



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 2: Σύνολα και σχέσεις

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



- 1 Σύνολα
 - Ορισμοί
 - Πράξεις
 - Ιδιότητες
 - Δυναμοσύνολο
 - Διαμέριση

- 2 Σχέσεις
 - Διατεταγμένο ζεύγος
 - Δυαδικές σχέσεις
 - Διατεταγμένες πλειάδες

Ορισμός Συνόλων

Ορισμός 1

Σύνολο (set) είναι μια συλλογή καλώς καθορισμένων και διακριτών αντικειμένων, που αποτελούν τα μέλη (ή στοιχεία) του.

- Αν το z είναι μέλος τους συνόλου L , τότε γράφουμε $z \in L$.
- Αν το z δεν είναι μέλος του συνόλου L , τότε γράφουμε $z \notin L$.
- Το **κενό σύνολο** δεν έχει μέλη και συμβολίζεται με \emptyset .
- Δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια μέλη.

π.χ. τα σύνολα $G = \{1, 4, 3\}$ και $K = \{4, 3, 1\}$ είναι ίσα

Χαρακτηριστικά Συνόλων

- Συχνά δε γίνεται να ορίσουμε ένα σύνολο με παράθεση των στοιχείων του, ακόμη και όταν αυτά είναι **πεπερασμένα**.
- Παράδειγμα συνόλου με άπειρα στοιχεία είναι οι φυσικοί αριθμοί

$$N = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Εναλλακτικά τα σύνολα αναπαριστώνται με αναφορά σε άλλα σύνολα και στις ιδιότητες που έχουν ή όχι τα μέλη.
Αν το σύνολο A είναι γνωστό τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο B ως $B = \{x : x \in A \text{ και } x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}$

- Παράδειγμα

$$N = \{x : \text{το } x \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$$

$$\text{small}N = \{x : x \in N \text{ και } x < 10\}$$

Υποσύνολα

Ορισμός 2

Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** (subset, \subseteq) ενός συνόλου B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

$$\text{π.χ. } \{G, B\} \subseteq \{R, B, G\}$$

- Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.
- Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- Το σύνολο A είναι **κανονικό (γνήσιο) υποσύνολο** του B ($A \subset B$) αν είναι υποσύνολο του B αλλά όχι ισο με αυτό.
 - π.χ. $\{G, B\} \subset \{R, B, G\}$
- Δύο σύνολα A και B είναι ίσα, αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Πράξεις συνόλων

Ένωση $A \cup B$: το σύνολο των αντικειμένων - μέλη του A **ή** του B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- π.χ. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Τομή $A \cap B$: το σύνολο των αντικειμένων - μέλη του A **και** του B .

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$$

- π.χ. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

Διαφορά $A - B$: το σύνολο των αντικειμένων - μέλη του A **και όχι** του B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

- π.χ. $\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} = \{1\}$

Ιδιότητες των πράξεων I

Ανακλαστική Η ένωση και η τομή είναι ανακλαστικές

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Αντιμεταθετική Η ένωση και η τομή είναι αντιμεταθετικές

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

Προσεταιριστική Η ένωση και η τομή είναι προσεταιριστικές

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Επιμεριστική Η ένωση επιμερίζεται στην τομή και η τομή στην ένωση

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ιδιότητες των πράξεων II

Απορροφητικό στοιχείο $(A \cup B) \cap A = A$
 $(A \cap B) \cup A = A$

Νόμοι De Morgan $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Ένωση πολλών Η ένωση των συνόλων μιας συλλογής S

$$\bigcup S = \{x : x \text{ είναι σε κάποιο σύνολο } P \in S\}$$

π.χ. $S = \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3, 2\}\}, \bigcup S = \{1, 2, 3, 5\}$

Τομή πολλών Η τομή των συνόλων μιας συλλογής S

$$\bigcap S = \{x : x \text{ είναι σε όλα τα σύνολα } P \in S\}$$

π.χ. $S = \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3, 2\}\}, \bigcap S = \{2\}$

Ξένα σύνολα αυτά που η τομή τους είναι το κενό σύνολο

Δυναμοσύνολο

Ορισμός 3 (Δυναμοσύνολο)

Το **δυναμοσύνολο** (powerset) ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του και συμβολίζεται με 2^A .

- Αν $A = \{1, 2, 3\}$
τότε $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- Το κενό σύνολο και το ίδιο το σύνολο είναι μέλη του δυναμοσυνόλου

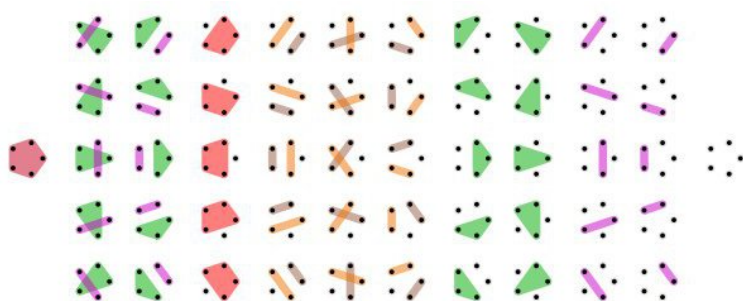
Διαμέριση

Ορισμός 4 (Διαμέριση)

Μια **διαμέριση** (partition) ενός μη κενού συνόλου A είναι ένα υποσύνολο P του 2^A τέτοιο ώστε να μην περιέχει το \emptyset και κάθε μέλος του A να ανήκει σε ένα μόνο μέλος του P .

- Το P είναι διαμέριση του A , αν
 - 1 το P περιέχει μόνο υποσύνολα του A
 - 2 κάθε μέλος του P είναι μη κενό
 - 3 τα μέλη του P είναι ξένα μεταξύ τους
 - 4 $\bigcup P = A$
- Αν $A = \{1, 2, 3\}$ τότε μια διαμέριση είναι $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
μια άλλη διαμέριση είναι $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ κλπ
- Κάθε μοναδιαίο σύνολο $\{x\}$ έχει μόνο μία διαμέριση $\{\{x\}\}$
- Κάθε μη κενό σύνολο A έχει τη διαμέριση $\{\{A\}\}$

Διαμέριση



Σχήμα : Ένα σύνολο με 5 στοιχεία έχει 52 διαμερίσεις
 (Πηγή: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:
 Set_partitions_5;_circles.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Set_partitions_5;_circles.svg))

Διατεταγμένο ζεύγος

Ορισμός 5 (Διατεταγμένο ζεύγος)

Ένα **διατεταγμένο ζεύγος** (ordered pair) (a,b) με στοιχεία a και b διαφέρει από ένα σύνολο στο ότι

- 1 διακρίνεται η σειρά των στοιχείων του
- 2 τα στοιχεία του δεν είναι απαραίτητα διακριτά

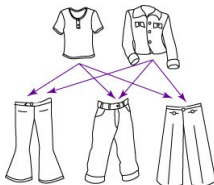
- $(a,b) \neq (b,a)$, αλλά $\{a,b\} = \{b,a\}$
- Για δύο διατεταγμένα ζεύγη (a,b) και (c,d)
 - $(a,b) = (c,d)$, αν $a = c$ και $b = d$
 - $(a,b) \neq (c,d)$, αν $a \neq c$ ή $b \neq d$

Καρτεσιανό γινόμενο

Ορισμός 6 (Καρτεσιανό γινόμενο)

Το **Καρτεσιανό γινόμενο** (Cartesian product) δύο συνόλων ($A \times B$) είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με $a \in A$ και $b \in B$.

- Για δύο σύνολα $Rank = \{1, 4, 7\}$ και $Suit = \{\clubsuit, \diamond\}$
 - $Rank \times Suit = \{(1, \clubsuit), (1, \diamond), (4, \clubsuit), (4, \diamond), (7, \clubsuit), (7, \diamond)\}$



Σχήμα : Πιθανά ζεύγη από πουκάμισα και πατελόνια

(Πηγή: http://www.learner.org/courses/learningmath/number/session4/part_a/multiplication.html)

Δυαδικές σχέσεις

Ορισμός 7 (Δυαδική σχέση)

Μια **δυαδική σχέση** (binary relation) ανάμεσα σε δύο σύνολα είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$

- Παραδείγματα
 - η σχέση **μικρότερο από** $\{(i, j) : i, j \in \mathbb{N} \text{ και } i < j\}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 - η σχέση **διαιρείται ακριβώς από** $\{(4, 2), (1, 1), (6, 3)\}$ είναι υποσύνολο του $\{1, 4, 6\} \times \{1, 2, 3\}$

Διατεταγμένες πλειάδες

Ορισμός 8 (Διατεταγμένη πλειάδα)

Μια **διατεταγμένη πλειάδα** ή **n -άδα** $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ σχηματίζεται από n αντικείμενα $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, όχι απαραίτητα διαφορετικά.

- Το α_i είναι το i -οστό στοιχείο της πλειάδας $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Δύο πλειάδες $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ και $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ είναι **ίσες** αν και μόνο αν
 - έχουν *ίδιο μήκος* ακολουθίας: $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ και $n = m$
 - και έχουν *ίδια διατεταγμένα στοιχεία* :
 $\alpha_i = \beta_i$ για $i = 1, \dots, n$
- Οι πλειάδες $(2, 2, 2)$, $(2, 2)$, $(2, (2, 2))$ είναι όλες διαφορετικές.

n -αδικό Καρτεσιανό γινόμενο

Ορισμός 9 (n -αδικό Καρτεσιανό γινόμενο)

Το n -αδικό Καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \dots \times A_n$ για τα σύνολα A_1, \dots, A_n είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ με $\alpha_i \in A_i$ για $i = 1, \dots, n$.

- Αν τα A_i ταυτίζονται ($A_i = A$ για $i = 1, \dots, n$), το n -αδικό Καρτεσιανό γινόμενο $A \times A \times \dots \times A$ γράφεται και A^n
- $N^2 = N \times N$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών φυσικών αριθμών
 - Προσοχή: Διατεταγμένο ζεύγος φυσικών (a, b) δε σημαίνει ότι $a < b$

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014