



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 22: Μηχανές Turing Πολλαπλών Ταινιών

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

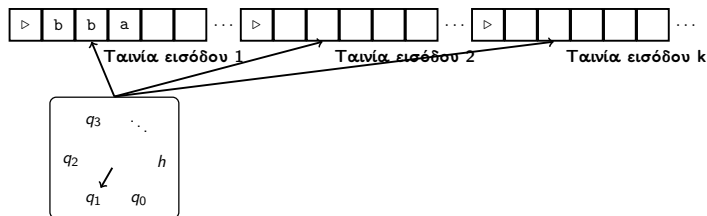
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Αξία επεκτάσεων στο βασικό μοντέλο της ΜΤ

- Οι Μηχανές Turing μπορούν να πραγματοποιήσουν αρκετά ισχυρούς υπολογισμούς.
- Όλες οι επεκτάσεις του μοντέλου που έχουν προταθεί **δεν προσθέτουν στις κλάσεις των υπολογίσιμων συναρτήσεων ή των αποφασίσιμων γλωσσών.**
- Τα «νέα» βελτιωμένα μοντέλα μπορούν να προσομοιωθούν από το βασικό μοντέλο της Μηχανής Turing.
- Με τα αποτελέσματα αυτά μπορούμε **να χρησιμοποιούμε επιπρόσθετα χαρακτηριστικά** για να συγκεκριμένα προβλήματα, **εξακολουθώντας να βασιζόμαστε στη θεωρία των βασικών Μηχανών Turing.**

Πολλαπλές Ταινίες



Πεπερασμένος έλεγχος

- Η ΜΤ μπορεί να διαβάσει σε ένα βήμα τα σύμβολα που διαβάζονται από όλες τις κεφαλές.
- Ανάλογα με τα σύμβολα αυτά και την τρέχουσα κατάσταση μπορεί να:
 - ξαναγράψει κάποια από τα τετράγωνα που έχουν σαρωθεί
 - μετακινήσει κάποιες από τις κεφαλές προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά
 - αλλάξει κατάσταση

Χρήση MT πολλών ταινιών

- Με τη βοήθεια πολλών ταινιών είναι συχνά ευκολότερο να κατασκευάσουμε μια MT που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση.
- Υπολογισμός συνάρτησης, (ημι) απόφαση γλώσσας όπως με τη βασική MT.
- Παράδειγμα:
η μηχανή C μετασχηματίζει το $\triangleright \sqcup w \sqcup$ σε $\triangleright \sqcup w \sqcup w \sqcup$, $w \in \{a, b\}^*$

1η ταινία: $\triangleright \sqcup w$ (αρχική κατάσταση)

2η ταινία: $\triangleright \sqcup$

1η ταινία: $\triangleright \sqcup w \sqcup$ (πρώτη φάση)

2η ταινία: $\triangleright \sqcup w \sqcup$

1η ταινία: $\triangleright \sqcup w \sqcup$ (δεύτερη φάση)

2η ταινία: $\triangleright \sqcup w$

1η ταινία: $\triangleright \sqcup w \sqcup w \sqcup$ (τρίτη φάση)

2η ταινία: $\triangleright \sqcup w \sqcup$

Ορισμός MT πολλών ταινιών

Ορισμός 1 (MT k ταινιών)

Για $k \geq 1$ μία MT k ταινιών είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, H)$, με K, Σ, s , και H είναι όπως στην απλή MT και δ η συνάρτηση μετάβασης από το $(K - H) \times \Sigma^k$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})^k$.

Για κάθε κατάσταση q και κάθε k -άδα από σύμβολα της ταινίας $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\delta(q, (\alpha_1, \dots, \alpha_k)) = (p, (b_1, \dots, b_k))$, όπου p είναι η νέα κατάσταση και b_j είναι η ενέργεια που εκτελείται στην ταινία j .

Ισχύει επίσης ότι αν $\alpha_j = \triangleright$ για κάποιο $j \leq k$, τότε $b_j = \rightarrow$.

Ορισμός 2 (Συνολική κατάσταση MT k ταινιών)

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μία MT k ταινιών. Μία συνολική κατάσταση της M είναι ένα στοιχείο του

$$K \times (\triangleright \Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\sqcup\}) \cup \{e\}))^k$$

Δηλαδή, μια συνολική κατάσταση προσδιορίζει την κατάσταση, τα περιεχόμενα των ταινιών και τη θέση της κεφαλής στις k ταινίες.

Υπολογισμός MT πολλών ταινιών

- Ορίζεται επίσης η σχέση «παράγει σε ένα βήμα», δηλ. η συνολική κατάσταση $(q, (w_1 \underline{\alpha}_1 u_1, \dots, w_k \underline{\alpha}_k u_k))$ μπορεί να παράγει σε ένα βήμα λ.χ. τη συνολική κατάσταση $(p, (w'_1 \underline{\alpha}'_1 u'_1, \dots, w'_k \underline{\alpha}'_k u'_k))$.
- Σύμβαση:

Η συμβολοσειρά εισόδου τοποθετείται στην πρώτη ταινία, όπως και στη βασική MT.

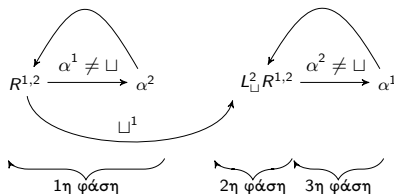
Οι άλλες ταινίες είναι κενές με την κεφαλή στο αριστερό τετράγωνο.

Στο τέλος του υπολογισμού μιας MT k ταινιών θα αφήσει την έξοδο της στην πρώτη ταινία.

Τα περιεχόμενα των άλλων ταινιών στο τέλος αγνοούνται.

Συμβολισμός MT πολλών ταινιών

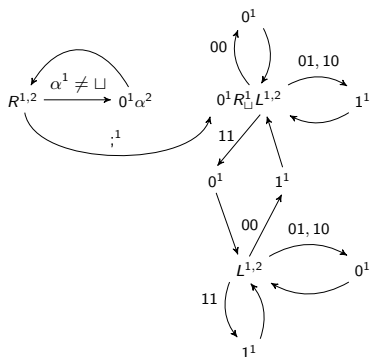
- Επισυνάπτουμε ως εκθέτη στο σύμβολο που συμβολίζει την κάθε MT που συνθέτουμε τον αριθμό της ταινίας που πρόκειται να ενεργήσει. Οι άλλες ταινίες μένουν ανεπηρέαστες.
π.χ. η \sqcup^2 γράφει κενό στη 2η ταινία, η L_{\sqcup}^1 ψάχνει προς τα αριστερά για ένα κενό στην 1η ταινία και η $R^{1,2}$ κινεί προς τα δεξιά τις κεφαλές και των δύο ταινιών.
- Αντίθετα με τις βασικές MT δε γράφουμε M^2 αντί για MM .
- Παράδειγμα: παραλλαγή αντιγραφικής μηχανής



Παράδειγμα MT δύο ταινιών: πρόσθεση δυαδικών αριθμών

Συνομογραφία: ζεύγη ψηφίων όπως το 01 αναπαριστούν το $\alpha^1 = 0, \alpha^2 = 1$

- 1 αντιγράφεται ο πρώτος δυαδικός ακέραιος στη 2η ταινία & μπαίνουν 0 στη θέση του και στα «;» που διαχωρίζουν τους ακέραιους
- 2 εκτελείται δυαδική πρόσθεση ξεκινώντας από το λιγότερο σημαντικό bit των δύο ακεραίων, γράφει το αποτέλεσμα στην 1η ταινία και «θυμάται το κρατούμενο» στην κατάσταση της.



Θεώρημα Προσομοίωσης MT πολλαπλών ταινιών

Θεώρημα 3

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια MT k ταινιών, $k \geq 1$. Υπάρχει μια πρότυπη MT $M' = (K', \Sigma', \delta', s', H)$ με $\Sigma \subseteq \Sigma'$, τέτοια ώστε να ισχύει:

Για κάθε συμβολοσειρά εισόδου $x \in \Sigma^*$, η M τερματίζει με έξοδο y στην πρώτη ταινία αν και μόνο αν η M' με είσοδο x τερματίζει στην ίδια κατάσταση τερματισμού και με την ίδια έξοδο y στην ταινία της.

Αν η M τερματίζει με είσοδο x μετά από t βήματα, η M' τερματίζει με είσοδο x μετά από έναν αριθμό βημάτων που ασυμπτωτικά φράσσεται άνω από συνάρτηση της τάξης $t \cdot (|x| + t)$. Λέμε ότι ο αριθμός των βημάτων είναι $\mathcal{O}(t \cdot (|x| + t))$.

- Οι προσομοιώσεις είναι μία **σημαντική μεθοδολογία μελέτης της ισχύος των υπολογιστικών μηχανών**:

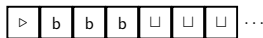
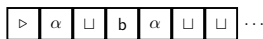
Μιμούμαστε ένα βήμα της προσομοιούμενης μηχανής με πολλά βήματα της μηχανής που την προσομοιώνει.

Προσομοίωση MT πολλών ταινιών (1/4)

Η μηχανή M' με $\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma \times \{0, 1\})^k$

▷	▷	α	␣	b	α	␣	␣	␣	␣
	0	0	0	1	0	0	0		
	▷	b	b	b	␣	␣	␣		
	0	0	1	0	0	0	0		

Η μηχανή M με k ταινίες



- Ως συνήθως το σύμβολο του αριστερού άκρου, και το άπειρο κενό τμήμα στα δεξιά
- Η υπόλοιπη ταινία χωρίζεται σε $2k$ «εγγραφές»
- Η 1η, 3η, ..., $2k - 1$ -οστή εγγραφή αντιστοιχεί στην 1η, 2η, ..., k -οστή ταινία της M
- Η 2η, 4η, ..., $2k$ -οστή εγγραφή καταγράφει τις θέσεις των κεφαλών στην 1η, 2η, ..., k -οστή ταινία της M

Προσομοίωση MT πολλών ταινιών (2/4)

Για μία είσοδο $w \in \Sigma^*$, η M' λειτουργεί ως εξής:

- 1 Μετακινεί την είσοδο ένα τετράγωνο προς τα δεξιά.

Επιστρέφει στο αμέσως δεξιά τετράγωνο από το \triangleright και γράφει το $(\triangleright, 0, \dots, \triangleright, 0)$.

Πηγαίνει ένα τετράγωνο δεξιά και γράφει το $(\sqcup, 1, \dots, \sqcup, 1)$.

Προχωράει προς τα δεξιά. Σε κάθε τετράγωνο, αν συναντήσει ένα $a \neq \sqcup$ τελειώνει η πρώτη φάση. Αυτή είναι η αρχική συνολική κατάσταση της M .

- 2 Προσομοιώνει τον υπολογισμό της M ως το σημείο που η M θα τερμάτιζε (αν τερμάτιζε). Ένα βήμα υπολογισμού της M προσομοιώνεται ως εξής (υποθέτουμε ότι σε κάθε βήμα ξεκινάμε από το πρώτο τετράγωνο, που δεν έχει διαιρεθεί σε εγγραφές):

Προσομοίωση MT πολλών ταινιών (3/4)

- i Σαρώνει προς τα αριστερά την ταινία μαζεύοντας πληροφορίες για τα σύμβολα που διαβάστηκαν από τις κεφαλές των k ταινιών της M .
Επιστρέφει πάλι στο πρώτο τετράγωνο που δεν έχει διαιρεθεί σε εγγραφές.
- ii Όταν η κεφαλή επιστρέφει στο δεξί άκρο, η κατάσταση έχει μεταβληθεί ώστε να αντικατοπτρίζει την k -άδα των συμβόλων στις εγγραφές, στις θέσεις των κεφαλών.
- iii Σαρώνει προς τα αριστερά και μετά προς τα δεξιά την ταινία για να ενημερώσει τις εγγραφές σύμφωνα με την κίνηση της προσομοιούμενης μηχανής.

- 3 Όταν η M θα τερμάτιζε, η M' πρώτα μετατρέπει την ταινία της από πολλαπλών εγγραφών σε μιάς εγγραφής.

Τοποθετεί την κεφαλή της όπου η M θα τοποθετούσε την πρώτη της κεφαλή.

Τερματίζει στην ίδια κατάσταση με αυτή που θα τερμάτιζε η M .



Προσομοίωση MT πολλών ταινιών (4/4)

Πόρισμα

Οποιαδήποτε συνάρτηση υπολογίζεται, ή οποιαδήποτε γλώσσα αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μία MT k ταινιών, υπολογίζεται επίσης, αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται, αντίστοιχα, από μία πρότυπη MT.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014