ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 21: Υπολογισμοί ΜΤ - Αναδρομικές Γλώσσες

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μηχανές Turing ως αναγνωριστές γλώσσας

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ και $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ και η αρχική συνολική κατάσταση της M με είσοδο w: $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$

Ορισμός 1 (Αποδοχή και απόρριψη συμβολοσειράς)

Έστω M τέτοια ώστε $H = \{y, n\}$.

- Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι y ονομάζεται **συνολική κατάσταση αποδοχής**.

  Η M **δέχεται** την $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση αποδοχής.

- Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι n ονομάζεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.

  Η M **απορρίπτει** την w αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Γλώσσες που αποφασίζονται και αναδρομικές

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$

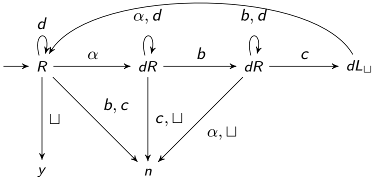
Ορισμός 2 (Γλώσσες που αποφασίζονται και αναδρομικές)

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ το **αλφάβητο εισόδου** της M.

- Επειδή το Σ_0 είναι υποσύνολο, επιτρέπουμε στη μηχανή να χρησιμοποιεί επιπλέον σύμβολα, εκτός αυτών που μπορεί να εμφανίζονται στην είσοδό της.
- Η M **αποφασίζει** τη γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ ισχύει:

  αν $w \in L$, η M δέχεται την w και αν $w \notin L$, η M την απορρίπτει.
- Ονομάζουμε μια γλώσσα **αναδρομική** αν υπάρχει μηχανή που την αποφασίζει: όταν ξεκινά με είσοδο w, πάντα τερματίζει στη σωστή κατάσταση τερματισμού (y αν $w \in L$, n αν $w \notin L$)

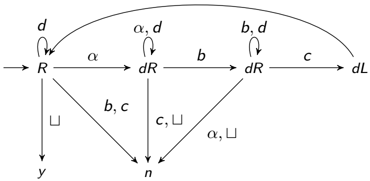
Παράδειγμα (1/2)



Η μηχανή αποφασίζει την $L = \{\alpha^n b^n c^n : n \geq 0\}$

- Η μηχανή y προσθέτει την κατάσταση αποδοχής y, ενώ η n προσθέτει την κατάσταση n
- Με είσοδο $\alpha^n b^n c^n$ λειτουργεί σε n φάσεις. Σε κάθε φάση:
  1. ξεκινά από τα αριστερά της συμβολοσειράς και ψάχνει προς τα δεξιά ένα α
  2. Όταν βρει α το αντικαθιστά με d και ψάχνει πιο δεξιά ένα b
  3. Όταν βρει b το αντικαθιστά με d και ψάχνει πιο δεξιά ένα c
  4. Όταν βρει c και αντικατασταθεί με d, η κεφαλή επιστρέφει στο αριστερό άκρο. Ξεκινά η επόμενη φάση.

Παράδειγμα (2/2)



- Αν σε οποιοδήποτε σημείο η μηχανή διαπιστώσει ότι η συμβολοσειρά δεν ανήκει στο $\alpha^* b^* c^*$ ή ότι ένα σύμβολο υπάρχει περισσότερες φορές από όσες χρειάζεται (π.χ. συναντά b ενώ ψάχνει για α), τότε εισέρχεται στη n και απορρίπτεται.
- Αν συναντήσει το δεξιό άκρο της εισόδου ενώ ψάχνει για α, όλη η είσοδος έχει αντικατασταθεί με d, και άρα ήταν της μορφής $\alpha^n b^n c^n$.

Αναδρομικές συναρτήσεις

- Οι MT μπορούν να παράγουν πιο σύνθετη έξοδο από «ναι» ή «όχι»

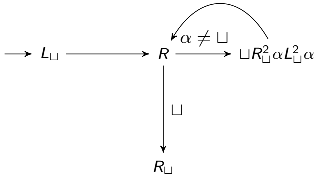
Ορισμός 3 (Αναδρομική συνάρτηση)

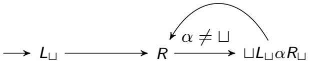
Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ όπου $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και έστω $w \in \Sigma_0^*$.

- Αν η M τερματίζει με είσοδο w και $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}u)$ για $u \in \Sigma_0^*$, τότε το u ονομάζεται **έξοδος της M με είσοδο** w και συμβολίζεται με $M(w)$.
- Έστω f συνάρτηση από το Σ_0^* στο Σ_0^*. Η M **υπολογίζει** την f αν, με κάθε $w \in \Sigma_0^*$ η M τερματίζει και η ταινία τότε περιέχει $\triangleright \sqcup f(w)$, δηλαδή $\forall w \in \Sigma_0^*, M(w) = f(w)$
- Μια συνάρτηση ονομάζεται **αναδρομική** αν υπάρχει M που την υπολογίζει.

Παράδειγμα 1

- Η συνάρτηση $\kappa : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$, η οποία ορίζεται ως $\kappa(w) = ww$, μπορεί να υπολογιστεί από τη μηχανή $CS_{\leftarrow}$, δηλ. τη μηχανή αντιγραφής ακολουθούμενη από τη μηχανή μετατόπισης.





Αναδρομικές συναρτήσεις

- Οι συμβολοσειρές στο $\{0,1\}^*$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το δυαδικό συμβολισμό των μη αρνητικών ακεραίων, όπου κάθε $w = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in \{0,1\}^*$ αναπαριστά τον αριθμό $num(w) = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \ldots + \alpha_n$
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $0 \cup 1(0 \cup 1)^*$.
- Άρα οι ΜΤ που μπορούν να υπολογίζουν συναρτήσεις $\{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, μπορούν να θεωρηθούν μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.
- Αριθμητικές συναρτήσεις με πολλές μεταβλητές μπορούν να υπολογιστούν από ΜΤ που υπολογίζουν συναρτήσεις $\{0,1,;\}^* \mapsto \{0,1\}^*$, όπου το «;» χρησιμοποιείται για να διαχωρίζει τις δυαδικές μεταβλητές.

Αναδρομικές συναρτήσεις

Ορισμός 4 (Αναδρομική συνάρτηση στο σύνολο $\mathbb{N}$)

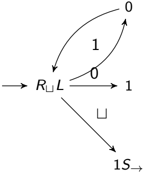
Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μία ΜΤ τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$ και έστω f μία οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\mathbb{N}^k$ στο $\mathbb{N}$ για κάποιο $k \geq 1$.

- Λέμε ότι η M **υπολογίζει** την f αν $\forall w_1, \ldots, w_k \in 0 \cup 1\{0,1\}^\star$, $num(M(w_1; \ldots ; w_k)) = f(num(w_1), \ldots, num(w_k))$, δηλ. ξεκινώντας με τις δυαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών $n_1, \ldots, n_k$ πάνω στην ταινία, η M τερματίζει έχοντας στην ταινία συμβολοσειρά που αναπαριστά το $f(n_1, \ldots, n_k)$.
- Μια συνάρτηση $f : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ ονομάζεται **αναδρομική** αν υπάρχει ΜΤ M που υπολογίζει την f.

- Δε μπορούμε να γνωρίζουμε αν μία ΜΤ υπολογίζει μία συνάρτηση (δηλ. τερματίζει) για όλες τις εισόδους της.

Παράδειγμα

Μηχανή που υπολογίζει τη συνάρτηση $succ(n) = n + 1$



- Βρίσκει πρώτα το δεξιό άκρο της εισόδου και μετά πηγαίνει προς τα αριστερά.
- Εφόσον βρίσκει 1 τα μεταβάλλει όλα σε 0.
- Όταν συναντήσει ένα 0, το μεταβάλλει σε 1 και τερματίζει.
- Αν συναντήσει $\sqcup$, αυτό σημαίνει ότι η αναπαράσταση του αριθμού αποτελείται μόνο από 1 (είναι δύναμη του δύο μείον ένα): γράφει ξανά 1 στη θέση του $\sqcup$ και τερματίζει, αφού μετακινήσει όλη τη συμβολοσειρά μία θέση προς τα δεξιά.

Ημιαπόφαση - Αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Ορισμός 5 (Αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες)

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μία ΜΤ, έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο, και έστω $L \subseteq \Sigma_0^*$ μία γλώσσα.

- Λέμε ότι η M **ημιαποφασίζει** την L αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ ισχύει: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w.
- Μία γλώσσα L είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν υπάρχει μία ΜΤ M που ημιαποφασίζει την L.

- Όταν η M δέχεται είσοδο $w \in L$, απαιτούμε να τερματίσει.
- Αν $w \in \Sigma_0^* - L$ τότε η M δε θα εισέλθει ποτέ στην κατάσταση τερματισμού (θα συνεχίσει τον υπολογισμό της επ' άπειρον).
- Οι ΜΤ που ημιαποφασίζουν γλώσσες δεν είναι αλγόριθμοι: δεν είναι χρήσιμες για να αποφασίσουμε αν μία w ανήκει στην L, επειδή αν $w \notin L$, δε θα ξέρουμε ποτέ αν έχουμε περιμένει αρκετά για μια απάντηση.

Αναδρομικές και αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Θεώρημα 6

Αν μία γλώσσα είναι αναδρομική, τότε είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Απόδειξη:

- Αρκεί να κατασκευάσουμε μια διαφορετική ΜΤ η οποία να ημιαποφασίζει, αντί να αποφασίζει, τη γλώσσα: μπορούμε να κάνουμε την κατάσταση απόρριψης n μη τερματική.
- Δοθείσης μιας $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει την L ορίζουμε τη μηχανή M' που ημιαποφασίζει την L ως εξής: η $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$, όπου δ' είναι απλώς η δ επαυξημένη με τις μεταβάσεις $\delta'(n, \alpha) = (n, \alpha)$ για κάθε $\alpha \in \Sigma$.

Αναδρομικές και αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

Μπορούμε πάντα να μετασχηματίζουμε οποιαδήποτε ΜΤ που ημιαποφασίζει μια γλώσσα σε έναν πραγματικό αλγόριθμο που αποφασίζει την ίδια γλώσσα·

- ΟΧΙ.
- Υπάρχουν αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες που δεν είναι αναδρομικές.

Θεώρημα 7 (Κλειστότητα)

Αν η L είναι μια αναδρομική γλώσσα, τότε το συμπλήρωμά της $\overline{L}$ είναι επίσης αναδρομική.

- Η κλάση των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014