ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 3: Συναρτήσεις - σχέσεις

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Συναρτήσεις Ι

Ορισμός 1 (Συνάρτηση)

Συνάρτηση (function) από το σύνολο A στο σύνολο B ($A \mapsto B$) είναι μία *δυαδική σχέση* R από το A στο B, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται με *ακριβώς ένα* στοιχείο του B.

- Γράφουμε f:A$\mapsto$B αν η f είναι συνάρτηση από το A στο B.
- Παράδειγμα:
  Έστω ότι το σύνολο Π περιέχει τις πόλεις x της Ελλάδας και το σύνολο N περιέχει τους νομούς y της Ελλάδας. Ποιά από τις παρακάτω σχέσεις είναι συνάρτηση;
  R_1=$\{(x, y)$: η πόλη $x \in \Pi$ είναι στο νομό $y \in N\}$
  R_2=$\{(x, y)$: ο νομός $x \in N$ περιλαμβάνει την πόλη $y \in \Pi\}$
  Η R_1 είναι συνάρτηση: $\forall x$ ορίζει ακριβώς ένα y.
  Η R_2 δεν είναι συνάρτηση: για κάποιο x ορίζει πολλά y.

Συναρτήσεις II

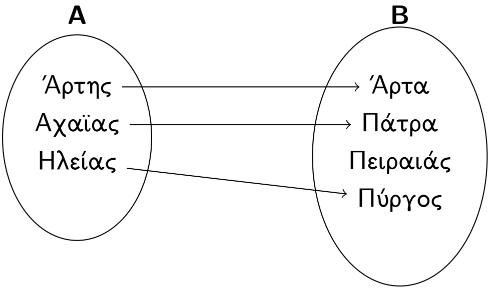
- Έστω η συνάρτηση f:A$\mapsto$B:
  - Το A είναι το **πεδίο ορισμού** της f.
  - Γράφουμε ως $f(a)$ εκείνο το b για το οποίο $(a, b) \in f$. Για να οριστεί η f αρκεί να οριστεί το $f(a)$ για κάθε $a \in A$.
  - Η **εικόνα** του A′⊆A, ως προς την f είναι f[A′]={$f(a)$: a ∈A′}.
  - Το **πεδίο τιμών** της f είναι η *εικόνα* του *πεδίου ορισμού* της.
- Αν το *πεδίο ορισμού* είναι *Καρτεσιανό γινόμενο*, τότε ένα ζεύγος παρενθέσεων παραλείπεται.
  Παράδειγμα: Αν f:N×N$\mapsto$N, έτσι ώστε η εικόνα του (m,n) ως προς f να είναι m+n, γράφούμε f((m,n))=f(m,n)=m+n
- Αν $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mapsto B$ και $f(\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n\ ) = b$, όπου $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, με $b \in B$, τότε ονομάζουμε
  - **ορίσματα** ή **μεταβλητές** της f
  - αντίστοιχη **τιμή** της f

Είδη συναρτήσεων I

Ορισμός 2 (Ένα προς ένα)

Μία συνάρτηση f:A$\mapsto$B είναι **ένα προς ένα** (injective), αν για κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία $\alpha,\alpha' \in$A, $f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

Παράδειγμα: Αν A το σύνολο των νομών και B το σύνολο των πόλεων και f=$\{(\alpha,\beta)$: το α έχει πρωτεύουσα το $\beta\}$

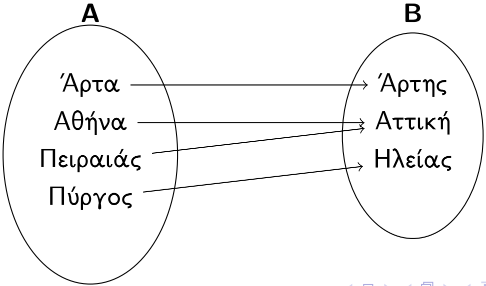


Είδη συναρτήσεων ΙΙ

Ορισμός 3 (Έπί)

Μία συνάρτηση f:A$\mapsto$B είναι **επί** (surjective) του B, αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A ως προς την f.

Παράδειγμα: Αν A το σύνολο των πόλεων και B το σύνολο των νομών και f=$\{(\alpha,\beta)$: το α βρίσκεται στο β $\}$

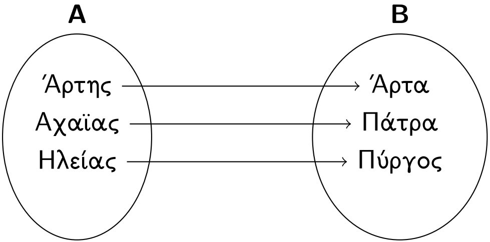


Είδη συναρτήσεων III

Ορισμός 4 (Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία)

Μία συνάρτηση f:A$\mapsto$B είναι **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία** (bijection) ανάμεσα στα A και B, αν είναι συγχρόνως *ένα προς ένα* και *επί* του B

Παράδειγμα: Αν A το σύνολο των νομών και B το σύνολο των πρωτευουσών και $f=\{(\alpha,\beta)$: το α έχει πρωτεύουσα το $\beta\}$



Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός 5 (Αντίστροφη)

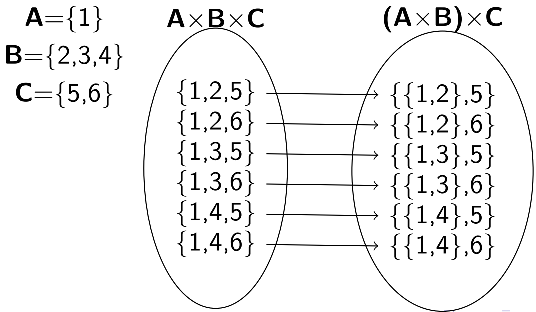
Κάθε δυαδική σχέση $R \subseteq A \times B$ έχει μία αντίστροφη $R^{-1} \subseteq B \times A$, η οποία ορίζεται ως $\{(\beta,\alpha) : (\alpha,\beta) \in R\}$

- Η αντίστροφη μιας συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικά συνάρτηση.
- Μία συνάρτηση $f : A \mapsto B$ μπορεί να μην έχει αντίστροφη, αν υπάρχει κάποιο $\beta \in B$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\alpha \in A$ $f(\alpha) \neq \beta$
- Αν η $f : A \mapsto B$ είναι *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία*, τότε και η f^{-1} είναι συνάρτηση και αμφιμονοσήμαντη.
  - Επιπλέον, $f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ και $f(f^{-1}(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$.

Φυσικός ισομορφισμός

- Αν η $f\!:\!A\mapsto B$ είναι *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* τότε είναι δυνατό να θεωρήσουμε ότι το στοιχείο a στο πεδίο ορισμού και η εικόνα του $f(a)$ είναι *ταυτόσημα*.
    - Μία τέτοια *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* ονομάζεται και **φυσικός ισομορφισμός**.

Παράδειγμα: Για οποιαδήποτε σύνολα A,B,C υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός από το $A\times B\times C$ στο $(A\times B)\times C$



Σύνθεση δυαδικών σχέσεων

Ορισμός 6 (Σύνθεση δυαδικών σχέσεων)

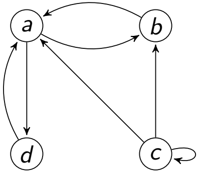
Αν οι Q και R είναι δυαδικές σχέσεις, η σύνθεσή τους $Q \circ R$ είναι η σχέση $\{(a,b)$:για κάποιο c, ισχύει $(a,c) \in Q$ και $(c,b) \in R\}$

- Αν f:A$\mapsto$B και g:B$\mapsto$C, τότε η σύνθεση της f και g $(f \circ g)$ είναι μια νέα συνάρτηση h:A$\mapsto$C, όπου $h(\alpha)=f(g(\alpha))$ για κάθε $\alpha \in$A
- Παράδειγμα: Έστω η f:σκύλοι$\mapsto$κάτοχοι και g:άνθρωποι$\mapsto$ηλικία, τότε η $f \circ g$=:σκύλοι$\mapsto$ηλικία συσχετίζει κάθε σκύλο με την ηλικία του κατόχου του.

Κατευθυνόμενος γράφος

- Αν A ένα σύνολο και $R \subseteq A \times A$ μία σχέση, αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα **κατευθυνόμενο γράφο** (γράφο με κατεύθυνση στις ακμές).
- Στον κατευθυνόμενο γράφο της R
  - τα *στοιχεία* του A αναπαριστώνται με κύκλους (**κόμβοι**)
  - τα ζεύγη $(\alpha,\beta) \in R$ αναπαριστώνται με βέλη (**ακμές**) που κατεύθυνονται από τον κόμβο α στον β

Παράδειγμα: η σχέση $R = \{(a,b), (b,a), (a,d), (d,a), (c,b), (c,c), (c,a)\}$ αναπαριστάται από το γράφο

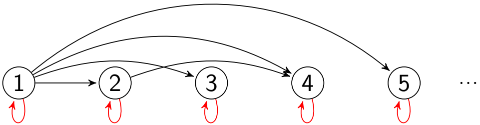


Ανακλαστική σχέση

Ορισμός 7 (Ανακλαστική σχέση)

Μία σχέση R⊆A×A είναι **ανακλαστική** αν (α,α)∈R για κάθε α∈A.

- Ο κατευθυνόμενος γράφος μιας ανακλαστικής σχέσης περιέχει βρόχους από κάθε κόμβο στον εαυτό του.
- Παράδειγμα: Η σχέση «διαιρέτης του» ορισμένη στο N*

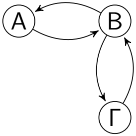


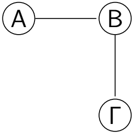
Συμμετρική σχέση

Ορισμός 8 (Συμμετρική σχέση)

Μία σχέση R είναι **συμμετρική** αν (β,α)∈R, αν και μόνο αν (α,β)∈R.

- Στον κατευθυνόμενο γράφο μιας συμμετρικής σχέσης για κάθε ακμή υπάρχει και η ακμή αντίθετης κατεύθυνσης.
- Μία συμμετρική σχέση χωρίς ζεύγη (α,α) αναπαριστάται με ένα **μη κατευθυνόμενο γράφο** ή απλά **γράφο**.
- Παράδειγμα: Η σχέση «συνεργάτης με» ορισμένη σε ένα σύνολο ανθρώπων





Αντισυμμετρική σχέση

Ορισμός 9 (Αντισυμμετρική σχέση)

Μία σχέση R είναι **αντισυμμετρική** αν όποτε (α,β)∈R και α≠β, τότε (β,α)∉R.

- Παράδειγμα: {(α,β):α,β∈ N και α είναι μικρότερο του β}
- Μια σχέση μπορεί να μην είναι ούτε συμμετρική ούτε αντισυμμετρική
  - Παράδειγμα: {(α,β):α,β∈ W και α θαυμάζει τον β} αν W το σύνολο των συγγραφέων,
    – αν ο «α θαυμάζει τον β» δεν συνεπάγεται ούτε αποκλείει το «ο β θαυμάζει τον α»

Τύποι δυαδικών σχέσεων

- Μία σχέση R είναι **μεταβατική**

  αν όποτε (α,β)∈R και (β,γ)∈R, τότε (α,γ)∈R.
- Μία *ανακλαστική*, *συμμετρική* και *μεταβατική* σχέση, ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας**.
  - Ο κατευθυνόμενος γράφος είναι ένα σύνολο συνδεδεμένων συνιστωσών, όπου σε κάθε συνιστώσα κάθε ζεύγος κόμβων συνδέεται με μία ακμή.
- Οι *συνδεδεμένες συνιστώστες* μιας *σχέσης ισοδυναμίας* ονομάζονται **κλάσεις ισοδυναμίας**.
  - Συμβολίζουμε με [α] την κλάση ισοδυναμίας με ένα στοιχείο α, αν η σχέση ισοδυναμίας R προκύπτει από τα συμφραζόμενα. Δηλαδή [α]={β: (α, β)∈ R}

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014