ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 24: Μη Ντεντερμινιστικές Μηχανές Turing

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

1. Μη Ντεντερμινιστικές ΜΤ
   - Ορισμός
   - Σημασία
   - Προσομοίωση
   - Ασκήσεις

Ορισμός Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ

- Με το μη ντεντερμινισμό μία ΜΤ θα μπορούσε με κατάλληλους συνδυασμούς κατάστασης και επόμενου συμβόλου, να έχει περισσότερες από μία δυνατές επιλογές συμπεριφοράς.

Ορισμός 1 (Μη Ντεντερμινιστική ΜΤ)

Μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ είναι μία πεντάδα K, Σ, Δ, s, H, όπου K, Σ, s και H είναι όπως και στις πρότυπες ΜΤ και Δ είναι ένα υποσύνολο του $((K - H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}))$, αντί για μια συνάρτηση από το $(K - H) \times \Sigma$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$.

- Οι συνολικές καταστάσεις και οι σχέσεις $\vdash_M$ και $\vdash_M^\star$ ορίζονται με το συνήθη τρόπο.
- Η $\vdash_M$ μπορεί να παράγει πολλές διαφορετικές συνολικές καταστάσεις σε ένα βήμα.
- Μήπως ο μη ντεντερμινισμός στις ΜΤ αυξάνει την υπολογιστική τους ισχύ;

Σημασία Μη Ντετερμινιστικών ΜΤ (1/3)

- Τι θεωρούμε ως αποτέλεσμα υπολογισμού μιας ΜΤ;
- Μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ θα μπορούσε για την ίδια είσοδο να επιστρεψει δύο διαφορετικές εξόδους ή τελικές καταστάσεις.
- Η πιο απλή περίπτωση είναι να εξετάσουμε πρώτα τις μη ντεντερμινιστικές ΜΤ που ημιαποφασίζουν γλώσσες.

Ορισμός 2 (Μη Ντεντερμινιστική ΜΤ που ημιαποφασίζει)

Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ. Λέμε ότι η M **δέχεται μια είσοδο** $w \in (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup)^\star$ αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^\star (h, u\underline{\alpha}v)$ για κάποια $h \in H, \alpha \in \Sigma, u, v \in \Sigma^\star$ (αρκεί να υπάρχει ένας υπολογισμός που τερματίζει).

Λέμε ότι η M **ημιαποφασίζει μια γλώσσα** $L \subseteq (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$ αν για κάθε $w \in (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$: $w \in L$ αν και μόνο αν η M δέχεται την w.

Σημασία Μη Ντεντερμινιστικών ΜΤ (2/3)

Ορισμός 3 (Μη Ντεντερμινιστική ΜΤ που αποφασίζει)

Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \{y, n\})$ μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ. Λέμε ότι η M **αποφασίζει μια γλώσσα** $L \subseteq (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$ αν οι ακόλουθες δύο συνθήκες ισχύουν για κάθε $w \in (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$:

1. Υπάρχει φυσικός αριθμός N που εξαρτάται από τις M, w, ώστε να μην υπάρχει συνολική κατάσταση C με $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^N C$.
2. $w \in L$ αν και μόνο αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^\star (y, u\underline{\alpha}v)$ για $u, v \in \Sigma^\star, \alpha \in \Sigma$

Ορισμός 4 (Μη Ντεντερμινιστική ΜΤ που υπολογίζει συνάρτηση)

Έστω μία μη ντεντερμινιστική $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$. Η M **υπολογίζει** την $f : (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star \mapsto (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$ αν $\forall w \in (\Sigma - \{\triangleright, \sqcup\})^\star$ ισχύουν :

1. Υπάρχει N που εξαρτάται από τις M, w, ώστε να μην υπάρχει συνολική κατάσταση C με $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^N C$.
2. $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^\star (h, u\underline{\alpha}v)$ αν και μόνο αν $u\alpha = \triangleright\sqcup$ και $v = f(w)$

Σημασία Μη Ντεντερμινιστικών ΜΤ (3/3)

- Για να μπορεί μια μη ντεντερμινιστική ΜΤ να αποφασίζει μία γλώσσα ή να υπολογίζει μία συνάρτηση, πρέπει όλοι οι υπολογισμοί της να τερματίζουν.

  Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει υπολογισμός που συνεχίζει μετά από N βήματα.

- Για να αποφασίσει η M μία γλώσσα, απαιτούμε τουλάχιστο ένας από τους δυνατούς υπολογισμούς της να καταλήγει σε αποδοχή της εισόδου.

- Για να μπορεί μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ να υπολογίζει μία συνάρτηση, απαιτούμε όλοι οι δυνατοί υπολογισμοί να συμφωνούν ως προς το αποτέλεσμα.

  Αν αυτό δεν ισχύει, τότε δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε ποιά είναι η σωστή τιμή της συνάρτησης.

Παράδειγμα Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (1/2)

Σύνθετος αριθμός είναι το γινόμενο δύο φυσικών, μεγαλύτερων από το ένα (π.χ. 4, 6, 8, 9 κλπ).

Έστω $C = \{100, 110, 1000, \ldots\}$ οι δυαδικές αναπαραστάσεις των σύνθετων αριθμών. Σχεδιάζουμε μια ΜΤ, που με μη ντεντερμινισμό θα ημιαποφασίζει τη C «μαντεύοντας» τους παράγοντες ενός αριθμού.

Με είσοδο τη δυαδική αναπαράσταση του ακεραίου n η ΜΤ θα:

1. Επιλέγει **μη νετντερμινιστικά** 2 δυαδικούς αριθμούς p, q μεγαλύτερους του ένα και γράφει ψηφίο - ψηφίο τη δυαδική τους αναπαράσταση δίπλα στην είσοδο.
2. Χρησιμοποιεί μία ΜΤ πολλαπλασιασμού για να αντικαταστήσει τις δυαδικές παραστάσεις των p, q με αυτή του γινομένου τους.
3. Ελέγχει ότι οι ακέραιοι, n και $p \cdot q$ είναι ίσοι με σύγκριση ψηφίο - ψηφίο. Αν είναι ίσοι τερματίζει, διαφορετικά συνεχίζει επ' άπειρον τον υπολογισμό με κάποιο τρόπο (ημιαποφασίζει τη C).

Παράδειγμα Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (2/2)

Συγκεκριμένα, με είσοδο 1000010 (δυαδική αναπαράσταση του 66):

- Θα έχει πολλούς ατέρμονους υπολογισμούς που αντιστοιχούν στη μη ντεντερμινιστική επιλογή ακεραίων στη Φάση 1, π.χ. για τους 101;11101, που δε δίνουν γινόμενο 66.
- Εφόσον ο 66 είναι σύνθετος αριθμός, θα υπάρχει τουλάχιστο ένας υπολογισμός της ΜΤ που καταλήγει σε αποδοχή (π.χ. $2 \cdot 33 = 66$).
- Ελέγχει ότι οι ακέραιοι, n και $p \cdot q$ είναι ίσοι με σύγκριση ψηφίο - ψηφίο. Αν είναι ίσοι τερματίζει, διαφορετικά συνεχίζει επ' άπειρον τον υπολογισμό με κάποιο τρόπο (ημιαποφασίζει τη C).

Μπορεί να αλλαχθεί σε μη ντεντερμινιστική ΜΤ που αποφασίζει τη C:

1. Ίδια δομή, χωρίς να επιλέγεται ακέραιος με περισσότερα ψηφία από τον n (δε μπορεί να είναι παράγοντας του n).
2. Αφού συγκρίνει την είσοδο και το γινόμενο, θα τερματίζει στην κατάσταση y αν είναι ίσα, και στην κατάσταση n διαφορετικά.
3. Όλοι οι υπολογισμοί θα τερματίζουν μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Προσομοίωση Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (1/5)

Θεώρημα 5

Αν μία μη ντεντερμινιστική ΜΤ M αποφασίζει ή ημιαποφασίζει μία γλώσσα ή υπολογίζει μία συνάρτηση, τότε υπάρχει μία πρότυπη ΜΤ M' που αποφασίζει ή ημιαποφασίζει την ίδια γλώσσα ή υπολογίζει την ίδια συνάρτηση.

Απόδειξη:
Κατασκευή ντεντερμινιστικής ΜΤ M' για μη ντεντερμινιστική μηχανή M που ημιαποφασίζει μία γλώσσα L.

Για είσοδο w, η M' θα εκτελέσει συστηματικά όλους τους δυνατούς υπολογισμούς της M, αναζητώντας κάποιον που τερματίζει.

Η M' κατασκευάζεται έτσι ώστε να τερματίζει αν και μόνο αν η M τερματίζει.

Προσομοίωση Μη Ντετερμινιστικής ΜΤ (2/5)

Απόδειξη (συνέχεια)
Κρίσιμη παρατήρηση: για κάθε συνολική κατάσταση C της M το πλήθος των C' τέτοιων ώστε $C \vdash_M C'$ είναι φραγμένο με τέτοιο τρόπο που εξαρτάται από την M και όχι από τη C.

Το πλήθος των τετράδων $(q, \alpha, p, b) \in \Delta$ δε μπορεί να υπερβεί το $|K| \cdot (|\Sigma| + 2)$, επειδή αυτό είναι το μέγιστο πλήθος - έστω r - των συνδυασμών (p, b) με $p \in K$ και $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε (q, α) και για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ υπάρχει μία σαφώς ορισμένη (q, α, p_i, b_i). Η M είναι μη ντεντερμινιστική και δεν ορίζει μονοσήμαντα την επιλογή της ανάμεσα στις r μεταβάσεις.

Έστω η M_d, μία ντεντερμινιστική παραλλαγή της M με το ίδιο σύνολο καταστάσεων και 2 ταινίες. Αρχικά η 1η ταινία περιέχει την είσοδο της M, και η 2η περιέχει n ακεραίους στο διάστημα $1, \ldots, r$, έστω τους $i_1 i_2 \ldots i_n$.

Προσομοίωση Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (3/5)

Απόδειξη (συνέχεια)
Λειτουργία της M_d για n βήματα:

1. Η M_d επιλέγει την i_1-οστή μετάβαση (p_{i_1}, b_{i_1}), αυτή που υποδεικνύει η τιμή που διαβάζεται στη 2η ταινία.
2. Στη συνέχεια διαβάζεται στη 2η ταινία το i_2 και η M_d εκτελεί την i_2-οστή μετάβαση.
3. Όταν η M_d συναντήσει ένα κενό στη 2η ταινία, που σημαίνει ότι έχουν τελειώσει οι «υποδείξεις» μεταβάσεων, αυτή τερματίζει.

Η ΜΤ M' περιγράφεται ως μία μηχανή τριών ταινιών, στην οποία:

- Η 1η ταινία περιέχει πάντα την αρχική είσοδο w ώστε κάθε προσομοιούμενος υπολογισμός της M να ξεκινάει εκ νέου με την ίδια είσοδο.
- Η 2η και η 3η ταινία προσομοιώνουν τους υπολογισμούς της M_d.

Η M' μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμη πρότυπη ΜΤ μιας ταινίας.

Προσομοίωση Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (4/5)

Απόδειξη (συνέχεια)
Οι τρεις ταινίες της M' χρησιμοποιούνται ως εξής:

1. Η είσοδος αντιγράφεται από την 1η ταινία στη 2η πριν η M' ξεκινήσει να προσομοιώνει κάθε νέο υπολογισμό.
2. Αρχικά η 3η ταινία περιέχει την e και άρα δε μπορεί να ξεκινήσει η προσομοίωση της M_d.
3. Η M' χρησιμοποιεί μία ΜΤ για να παράγει από την e την επόμενη λεξικογραφικά συμβολοσειρά του $\{1, 2, \ldots, r\}^{\star}$. Δηλ. θα παράξει τις συμβολοσειρές $1, 2, \ldots, r, 11, 12, \ldots, rr, 111, \ldots$.

$$\begin{tikzcd}
C^{1\to 2} \arrow[r] & B^3 M_d^{2,3} \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

Η $C^{1\to 2}$ διαγράφει τα περιεχόμενα τη 2ης ταινίας και αντιγράφει τα περιεχόμενα της 1ης στη 2η. Η B^3 παράγει την επόμενη λεξικογραφικά συμβολοσειρά στην 3η ταινία.

Προσομοίωση Μη Ντεντερμινιστικής ΜΤ (5/5)

Απόδειξη (συνέχεια)
Μπορούμε να δείξουμε ότι η M' τερματίζει με μια είσοδο w, αν και μόνο αν κάποιος υπολογισμός της M τερματίζει.

Έστω ότι η M' τερματίζει με είσοδο w. Αυτό σημαίνει ότι η M_d με κάποια συμβολοσειρά $i_1 i_2 \ldots i_n$ στην 3η ταινία τερματίζει με την κεφαλή της 3ης ταινίας να μην έχει διαβάσει κενό.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει υπολογισμός της M με είσοδο w που τερματίζει σε n βήματα, τότε στην M' η B^3 θα παράξει μετά από το πολύ $r + r^2 + \ldots + r^n$ αποτυχημένες προσπάθειες τη συμβολοσειρά του $\{1, 2, \ldots, r\}^\star$, που αντιστοιχεί στον υπολογισμό της M που τερματίζει.

- Η προσομοίωση μιας μη ντεντερμινιστικής μηχανής εκτελεί όλους τους δυνατούς υπολογισμούς της.
- Για να προσομοιωθεί ένας υπολογισμός n βημάτων απαιτείται ένα εκθετικά μεγάλο πλήθος βημάτων ως προς το n.
- Οι άλλες προσομοιώσεις που είδαμε είναι πολυωνυμικές.

Ασκήσεις σε Μη Ντετερμινιστικές ΜΤ (1/5)

Να περιγράψετε κάνοντας χρήση του συντομευμένου συμβολισμού μη ντετερμινιστικές ΜΤ που δέχονται τις ακόλουθες γλώσσες:

1. $\alpha^{\star}\alpha bb^{\star}b\alpha\alpha^{\star}$.
2. $\{ww^R uu^R : w, u \in \{\alpha, b\}^{\star}\}$

Λύση:

1. $$\begin{tikzcd} R \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\alpha"] & R \arrow[r, "b"] & R \arrow[loop above, "b"] \arrow[r, "\alpha"] & R \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\sqcup"] & y \end{tikzcd}$$
2. Η μηχανή περιγράφεται πιο εύκολα σε φυσική γλώσσα παρά με συντομευμένο συμβολισμό:

   Η κεφαλή εκτελεί συνεχή κίνηση δεξιά. Σε κάποιο σημείο της συμβολοσειράς σταματά και ενεργοποιεί τη μηχανή μετακύλισης δεξιά, για να εισάγει ένα κενό στο μέσο της συμβολοσειράς.

   Η κεφαλή επιστρέφει στο 1ο κενό στο αριστερό άκρο της ταινίας.

   Εκτελείται ο ακόλουθος βρόχος:

Ασκήσεις σε Μη Ντεντερμινιστικές ΜΤ (2/5)

Λύση (συνέχεια): Βρόχος

1. Μετακίνηση προς τα δεξιά κατά ένα τετράγωνο.
2. Αν το τετράγωνο είναι κενό, έξοδος από το βρόχο. Αν δεν είναι κενό, τότε διαγράφεται το περιεχόμενο και αποθηκεύεται το σύμβολο σ στη μνήμη ως κατάσταση.
3. Μετακίνηση προς τα δεξιά μέχρι το επόμενο κενό.
4. Μετακίνηση προς τα αριστερά ένα τετράγωνο.
5. Αν το σύμβολο στο τετράγωνο είναι σ, τότε διαγράφεται και η κεφαλή μετακινείται αριστερά μέχρι το επόμενο κενό. Αν όχι, τότε η εκτέλεση εισίερχεται σε ατλερμονο βρόχο.
6. Επιστροφή στην αρχή του βρόχου.

Αν η εκτέλεση εξέλθει από το βρόχο, τότε η κεφαλή μετακινείται δεξιά στο πρώτο μη κενό τετράγωνο, από κει μετακινείται αριστερά ένα τετράγωνο, και επαναλαμβάνει το βρόχο.

Αν η εκτέλεση εξέλθει για δεύτερη φορά από το βρόχο, τότε η μηχανή τερματίζει και η συμβολοσειρά γίνεται δεκτή.

Ασκήσεις σε Μη Ντεντερμινιστικές ΜΤ (3/5)

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ η ακόλουθη μη ντεντερμινιστική ΜΤ:

$K = \{q_0, q_1, h\}$
$\Sigma = \{\alpha, \triangleright, \sqcup\}$
$s = q_0$
$\Delta\{(q_0, \sqcup, q_1, \alpha), (q_0, \sqcup, q_1, \sqcup), (q_1, \sqcup, q_1, \sqcup), (q_1, \alpha, q_0, \rightarrow), (q_1, \alpha, h, \rightarrow)\}$

Να περιγράψετε όλους τους υπολογισμούς 5 βημάτων ή λιγότερων όταν η M ξεκινάει από τη $(q_0, \triangleright\underline{\sqcup})$. Τι κάνει η M όταν ξεκινάει από αυτήν τη συνολική κατάσταση; Ποιο είναι το πλήθος r (στην απόδειξη του Θεωρήματος) για τη μηχανή;

Λύση: Από την αρχική συνολική κατάσταση, η κεφαλή της M μετακινείται δεξιά, εγγράφει έναν αριθμό από α και μετά από κάθε εγγραφή μετακινείται δεξιά. Στη συνέχεια, είτε μπαίνει σε βρόχο για πάντα, είτε εγγράφει ένα ακόμη α μετακινείται δεξιά, και τερματίζει. Για τη μηχανή αυτή, $r = 2$ επειδή υπάρχουν 2 περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζονται 2 διαφορετικές τετράδες (κατάσταση q_0 με σάρωση $\sqcup$ και κατάσταση q_1 με σάρωση α).

Ασκήσεις σε Μη Ντετερμινιστικές MT (4/5)

Χρησιμοποιήστε μη ντετερμινιστικές MT για να δείξετε ότι η κλάση των αναδρομικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση, την παράθεση και την Kleene satr. Επαναλάβετε για την κλάση των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών.

Λύση:
Ένωση: Έστω οι MT M_1, M_2. Έστω επίσης M' η μη ντετερμινιστική MT που με είσοδο w επιλέγει να προσομοιώσει την M_1 ή της M_2 για την είσοδο, που γίνεται δεκτή αν η αντίστοιχη μηχανή την αποδέχεται. Τότε, $L(M') = L(M_1) \cup L(M_2)$.
Για $w \in L(M_1) \cup L(M_2)$, μία εκ των M_1, M_2 αποδέχεται την w και η M' επιλέγοντας αυτή τη μηχανή την αποδέχεται επίσης και άρα $w \in L(M')$.
Από την άλλη, αν $w \in L(M')$, τότε υπάρχει υπολογισμός αποδοχής της M' για την w, που περιλαμβάνει την επιλογή μιας εκ των M_1, M_2 και έναν υπολογισμό αποδοχής γι αυτήν. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, μία εκ των M_1, M_2 αποδέχεται την w και έτσι $w \in L(M_1) \cup L(M_2)$.

Ασκήσεις σε Μη Ντεντερμινιστικές MT (5/5)

Λύση (συνέχεια):
Παράθεση: Έστω M'' μία MT δύο ταινιών, που με είσοδο w, μη ντεντερμινιστικά διαχωρίζει την w σε συμβολοσειρές x, y έτσι ώστε $xy = w$, και στη συνέχεια αντιγράφει την y στη 2η ταινία και αφήνει την x στην 1η.
Η M'' τρέχει την M_1 στην 1η ταινία και αν αυτή κάνει δεκτή τη x, τρέχει την M_2 στη 2η ταινία με είσοδο y. Έτσι $L(M'') = L(M_1)L(M_2)$.
Έστω τώρα $w \in L(M_1)L(M_2)$, και $w = xy$, όπου $x \in L(M_1)$ και $y \in L(M_2)$. Στην περίπτωση αυτή, η M'' έχει τη δυνατότητα να επιλέξει το διαχωρισμό $w = xy$, που θα επιτρέψει η M_1 να αποδεχθεί την x και η M_2 την y και επομένως η M'' να αποδεχθεί σε αυτόν τον υπολογισμό την w. Άρα $w \in L(M'')$.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014