναι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$

Ορισμός 1

Έστω M τέτοια ώστε $H = \{y, n\}$.

- Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι y ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**.
  - Η M **δέχεται** την $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση αποδοχής.
- Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι n ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.
  - Η M **απορρίπτει** την w αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Μηχανές Turing ως αναγνωριστές γλώσσας

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$

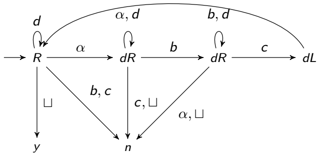
Ορισμός 2

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ το **αλφάβητο εισόδου** της M.

- Αν καθορίσουμε το Σ_0 να είναι ένα τέτοιο υποσύνολο, επιτρέπουμε στις μηχανές να χρησιμοποιούν επιπλέον σύμβολα κατά τον υπολογισμό τους, εκτός αυτών στις εισόδους τους.
- Η M **αποφασίζει** μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ είναι αληθής:

  Αν $w \in L$, η M δέχεται την w και αν $w \notin L$, η M απορρίπτει την w
- Ονομάζουμε μια γλώσσα **αναδρομική** αν υπάρχει μια μηχανή που την αποφασίζει.
  - Μια ΜΤ αποφασίζει μια γλώσσα L αν, όταν ξεκινά με είσοδο w, πάντα τερματίζει σε κατάσταση τερματισμού (y αν $w \in L$, n αν $w \notin L$)

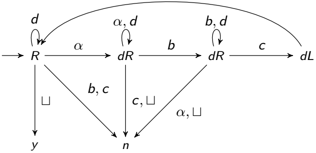
Μηχανές Turing ως αναγνωριστές γλώσσας: Παράδειγμα



Η μηχανή αποφασίζει την $L = \{\alpha^n b^n c^n : n \geq 0\}$

- Η μηχανή y προσθέτει την κατάσταση αποδοχής y, ενώ η n προσθέτει την κατάσταση n
- Με είσοδο $\alpha^n b^n c^n$ λειτουργεί σε n φάσεις. Σε κάθε φάση:
    1. ξεκινά από τα αριστερά της συμβολοσειράς και ψάχνει προς τα δεξιά ένα α
    2. Όταν βρει α το αντικαθιστά με d και ψάχνει πιο δεξιά ένα b
    3. Όταν βρει b το αντικαθιστά με d και ψάχνει πιο δεξιά ένα c
    4. Όταν βρει c και αντικατασταθεί με d, η φάση τελειώνει και η κεφαλή επιστρέφει στο αριστερό άκρο. Ξεκινά η επόμενη φάση.

Μηχανές Turing ως αναγνωριστές γλώσσας: Παράδειγμα (Συνέχ.)



- Αν σε οποιοδήποτε σημείο η μηχανή διαπιστώσει ότι η συμβολοσειρά δεν ανήκει στο $\alpha^* b^* c^*$ ή ότι ένα σύμβολο υπάρχει περισσότερες φορές από όσες χρειάζεται (π.χ. συναντά b ενώ ψάχνει για α), τότε εισέρχεται στη n και απορρίπτεται.
- Αν συναντήσει το δεξιό άκρο της εισόδου ενώ ψάχνει για α, όλη η είσοδος έχει αντικατασταθεί με d, και άρα ήταν της μορφής $\alpha^n b^n c^n$ για $n = 0$.

Αναδρομικές συναρτήσεις

- Οι MT μπορούν να παράγουν πιο σύνθετη έξοδο από «ναι» ή «όχι»

Ορισμός 3

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ όπου $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και έστω $w \in \Sigma_0^*$.

- Αν η M τερματίζει με είσοδο w και $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}y)$ για $y \in \Sigma_0^*$, τότε το y ονομάζεται **έξοδος της M με είσοδο w** και συμβολίζεται με $M(w)$.
- Έστω f συνάρτηση από το Σ_0^* στο Σ_0^*. Η M **υπολογίζει** την f αν, με κάθε $w \in \Sigma_0^*$ η M τερματίζει και η ταινία τότε περιέχει $\triangleright \sqcup f(w)$.
  - Δηλαδή $\forall w \in \Sigma_0^*, M(w) = f(w)$
- Μια συνάρτηση ονομάζεται **αναδρομική** αν υπάρχει M που την υπολογίζει.

Αναδρομικές συναρτήσεις: Παράδειγμα 1

- Η συνάρτηση $\kappa : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$, η οποία ορίζεται ως $\kappa(w) = ww$, μπορεί να υπολογιστεί από τη μηχανή $CS_{\leftarrow}$ (μηχανή αντιγραφής ακολουθούμενη από τη μηχανή μετατόπισης, που ορίστηκαν)

Αναδρομικές συναρτήσεις

- Οι συμβολοσειρές στο $\{0,1\}^*$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το δυαδικό συμβολισμό των μη αρνητικών ακεραίων, όπου κάθε $w = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in \{0,1\}^*$ αναπαριστά τον αριθμό $num(w) = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \ldots + \alpha_n$
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $0 \cup 1(0 \cup 1)^*$.
- Άρα οι ΜΤ που μπορούν να υπολογίζουν συναρτήσεις $\{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, μπορούν να θεωρηθούν μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.
- Αριθμητικές συναρτήσεις με πολλές μεταβλητές μπορούν να υπολογιστούν από ΜΤ που υπολογίζουν συναρτήσεις $\{0,1,;\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, όπου το «;» χρησιμοποιείται για να διαχωρίζει τις δυαδικές μεταβλητές.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014