ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 17: ΑΣ & Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

1. ΑΣ & Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα
   - ΓΧΣ → ΑΣ
   - ΑΣ → ΓΧΣ

Θεώρημα Ισοδύναμης Αναπαράστασης

Θεώρημα 1

Η κλάση των γλωσσών που γίνονται δεκτές από τα αυτόματα στοίβας είναι ακριβώς η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα.

Απόδειξη

Η απόδειξη δίνεται σε δύο τμήματα:

Λήμμα 1

Κάθε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα παράγει γλώσσα που γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο στοίβας.

Λήμμα 2

Αν μια γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο στοίβας, τότε αυτή είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

ΓΧΣ → ΑΣ

Λήμμα 1

Κάθε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα παράγει γλώσσα που γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο στοίβας.

Απόδειξη Κατασκευή ενός ΑΣ M για δοθείσα γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$, τέτοιου ώστε $L(M) = L(G)$

Το $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$

- έχει ως αλφάβητο στοίβας το σύνολο V των τερματικών και μη τερματικών συμβόλων της γραμματικής
- σχέση μετάβασης Δ που περιλαμβάνει τις
  1. $((p, \epsilon, \epsilon), (q, S))$
     εισάγει στη στοίβα το αρχικό σύμβολο της G
  2. $((q, \epsilon, A), (q, x))$
     για κάθε κανόνα $A \to x$ στο R
  3. $((q, a, a), (q, \epsilon))$
     για κάθε $a \in \Sigma$

ΓΧΣ → ΑΣ

Απόδειξη (συνέχεια)

Ισχυρισμός

Έστω $w \in \Sigma^*$ και $\alpha \in (V - \Sigma)V^* \cup \{\epsilon\}$. Τότε

$$S \overset{L}{\Rightarrow}{}^{*} w\alpha \text{ αν και μόνο αν } (q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha) \tag{1}$$

Μόνο αν: με επαγωγή ως προς το μήκος της αριστερότερης παραγωγής του w από το S

- *Βασικό βήμα*: Αν η παραγωγή έχει μήκος 0, τότε $w = \epsilon$ και $\alpha = S$ και κατά συνέπεια ισχύει η (1).
- *Επαγωγική υπόθεση*: Υποθέτουμε ότι αν $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^{*} w\alpha$ μέσω μιας παραγωγής μήκους n ή μικρότερο με $n \geq 0$, τότε $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$.
- *Επαγωγικό βήμα*: Έστω $S = u_0 \overset{L}{\Rightarrow} u_1 \overset{L}{\Rightarrow} \ldots \overset{L}{\Rightarrow} u_n \overset{L}{\Rightarrow} u_{n+1} = w\alpha$ μία αριστερότερη παραγωγή της $w\alpha$ από το S και έστω A το αριστερότερο μη τερματικό της u_n.

ΓΧΣ → ΑΣ

Απόδειξη (συνέχεια)

Τότε $u_n = xA\beta$ και $u_{n+1} = x\gamma\beta$ με $x \in \Sigma^*, \beta, \gamma \in V^*$ και $A \to \gamma$ είναι ένας κανόνας στο R.

Εφόσον υπάρχει μία αριστερότερη παραγωγή μήκους n της $u_n = xA\beta$ από το S, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης

$$(q, x, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, A\beta) \tag{2}$$

Αφού ο $A \to \gamma$ είναι ένας κανόνας του R, τότε από την κατασκευή της μηχανής M έχουμε

$$(q, \epsilon, A\beta) \vdash_M (q, \epsilon, \gamma\beta) \tag{3}$$

μέσω μιας μετάβασης τύπου 2.

Παρατηρούμε ότι η u_{n+1} είναι $w\alpha$ και ταυτόχρονα είναι $x\gamma\beta$. Άρα,

$$\exists y \in \Sigma^* : w = xy \text{ και } y\alpha = \gamma\beta$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τις (2) και (3) ως εξής:

$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, \gamma\beta) \tag{4}$$

ΓΧΣ → ΑΣ

Απόδειξη (συνέχεια)
Επειδή όμως $y\alpha = \gamma\beta$ έχουμε

$$(q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha) \tag{5}$$

μέσω μιας ακολουθίας $|y|$ στον αριθμό μεταβασεων τύπου 3.
Με συνδυασμό της (4) και (5) ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα της απόδειξης.
Αν: με επαγωγή ως προς τον αριθμό των μεταβάσεων τύπου 2 της μηχανής M θα δείξουμε ότι αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$ με $w \in \Sigma^*$ και $\alpha \in (V - \Sigma)V^* \cup \{\epsilon\}$ τότε $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha$.

- *Βασικό βήμα*: Αφού κάθε υπολογισμός αρχίζει με μετάβαση τύπου 2, αυτό σημαίνει ότι αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$ χωρίς μεταβάσεις τύπου 2, τότε $w = \epsilon$ και $\alpha = S$, δηλ. ισχύει το ζητούμενο.
- *Επαγωγική υπόθεση*: Αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$ σε έναν υπολογισμό με n ή λιγότερα βήματα τύπου 2, $n \geq 0$, τότε $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha$.

ΓΧΣ → ΑΣ

Απόδειξη (συνέχεια)

- *Επαγωγικό βήμα*: Υποθέτουμε ότι $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$ σε $n+1$ βήματα και θεωρούμε την προτελευταία μετάβαση, έστω

$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, A\beta) \vdash_M (q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha) \qquad (6)$$

όπου $w = xy$ για $x, y \in \Sigma^*$ και $A \to \beta$ ένας κανόνας της γραμματικής. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $S \overset{L}{\Rightarrow}^* xA\beta$ και επομένως $S \overset{L}{\Rightarrow}^* x\gamma\beta$.
Εφόσον όμως $(q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$ πιθανώς μέσω μεταβάσεων τύπου 3, προκύπτει ότι $y\alpha = \gamma\beta$ και άρα $S \overset{L}{\Rightarrow}^* xy\alpha = w\alpha$.
Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού

$$S \overset{L}{\Rightarrow}^* w\alpha \text{ αν και μόνο αν } (q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \alpha)$$

που θεμελιώνει την αλήθεια του Λήμματος 1. Πράγματι για $\alpha = \epsilon$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως $S \overset{L}{\Rightarrow}^* w$ αν και μόνο αν $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$, δηλ. $w \in L(G)$ αν και μόνο αν $w \in L(M)$.

ΑΣ → ΓΧΣ

Λήμμα 2

Αν μία γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο στοίβας, τότε αυτή είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Απόδειξη

παραλείπεται

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014