ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 25: Γραμματικές Χωρίς Περιορισμούς

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1. Γραμ. Χωρίς Περιορισμούς
   - Ορισμός
   - Παράδειγμα
   - ΓΧΠ και αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Γραμματικές Χωρίς Περιορισμούς: παραγωγοί γλωσσών

- Η κλάση των γλωσσών που παράγεται από τις Γραμματικές Χωρίς Περιορισμούς (ΓΧΠ) είναι ακριβώς η κλάση των **αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών**.
- Υπενθύμιση: οι Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα:
  1. Έχουν ένα αλφάβητο V που διαιρείται σε ένα σύνολο τερματικών Σ και ένα σύνολο μη τερματικών $V - \Sigma$.
  2. Έχουν ένα πεπερασμένο σύνολο κανόνων της μορφής $A \to u$, όπου A ένα μη τερματικό σύμβολο και $u \in V^\star$.
  3. Ξεκινάνε τις παραγωγές από ένα αρχικό μη τερματικό σύμβολο - έστω S - και αντικαθιστούνε κάθε φορά το αριστερό μέλος ενός κανόνα με το αντίστοιχο δεξιό μέλος ώσπου να μην είναι δυνατές άλλες τέτοιες αντικαταστάσεις.
- Στις ΓΧΠ το αριστερό μέλος ενός κανόνα μπορεί να αποτελείται από οποιαδήποτε συμβολοσειρά τερματικών και μη τερματικών, που περιέχει τουλάχιστο ένα μη τερματικό.

Ορισμός Γραμματικών Χωρίς Περιορισμούς

Ορισμός 1

Μία Γραμματική ή ΓΧΠ ή σύστημα επαννεγγραφής είναι μία τετράδα $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου:

- V είναι ένα αλφάβητο
- $\Sigma \subseteq V$ είναι το σύνολο των τερματικών συμβόλων και $V - \Sigma$ το σύνολο των μη τερματικών
- $S \in V - \Sigma$ είναι το αρχικό σύμβολο και
- το R, το σύνολο των κανόνων, είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(V^\star(V - \Sigma)V^\star) \times V^\star$

Γράφουμε $u \rightarrow v$ αν $(u, v) \in R$. Επίσης, $u \Rightarrow_G v$ αν και μόνο αν, για $w_1, w_2 \in V^\star$ και ένα κανόνα $u' \rightarrow v' \in R, u = w_1 u' w_2$ και $v = w_1 v' w_2$.
Η $\Rightarrow_G^\star$ είναι η ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα της $\Rightarrow_G$.
Μία συμβολοσειρά $w \in \Sigma^\star$ παράγεται από την G αν και μόνο αν $S \Rightarrow_G^\star w$. Τότε, η γλώσσα $L(G)$ είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που παράγονται από την G.

Παράδειγμα ΓΧΠ

Η ακόλουθη γραμματική G παράγει τη γλώσσα $\{\alpha^n b^n c^n : n \geq 1\}$, όπου $G = (V, \Sigma, R, S)$ με

$$V = \{S, \alpha, b, c, A, B, C, T_\alpha, T_b, T_c\}$$

$$\Sigma = \{\alpha, b, c\}$$

$$\begin{aligned} R = \{&S \rightarrow ABCS, \\ &S \rightarrow T_c, \\ &CA \rightarrow AC, \\ &BA \rightarrow AB, \\ &CB \rightarrow BC, \\ &CT_c \rightarrow T_c c, \\ &CT_c \rightarrow T_b c, \\ &BT_b \rightarrow T_b b, \\ &BT_b \rightarrow T_\alpha b, \\ &AT_\alpha \rightarrow T_\alpha \alpha, \\ &T_\alpha \rightarrow e\} \end{aligned}$$

ΓΧΠ και αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Θεώρημα 2

Μία γλώσσα παράγεται από μία ΓΧΠ αν και μόνο αν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Ορισμός 3

Έστω $G = (V, \Sigma, R, S)$ μία γραμματική. Λέμε ότι η G υπολογίζει την $f : \Sigma^\star \mapsto \Sigma^\star$ αν, για κάθε $w, v \in \Sigma^\star$, το ακόλουθο ισχύει

$$SwS \Rightarrow_G^\star v \text{ αν και μόνο αν } v = f(w)$$

Δηλαδή, η συμβολοσειρά που αποτελείται από την είσοδο w, με ένα αρχικό σύμβολο της G σε κάθε πλευρά, παράγει ακριβώς μία συμβολοσειρά του $\Sigma^\star$: τη σωστή τιμή της $f(w)$.

Μία συνάρτηση $f : \Sigma^\star \mapsto \Sigma^\star$ ονομάζεται γραμματικά υπολογίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει γραμματική G η οποία την υπολογίζει.

Θεώρημα 4

Μία συνάρτηση $f : \Sigma^\star \mapsto \Sigma^\star$ είναι αναδρομική αν και μόνο αν είναι γραμματικά υπολογίσιμη.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014