ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 27: Μη Επιλυσιμότητα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1. Μη Επιλυσιμότητα
   - Το πρόβλημα του Τερματισμού
   - Το πρόβλημα του Τερματισμού με ΜΤ
   - Αναγωγή

Το πρόβλημα του Τερματισμού

- Φανταστικό πρόγραμμα *halts*(P, X): δέχεται ως είσοδο οποιοδήποτε πρόγραμμ P γραμμένο στην ίδια γλώσσα και μια είσοδο X για το πρόγραμμα P.

  Το *halts*(P, X) αποφασίζει πάντα σωστά αν το P θα τερμάτιζε με είσοδο X.

- Αν πράγματι υπάρχει ένα τέτοιο πρόγραμμα τότε θα μπορούσαμε να το χρησιμοποιήσουμε ως εξής:

  `diagonal(X)`

  α : `if halts(X,X) then goto` α `else τερμάτισε`

- Τερματίζει το `diagonal(diagonal)`;

  Τερματίζει αν η `halts(diagonal,diagonal)` επιστρέφει «όχι», δηλ. τερματίζει αν και μόνο αν δεν τερματίζει! ΑΤΟΠΟ.

- Άρα η αρχική υπόθεση ότι υπάρχει ένα πρόγραμμα *halts*(P, X) είναι λάθος. ΤΕΤΟΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

Το πρόβλημα του Τερματισμού με Μηχανές Turing

- Θεωρούμε τη γλώσσα:
  H={ «M» «w»: Η μηχανή Turing M τερματίζει με είσοδο w }
- Η γλώσσα H είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη: είναι η γλώσσα που ημιαποφασίζει η καθολική μηχανή Turing U.
- Αν η H είναι αναδρομική, τότε κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα είναι αναδρομική. Θα πρέπει να βρούμε μία μηχανή Turing M_0 που την αποφασίζει.
  Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει μία τέτοια M_0.

Θεώρημα 1

Η κλάση των αναδρομικών γλωσσών είναι ένα αυστηρό υποσύνολο της κλάσης των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών.

Θεώρημα 2

Η κλάση των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα.

Μη Επιλυσιμότητα (1/4)

- Η H δεν είναι αναδρομική, δηλ. δεν αποφασίζεται από κάποια μηχανή Turing.
- Σύμφωνα με τη Θέση Church-Turing κάθε αλγόριθμος μπορεί να μετατραπεί σε μηχανή Turing που τερματίζει ΓΟΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΕΙΣΟΔΟΥΣ.
- Άρα, δεν υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει, δεδομένης οποιασδήποτε μηχανής Turing M και συμβολοσειράς εισόδου w, αν η M δέχεται την w ή όχι.
- Προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχουν αλγόριθμοι λέγονται **μη αποφασίσιμα** ή **μη επιλύσιμα**.
- Για να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο χρησιμοποιούμε **αναγωγές**: δείχνουμε ότι αν κάποια γλώσσα L_2 ήταν ανδρομική, τότε το ίδιο θα ήταν και κάποια γλώσσα L_1 για την οποία ήδη ξέρουμε ότι δεν είναι αναδρομική.

Αναγωγή

Ορισμός 3

Έστω $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^\star$ δύο γλώσσες. Μία αναγωγή από την L_1 στην L_2 είναι μια αναδρομική συνάρτηση $\tau : \Sigma^\star \mapsto \Sigma^\star$ τέτοια ώστε $x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$.

Μη Επιλυσιμότητα (2/4)

Θεώρημα 4 (Μη επιλύσιμα προβλήματα για Μηχανές Turing)

1. *Δεδομένων μιας ΜΤ M και μιας συμβολοσειράς εισόδου w, τερματίζει η M με είσοδο w;*
2. *Δεδομένης μιας ΜΤ M, τερματίζει η M με είσοδο κενή ταινία;*
3. *Δεδομένης μιας ΜΤ M, υπάρχει έστω και μία συμβολοσειρά για την οποία τερματίζει η M;*
4. *Δεδομένης μιας ΜΤ M, τερματίζει η M για κάθε συμβολοσειρά εισόδου;*
5. *Δεδομένων δύο ΜΤ M_1 και M_2, τερματίζουν με τις ίδιες συμβολοσειρές εισόδου;*
6. *Δεδομένης μιας ΜΤ M είναι η γλώσσα που ημιαποφασίζει η M κανονική; Είναι χωρίς συμφραζόμενα; Είναι αναδρομική;*
7. *Υπάρχει σταθερή ΜΤ M για την οποία το εξής πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο: δεδομένης w, τερματίζει η M με είσοδο w;*

Μη Επιλυσιμότητα (3/4)

Θεώρημα 5 (Μη επιλύσιμα προβλήματα για ΓΧΠ)

1. *Για δεδομένη γραμματική G και συμβολοσειρά w, να αποφασιστεί εάν $w \in L(G)$.*
2. *Για δεδομένη γραμματική G να αποφασιστεί εάν $e \in L(G)$.*
3. *Για δεδομένες δύο γραμματικές G_1 και G_2, να αποφασιστεί εάν $L(G_1) = L(G_2)$.*
4. *Για μια τυχαία γραμματική G να αποφασιστεί αν $L(G) = \emptyset$*
5. *Υπάρχει συγκεκριμένη γραμματική G_0 για την οποία το εξής πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο: η απόφαση αν κάθε δεδομένη συμβολοσειρά w ανήκει στην $L(G_0)$.*

Μη Επιλυσιμότητα (4/4)

Θεώρημα 6 (Μη επιλύσιμα προβλήματα για ΓΧΣ)

1. *Δεδομένης μιας ΓΧΣ G ισχύει ότι $L(G) = \Sigma^\star$;*
2. *Δεδομένων δύο ΓΧΣ G_1 και G_2 ισχύει ότι $L(G_1) = L(G_2)$;.*
3. *Δεδομένων δύο αυτομάτων στοίβας M_1 και M_2 δέχονται αυτά ακριβώς την ίδια γλώσσα;*
4. *Δεδομένου ενός αυτομάτου στοίβας M να βρεθεί ένα ισοδύναμο αυτόματο στοίβας με τις λιγότερες δυνατές καταστάσεις.*

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014