ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υπολογιστική Λογική και Λογικός Προγραμματισμός

Ενότητα 2: Λογική: Εισαγωγή, Προτασιακή Λογική.

Νίκος Βασιλειάδης, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Λογική: Εισαγωγή, Προτασιακή Λογική.

Λογική

- Παρέχει έναν τρόπο για την αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης.
- Η *μαθηματική λογική* είναι η συστηματική μελέτη των *έγκυρων ισχυρισμών* (*valid arguments*) με χρήση εννοιών από τα μαθηματικά.
- Ένας *ισχυρισμός* (*argument*) αποτελείται από συγκεκριμένες *δηλώσεις* (*ή προτάσεις*), τις *υποθέσεις* (*premises*), από τις οποίες παράγονται άλλες δηλώσεις που ονομάζονται *συμπεράσματα* (*conclusions*).

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, (*Δήλωση*).

Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, (*Δήλωση*).

επομένως, ο Σωκράτης είναι θνητός. (*Συμπέρασμα*).

Συμβολική Λογική

- Η *συμβολική λογική* (*symbolic logic*) είναι μια στενογραφία της λογικής.
- Οι ισχυρισμοί μελετώνται ανεξάρτητα από το θέμα το οποίο πραγματεύονται, εκφράζοντάς τους στη συμβολική τους μορφή.

P: **∀X άνθρωπος(X) → θνητός(X).**

Q: **άνθρωπος(Σωκράτης).**

R: **θνητός(Σωκράτης).**

$$\mathbf{P \land Q \models R}$$

Σύνταξη και Σημασιολογία

- Για να είναι εφικτή η συμβολική αναπαράσταση απαιτείται ο ορισμός της *σύνταξης* (*syntax*) και της *σημασιολογίας* (*semantics*) της λογικής που θα χρησιμοποιηθεί.
  - Η *σύνταξη* καθορίζει τις επιτρεπτές ακολουθίες συμβόλων.
  - Η *σημασιολογία* καθορίζει τις σχέσεις μεταξύ των συμβόλων.
- Η *σύνταξη* προϋποθέτει τον καθορισμό του αλφάβητου της γλώσσας.
  - Σύνολο συμβόλων με τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν αποδεκτές ακολουθίες (προτάσεις).
- Η *ερμηνεία*:
  - αντιστοιχεί τα σύμβολα της γλώσσας στις οντότητες του κόσμου που αναπαρίσταται και
  - επιτρέπει την απόδοση λογικών τιμών στις προτάσεις της γλώσσας, δηλαδή τον χαρακτηρισμό τους ως αληθείς ή ψευδείς.

Προτασιακή Λογική

- Η *προτασιακή λογική* (*propositional logic*) αποτελεί την απλούστερη μορφή μαθηματικής λογικής.
- Αποτελεί την βάση για περισσότερο πολύπλοκες λογικές.
- Στην προτασιακή λογική κάθε γεγονός του πραγματικού κόσμου
  - αναπαριστάται με μια *λογική πρόταση*, η οποία μπορεί να έχει δύο *λογικές τιμές*.
  - χαρακτηρίζεται είτε ως *αληθής* (***T**-true*) ή ως *ψευδής* (***F**-false*).

Προτασιακή Λογική - Σύνταξη

- Οι λογικές προτάσεις αναπαριστώνται συνήθως από λατινικούς χαρακτήρες *P*, *Q*, *R*, κλπ. και ονομάζονται *άτομα* (*atoms*).
- Τα άτομα μπορούν να συνδυαστούν με τη χρήση *λογικών συμβόλων* ή *συνδετικών* (*connectives*).
- Οι σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν ονομάζονται *ορθά δομημένοι τύποι* (*well formed formulae*).

Προτασιακή Λογική - Συνδετικά

Σύμβολο	**Ονομασία / Επεξήγηση**
$\wedge$	σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ").
$\vee$	διάζευξη (λογικό "Η").
$\neg$	άρνηση.
$\rightarrow$	συνεπαγωγή ("ΕΑΝ ΤΟΤΕ").
$\leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ").

- Η σύνταξη περιλαμβάνει και τρία σημεία στίξης.
  - Δύο Παρενθέσεις "(" και ")«.
  - Το κόμμα ","

Παράδειγμα Χρήσης Συνδετικών (1/2)

- Έστω ότι απαιτείται η αναπαράσταση της ακόλουθης γνώσης με προτασιακή λογική:

1η πρόταση: «επιδιώκω την ειρήνη».

2η πρόταση: «αποφεύγω πόλεμο».

3η πρόταση: «εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω πόλεμο».

Παράδειγμα Χρήσης Συνδετικών (2/2)

- Σε κάθε πρόταση (*γεγονός*) που θέλουμε να αναπαραστήσουμε, αντιστοιχεί ένας λατινικός χαρακτήρας.

  P: "επιδιώκω την ειρήνη".

  Q: "αποφεύγω τον πόλεμο".

- Η 3η πρόταση αναπαριστάται με την χρήση του συνδετικού της συνεπαγωγής και της 1ης και 2ης πρότασης.

  $P \rightarrow Q$ "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο".

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (1/3)

- Η *σημασιολογία* της προτασιακής λογικής αντιστοιχεί μία τιμή αληθείας (αληθές ***T*** ή ψευδές ***F***) σ' έναν τύπο, βασισμένη σε μια ερμηνεία της γλώσσας.
- Μια *ερμηνεία* (*interpretation*)
  - αντιστοιχεί τιμές αληθείας στα άτομα, και
  - επεκτείνεται σε σύνθετους τύπους με χρήση ενός πίνακα αληθείας (truth table) για να μεταχειριστεί τα συνδετικά.

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (2/3)

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (3/3)

- Έστω η ερμηνεία $I=\{I(P)=\mathbf{T},I(Q)=\mathbf{T}\}$.
  - Αποδίδει λογικές τιμές στα άτομα *P* και *Q*.
- Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία και τον πίνακα αλήθειας ο τύπος $P \rightarrow Q$ είναι αληθής.
  - Ο τύπος $P \rightarrow Q$ *ικανοποιείται* από την ερμηνεία *I*.
  - Η ερμηνεία αποτελεί ένα *μοντέλο* (*model*) του τύπου.

Ενδιαφέρουσες Περιπτώσεις Τύπων

Ταυτολογία και Αντίφαση

- *Ταυτολογία* *(tautology)* είναι ένας τύπος που είναι αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
  - Π.χ. ο τύπος $P \vee \neg P$.
  - Εάν ο τύπος F είναι ταυτολογία τότε γράφεται $\models$F.
- *Αντίφαση* *(contradiction)* είναι ένας τύπος που είναι ψευδής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
  - Π.χ. ο τύπος $P \wedge \neg P$.

Παραδείγματα Ενδιαφερόντων Τύπων

Ταυτολογία και Αντίφαση

		Ταυτολογία	Αντίφαση
P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	T	F
F	T	T	F

Παράδειγμα Ταυτολογίας

- Αποδείξτε ότι ***P***→(***Q***→***P***) είναι ταυτολογία.
  - Είναι αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.

Q	P	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*T*

Παράδειγμα μη Ταυτολογίας

- Αποδείξτε ότι το **$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$** δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση.
  - Δεν είναι αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.

P	**Q**	**$P \rightarrow Q$**	**P**	**$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$**
T	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*

Ικανοποιήσιμοι Τύποι

- Οι τύποι που δεν είναι αντιφάσεις, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ερμηνεία που τους ικανοποιεί.
- Ονομάζονται *ικανοποιήσιμοι τύποι.*
  - Π.χ. $(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{P}$
  - Π.χ. $\boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{P}$
- Οι ταυτολογίες είναι ικανοποιήσιμοι τύποι.

Ενδιαφέρουσες Περιπτώσεις Τύπων

Λογική Συνεπαγωγή

- Ένας τύπος *P* *συνεπάγεται λογικά* (*implication*) από τον τύπο *Q* εάν κάθε μοντέλο του *Q* είναι επίσης και μοντέλο του *P*.
- Δηλαδή: **όποτε ο *Q* είναι αληθής, τότε και ο *P* είναι αληθής**.
- Η περίπτωση συμβολίζεται ως $Q \models P$.

Παραδείγματα Ενδιαφερόντων Τύπων

Λογική Συνεπαγωγή (1/2)

- $(P \wedge Q) \models (P \vee Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

Είναι λογική συνεπαγωγή, γιατί κάθε φορά που ο τύπος-προϋπόθεση (premise) είναι αληθής, το ίδιο ισχύει και για τον τύπο-συμπέρασμα (implication).

Παραδείγματα Ενδιαφερόντων Τύπων

Λογική Συνεπαγωγή (2/2)

- $(P \vee Q) \not\models (P \wedge Q)$

P	**Q**	**$P \vee Q$**	**$P \wedge Q$**
T	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*F*	*F*

ΔΕΝ είναι λογική συνεπαγωγή, γιατί υπάρχουν περιπτώσεις που ο τύπος-προϋπόθεση (premise) είναι αληθής, ενώ ο τύπος-συμπέρασμα (implication) είναι ψευδής.

Παράδειγμα Λογικής Συνεπαγωγής (1/2)

- Έστω οι ακόλουθες προτάσεις:

P: **"επιδιώκω την ειρήνη".**

Q: **"αποφεύγω τον πόλεμο".**

$P \rightarrow Q$ **"εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο".**

- Έστω η ερμηνεία *I={I(P)=t, I(Q)=t}.*
  - Ο τύπος είναι αληθής για την συγκεκριμένη ερμηνεία.
- Η δήλωση $\boldsymbol{P \wedge Q \models P \rightarrow Q}$, δηλώνει ότι <u>κάθε</u> ερμηνεία που ικανοποιεί τον τύπο $P \wedge Q$ ικανοποιεί <u>επίσης</u> και τον τύπο $P \rightarrow Q$.

Παράδειγμα Λογικής Συνεπαγωγής (2/2)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
T	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*F*	*T*

- *Είναι Λογική Συνεπαγωγή?:* $(P \wedge Q) \models (P \rightarrow Q)$
- <u>Ναι</u>, γιατί κάθε φορά που ο τύπος-προϋπόθεση (premise) είναι αληθής,
  το ίδιο ισχύει και για τον τύπο-συμπέρασμα (implication).

Ενδιαφέρουσες Περιπτώσεις Τύπων

Λογική Ισοδυναμία

- Δύο τύποι *P* και *Q* ονομάζονται *ισοδύναμοι* (*equivalent*) εάν οι **πίνακες αλήθειας τους είναι οι ίδιοι** κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
- Η λογική ισοδυναμία ορίζεται με το σύμβολο $\Leftrightarrow$
  - πχ. $P \Leftrightarrow Q$.

Παραδείγματα Ενδιαφερόντων Τύπων

Λογική Ισοδυναμία

- $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Διαφορά της Λογικής Ισοδυναμίας και του Συνδετικού της Ισοδυναμίας

- Η λογική ισοδυναμία ($\Leftrightarrow$) αφορά τη σημασιολογία των υπό εξέταση προτάσεων και αναφέρεται στη σχέση που έχουν τα μοντέλα των συνόλων των προτάσεων στις οποίες αναφέρεται.
- Το συνδετικό της ισοδυναμίας ($\leftrightarrow$) αποτελεί μέρος της σύνταξης της γλώσσας και παίρνει τιμές κάτω από ορισμένη ερμηνεία των προτάσεων που συμμετέχουν στον τύπο.
- Το ίδιο ισχύει για τη λογική συνεπαγωγή ($\models$) και το συνδετικό της συνεπαγωγής ($\rightarrow$) που αναφέρθηκαν.

Λογικές Ισοδυναμίες

- Υπάρχει ένα ενδιαφέρον σύνολο ισοδυναμιών της προτασιακής λογικής που χρησιμοποιούνται για την μετατροπή μιας πρότασης σε κάποια ισοδύναμή της.
- Είναι χρήσιμες για την εξαγωγή συμπερασμάτων στην λογική.
- Οι ισοδυναμίες είναι αληθείς κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.

Συνήθεις Λογικές Ισοδυναμίες

<table>
<tr><th colspan="2">Ισοδυναμία</th><th>Ονομασία</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>$\mathbf{P \Leftrightarrow \neg\neg P}$</td><td>νόμος της διπλής άρνησης.</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$\mathbf{(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)}$</td><td>νόμος De Morgan.</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>$\mathbf{(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)}$</td><td>νόμος De Morgan.</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>$\mathbf{(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)}$</td><td>επιμερισμός ως προς την σύζευξη.</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>$\mathbf{(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)}$</td><td>επιμερισμός ως προς την διάζευξη.</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td>$\mathbf{(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q}$</td><td rowspan="2">Οποιοσδήποτε τύπος της προτασιακής λογικής μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο χωρίς την χρήση των συνδετικών της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας.</td></tr>
<tr><td>(7)</td><td>$\mathbf{(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)}$</td></tr>
</table>

Παράδειγμα Απόδειξης Ισοδυναμίας με πίνακα αλήθειας

Νόμος de Morgan $(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg (P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

Λογική Πράξη Ισοδυναμίας

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$$
$$(A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow$$
$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \Leftrightarrow$$
$$[(\neg A \vee B) \wedge \neg B] \vee [(\neg A \vee B) \wedge A] \Leftrightarrow$$
$$[(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)] \vee [(\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A)] \Leftrightarrow$$
$$[(\neg A \wedge \neg B) \vee \mathrm{F}] \vee [\mathrm{F} \vee (B \wedge A)] \Leftrightarrow$$
$$(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$$

- Ή ισχύουν και τα δυο ή κανένα!

Λογική Πράξη Ισοδυναμίας

Πίνακας Αλήθειας

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Ορισμοί σε σύνολα τύπων

- Ένα **<u>σύνολο</u>** τύπων *S* ονομάζεται
  - *ταυτολογία*, όταν κάθε ερμηνεία του συνόλου *S* ικανοποιεί κάθε τύπο του *S*.
  - *ικανοποιήσιμο* (*satisfiable*) εάν υπάρχει μια τουλάχιστον ερμηνεία που να ικανοποιεί όλους τους τύπους του *S*,
  - *μη-ικανοποιήσιμο* (*unsatisfiable)* ή *αντίφαση* εάν δεν υπάρχει δυνατή ερμηνεία που να ικανοποιεί όλους τους τύπους του *S*.
- Μια πρόταση *P λογικά συνεπάγεται* (*implication ή entailment*) από ένα **<u>σύνολο</u>** *S* όταν κάθε ερμηνεία η οποία ικανοποιεί το *S* ικανοποιεί επίσης και το *P* και συμβολίζεται με $S \models P$.
- Δυο σύνολα προτάσεων *S* και *F* ονομάζονται *λογικά ισοδύναμα* εάν $S \models F$ και $F \models S$ δηλαδή έχουν ακριβώς τα ίδια μοντέλα.

Κανονικές Μορφές (1/2)

- *Κανονικές μορφές* (*canonical forms*): Μορφές των τύπων της λογικής στις οποίες δεν εμφανίζονται καθόλου κάποια συνδετικά και ακολουθούν μια συγκεκριμένη δομή.
  - Π.χ. στη *Διαζευκτική* και *Συζευκτική* μορφή της λογικής, χρησιμοποιούνται μόνο τα συνδετικά της σύζευξης, διάζευξης και άρνησης.
- Κάθε τύπος μπορεί να μετατραπεί σε μια κανονική μορφή, χρησιμοποιώντας:
  - τις ισοδυναμίες για την απαλοιφή των συνδετικών της ισοδυναμίας και συνεπαγωγής.
  - την κατάλληλη ομαδοποίηση των ατόμων μέσω των ισοδυναμιών του επιμερισμού.

Κανονικές Μορφές (2/2)

- Στην *διαζευκτική κανονική μορφή της λογικής (disjunctive normal form)*, οι προτάσεις αποτελούνται από διαζεύξεις τύπων που μπορεί να είναι μόνο:
  - *λεκτικά* (*literals*), δηλαδή άτομα ή αρνήσεις ατόμων και
  - συζεύξεις λεκτικών.

$$\mathbf{(Q\land R\land\neg S)\lor(V\land W)\lor(R\land S)\lor\ldots\lor(X\land Z)}$$

- Στην *συζευκτική κανονική μορφή* της λογικής (*conjunctive normal form*) οι προτάσεις αποτελούνται από συζεύξεις διαζεύξεων:

$$\mathbf{(Q\lor R\lor\neg S)\land(V\lor W)\land(R\lor S)\land\ldots\land(X\lor Z)}$$

Παράδειγμα Κανονικής Μορφής (1/2)

- Έστω η ακόλουθη γνώση εκφρασμένη στη γενική μορφή της προτασιακής λογικής:

"επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο".

- Σε συμβολική μορφή:

$$\mathbf{P \wedge (P \rightarrow Q)}$$

- Σε κανονική διαζευκτική μορφή:

$$\mathbf{(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)}$$

- που διαβάζεται ως:

"επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ δεν "επιδιώκω την ειρήνη".

'Η "επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ "αποφεύγω τον πόλεμο".

Παράδειγμα Κανονικής Μορφής (2/2)

- Αν και η παραπάνω μορφή είναι περισσότερο δυσνόητη, βοηθά στην εύρεση της λογικής τιμής του τύπου.
- Η πρώτη σύζευξη είναι αντίφαση, οπότε η λογική τιμή της πρότασης εξαρτάται μόνο από την δεύτερη.
  - Σε μια πιθανή ερμηνεία όπου *I={I(P)=T, I(Q)=F}*, ο τύπος είναι ψευδής.
  - Η μόνη ερμηνεία για την οποία ο παραπάνω τύπος είναι αληθής είναι η *I={I(P)=T, I(Q)=T}.*

Απόδειξη

$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow$ *{χρήση ισοδυναμίας (6)}.*

$P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow$ *{επιμερισμός ως προς την σύζευξη (4)}.*

$(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow$ *{ταυτολογία – ιδιότητα σύζευξης }.*

$F \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow$ *{ ιδιότητα διάζευξης }.*

$P \wedge Q$

Χρήση των Κανονικών Μορφών

- Γιατί να μετατραπεί μια λογική έκφραση σε κανονική μορφή;
- Έστω ότι απαιτείται να αποδειχθεί ότι μια συγκεκριμένη λογική έκφραση αποτελεί ταυτολογία.
  - Ο απλούστερος τρόπος είναι να μετατραπεί σε διαζευκτική κανονική μορφή και να αποδειχθεί ότι μια από τις συζεύξεις αληθεύει πάντα.
- Η μέθοδος δεν περιορίζεται μόνο στην απόδειξη αντιφάσεων και ταυτολογιών αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να βρεθεί η ερμηνεία που ικανοποιεί ένα τύπο.

Παράδειγμα Αντίφασης

$P \land \neg Q \land (P \to Q) \Leftrightarrow$ *{χρήση ισοδυναμίας (6)}.*

$(P \land \neg Q) \land (\neg P \lor Q) \Leftrightarrow$

{επιμερισμός ως προς την σύζευξη (4)}.

$((P \land \neg Q) \land \neg P) \lor ((P \land \neg Q) \land Q) \Leftrightarrow$

{προσεταιριστική ιδιότητα}.

$((P \land \neg P) \land \neg Q) \lor ((Q \land \neg Q) \land P) \Leftrightarrow$ *{ιδιότητα σύζευξης }.*

$(F \land \neg Q) \lor (F \land P) \Leftrightarrow$ *{ ιδιότητα σύζευξης }.*

$F \lor F \Leftrightarrow$ *{ ιδιότητα διάζευξης }.*

F *{αντίφαση}.*

Παράδειγμα Ταυτολογίας

- Αποδείξτε ότι $\boldsymbol{P \to (Q \to P)}$ είναι ταυτολογία.
  - Είναι αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
- Μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή με τη χρήση λογικών ισοδυναμιών.

$$P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

Παράδειγμα μη Ταυτολογίας

- Αποδείξτε ότι το $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση.
  - Δεν είναι αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
- Μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή με τη χρήση λογικών ισοδυναμιών.

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee P \Leftrightarrow (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P \Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee P)$$

- Δεν γίνονται παραπάνω απλουστεύσεις, άρα η τιμή αλήθειας δεν είναι σταθερή, εξαρτάται από τα ***P*** και ***Q.***
  - Αυτή η διαδικασία ΔΕΝ μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη αλλά απλή ένδειξη.
  - Η κανονική απόδειξη πρέπει να γίνει με πίνακες αλήθειας.

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπερασμάτων

- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο *S* καλά σχηματισμένων τύπων σε προτασιακή λογική.
- Η εξαγωγή συμπερασμάτων αφορά:
  - είτε στην δημιουργία όλων των τύπων που λογικά συνεπάγονται από το *S* (entailment).
  - ή στο να διαπιστωθεί εάν ένας τύπος *P* συνεπάγεται λογικά από το *S*, δηλαδή εάν $S \models P$.

Prolog

- Η εξαγωγή συμπερασμάτων στην προτασιακή λογική υλοποιείται
  - είτε με πίνακες αλήθειας
  - ή με την λογική απόδειξη.

Πίνακες Αλήθειας

- Οι *πίνακες αλήθειας* (*truth tables*), υπολογίζουν την λογική τιμή ενός τύπου παίρνοντας όλες τις δυνατές τιμές όλων των προτάσεων που συμμετέχουν και εφαρμόζοντας τις πράξεις των επιμέρους τελεστών.
- Ένας πίνακας αποτελείται από 2^N γραμμές όπου N είναι το πλήθος των ατόμων που περιέχονται στο τύπο.

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
T	***T***	***T***	***T***
T	***F***	***T***	***T***
F	***T***	***T***	***T***
F	***F***	***F***	***T***

Πίνακες Αλήθειας
Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

- Η μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων είναι η απλούστερη.
- Για πολύπλοκους τύπους που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό ατόμων, οδηγεί σε ογκωδέστατους πίνακες αλήθειας που είναι δύσχρηστοι στην πράξη.
- Π.χ. ένας πίνακας αλήθειας για την απόδειξη ενός τύπου που περιέχει 15 άτομα απαιτεί ένα πίνακα αλήθειας 2^{15} (32768) γραμμών!

Λογική Απόδειξη

- Μια *απόδειξη* (*proof*) είναι μια σειρά από βήματα:
  - Καθένα βήμα είναι η εφαρμογή ενός *κανόνα συμπερασμού* (*rule of inference*) της λογικής σε προηγούμενα συμπεράσματα και υποθέσεις, για τη δημιουργία μιας νέας πρότασης.
  - Απώτερος σκοπός η παραγωγή της αποδεικτέας πρότασης ή η κατάληξη σε άτοπο.
- Το γεγονός ότι ένας τύπος *P* μπορεί να αποδειχθεί από ένα αρχικό σύνολο τύπων *S*, βάσει ενός συνόλου κανόνων συμπερασμού Δ, συμβολίζεται ως $S \vdash_{\Delta} P$.
- Η χρήση των κανόνων συμπερασμού σε μια απόδειξη εξασφαλίζει ότι οι νέες προτάσεις που θα δημιουργηθούν σε κάθε βήμα συνεπάγονται λογικά από τις προηγούμενες, εξασφαλίζοντας έτσι την ορθότητα των αποτελεσμάτων.

Κανόνες Συμπερασμού (1/2)

Κανόνας Συμπερασμού			Ονομασία
(1)	$P_1 \wedge P_2 \wedge \ \ldots \wedge P_N$	$\vdash P_1$	απαλοιφή σύζευξης (and elimination).
(2)	$P_1, P_2, \ldots P_N$	$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_N$	εισαγωγή συζεύξεων (and introduction).
(3)	P_1	$\vdash P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_N$	εισαγωγή διαζεύξεων (or introduction).
(4)	$\neg\neg P$	$\vdash P$	απαλοιφή διπλής άρνησης (double negation elimination).
(5)	$P, P \rightarrow Q$	$\vdash Q$	τρόπος του θέτειν (modus ponens).
(6)	$P \vee Q, \neg Q \vee R$	$\vdash P \vee R$	αρχή της ανάλυσης (resolution).

Κανόνες Συμπερασμού (2/2)

- Οι κανόνες συμπερασμού συνήθως γράφονται σαν "κλάσματα" με το πρώτο μέρος του κανόνα ως "αριθμητή" και το δεύτερο ως "παρονομαστή".
- Π.χ. ο κανόνας της απαλοιφής σύζευξης: $$\frac{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_N}{P_1}$$
- Οι παραπάνω κανόνες εφαρμόζονται στο αρχικό σύνολο προτάσεων μέχρι να παραχθεί η προς απόδειξη πρόταση.

Κανόνες Συμπερασμού
τρόπος του θέτειν - modus ponens

- Ο πιο γνωστός κανόνας συμπερασμού.
- Εάν είναι γνωστή η αλήθεια των προτάσεων P και $P \rightarrow Q$ μπορούμε να συνάγουμε ότι η πρόταση Q είναι αληθής.
- Από το αρχικό σύνολο προτάσεων:

P: **"Ο Νίκος είναι προγραμματιστής".**

P→Q: **Εάν "Ο Νίκος είναι προγραμματιστής", τότε "Ο Νίκος έχει υπολογιστή".**

- χρησιμοποιώντας τον modus ponens μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Q: **"Ο Νίκος έχει υπολογιστή".**

$$\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

Διαδικασία Απόδειξης

- Μια διαδικασία απόδειξης (*proof procedure*) αποτελείται από:
  - ένα σύνολο κανόνων συμπερασμού Δ και
  - ένα αλγόριθμο / μέθοδο εφαρμογής τους.
- Βάσει των παραπάνω εξάγονται (αποδεικνύονται) τα απαιτούμενα συμπεράσματα.
- Υπάρχουν δύο σημαντικές έννοιες σε κάθε διαδικασία απόδειξης.
  - Ορθότητα της παραγόμενης γνώσης.
  - Ικανότητα της διαδικασίας να εξαγάγει όλα τα δυνατά συμπεράσματα.

Ορθότητα - Πληρότητα

- Μια αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται *ορθή* (*sound*) όταν όλα τα συμπεράσματα που εξάγονται αποτελούν και λογικές συνεπαγωγές του αρχικού συνόλου των τύπων.
  - Για κάθε P όπου $\boldsymbol{S} \vdash_{\Delta} \boldsymbol{P}$ ισχύει και $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{P}$.
- Μια αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται *πλήρης* (*complete*) όταν για κάθε τύπο P ο οποίος λογικά συνεπάγεται από ένα σύνολο τύπων *S*, μπορεί να "κατασκευάσει" μια απόδειξη.
  - Για κάθε *P* για το οποίο ισχύει $\boldsymbol{S} \models \boldsymbol{P}$ ισχύει και το $\boldsymbol{S} \vdash_{\Delta} \boldsymbol{P}$.

Αυτοματοποίηση Εξαγωγής Συμπερασμάτων

- Για τον Λογικό Προγραμματισμό αυτό που ενδιαφέρει είναι η αυτοματοποίηση της εξαγωγής συμπερασμάτων από ένα σύνολο τύπων.
- Εκείνο που απαιτείται για την αυτοματοποίηση της εξαγωγής συμπερασμάτων είναι μια διαδικασία απόδειξης που είναι ορθή, πλήρης αλλά και *αποδοτική* (efficient).

Ορθότητα Κανόνων Συμπερασμού

Απαλοιφή Σύζευξης ($P \land Q \vdash P$)

P	Q	$P \land Q$	P
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

Ορθότητα Κανόνων Συμπερασμού

Εισαγωγή Διαζεύξεων (P $\vdash$ P $\vee$ Q)

Q	P	$P \vee Q$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

Ορθότητα Κανόνων Συμπερασμού

Τρόπος του θέτειν ($P, P \rightarrow Q \vdash Q$)

Q	P	$P \rightarrow Q$	Q
T	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*F*
T	*F*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*F*

Κάθε φορά που **όλοι** οι τύποι-προϋποθέσεις (premises) είναι αληθείς, το ίδιο ισχύει και για τον τύπο-συμπέρασμα (implication).

Παράδειγμα Διαδικασίας Απόδειξης

- Να αποδειχθεί ότι: $\mathbf{P \land Q \vdash P \lor Q}$

$\mathbf{P \land Q \vdash P}$ { *απαλοιφή συζεύξεων* }

$\mathbf{P \vdash P \lor Q}$ { *εισαγωγή διαζεύξεων* }

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί modus ponens?
  - Όχι γιατί δεν υπάρχει πουθενά συνεπαγωγή, ούτε μπορεί να δημιουργηθεί έμμεσα.
- Δεν είναι όλοι οι κανόνες συμπερασμού κατάλληλοι για όλες τις αποδείξεις.
  - Θέλει εμπειρία η σωστή εφαρμογή των κανόνων.

Αρχή της Ανάλυσης

- Μια διαδικασία ικανή για την <u>αυτοματοποίηση</u> της εξαγωγής συμπερασμάτων βασίζεται στην *αρχή της ανάλυσης* (*resolution*) (Robinson 1965).
- Η αρχή της ανάλυσης είναι ο κανόνας συμπερασμού:

$$\frac{P \vee R, \neg P \vee Q}{R \vee Q}$$

- Τα P και $\neg P$ ονομάζονται *συμπληρωματικά ζεύγη* (*complementary pairs*).
- Η νέα πρόταση R $\vee$ Q ονομάζεται *αναλυθέν* (*resolvent*).

Ορθότητα Κανόνων Συμπερασμού
Αρχή της Ανάλυσης ($P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$)

P	Q	$\neg Q$	R	$P \vee Q$	$\neg Q \vee R$	$P \vee R$
T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F

Εφαρμογή Ανάλυσης

- Για να εφαρμοστεί ο κανόνας της ανάλυσης, οι προτάσεις θα πρέπει να είναι εκφρασμένες σαν ένα σύνολο διαζεύξεων.
  - Κάθε διάζευξη αποτελείται από άτομα ή αρνήσεις ατόμων και αναφέρεται σαν *πρόταση* (*clause*).
- Απαιτείται η μετατροπή όλων των προτάσεων στην *συζευκτική μορφή* της λογικής.
  - Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση ισοδυναμιών.

Παράδειγμα Ανάλυσης (1/4)

- Έστω οι προτάσεις:

  εάν "έχει ομίχλη" τότε "υπάρχει κίνδυνος" και

  εάν "υπάρχει κίνδυνος" τότε "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα" και

  "έχει ομίχλη".

- Σε συμβολική μορφή:

  ("έχει ομίχλη" → "υπάρχει κίνδυνος") ∧

  ("υπάρχει κίνδυνος" → "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα") ∧

  "έχει ομίχλη”.

Παράδειγμα Ανάλυσης (2/4)

- Για να μετατρέψουμε τις προτάσεις απαλείφουμε το συνδετικό της συνεπαγωγής.

(¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος") ∧

(¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα") ∧

"έχει ομίχλη“.

- Συνήθως χρησιμοποιούμε ένα σύνολο προτάσεων (clauses) παραλείποντας το συνδετικό της σύζευξης.

(1) {¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος",

(2) ¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα",

(3) "έχει ομίχλη"}.

Παράδειγμα Ανάλυσης (3/4)

- Εάν εφαρμοστεί η αρχή της ανάλυσης για τις πρώτες δύο προτάσεις (1 και 2), προκύπτει η νέα πρόταση (4).

(1) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος"

(2) ¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

(4) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

- Ομοίως εάν εφαρμοστεί εκ νέου η αρχή της ανάλυσης στις προτάσεις (3) και (4) προκύπτει η πρόταση (5).

(3) "έχει ομίχλη"

(4) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

(5) "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

Απόδειξη Βασισμένη στην Αρχή της Ανάλυσης

~~¬"υπάρχει κίνδυνος"~~ ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

¬"έχει ομίχλη" ∨ ~~"υπάρχει κίνδυνος"~~

~~"έχει ομίχλη"~~

~~¬"έχει ομίχλη"~~ ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

Ορθότητα και Πληρότητα της Αρχής της Ανάλυσης

- Μια διαδικασία απόδειξης που βασίζεται <u>μόνο</u> στην αρχή της ανάλυσης είναι ορθή.
  - Όλα τα συμπεράσματα που παράγονται σε κάθε βήμα συνεπάγονται λογικά από τις αρχικές προτάσεις.
  - Η ορθότητα του κανόνα αποδεικνύεται με τη χρήση πινάκων αλήθειας.
- Ο κανόνας της ανάλυσης από <u>μόνος</u> του δεν προσφέρει πληρότητα.
  - Δεν μπορεί να εξαγάγει <u>όλους</u> τους δυνατούς τύπους που λογικά συνεπάγονται από την αρχική γνώση.
  - Π.χ. η πρόταση $P \lor Q$ δεν μπορεί να αποδειχθεί από το σύνολο προτάσεων $P \land Q$, καθώς δεν υπάρχουν συμπληρωματικά ζεύγη.

Εις Άτοπο Απαγωγή

$$\frac{Q\ ,\ \neg Q}{\quad}$$

- Ο κανόνας της ανάλυσης σε συνδυασμό με την "*εις άτοπο απαγωγή*" (*refutation ή proof by contradiction*) είναι πλήρης.
- Για να αποδειχθεί η αλήθεια μιας πρότασης, εισάγεται στο αρχικό σύνολο προτάσεων η άρνηση της αποδεικτέας πρότασης και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο, εφαρμόζοντας διαδοχικά την αρχή της ανάλυσης.
  - Αν η διαδικασία καταλήξει σε άτοπο (*κενή πρόταση),* τότε θεωρούμε την αποδεικτέα πρόταση αληθή.
  - Σε αντίθετη περίπτωση η πρόταση δεν συνεπάγεται λογικά από την αρχική γνώση.
- Η κενή πρόταση εξάγεται από ένα ζεύγος της μορφής $\boldsymbol{Q \land \neg Q}$ και συμβολίζεται με **□.**

Παράδειγμα Απαγωγής σε Άτοπο

- Αν απαιτείται να δειχθεί ότι

"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα".

- Από το αρχικό σύνολο προτάσεων

(1) {¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος",

(2) ¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα",

(3) "έχει ομίχλη"}

- Εισάγεται η άρνηση της προς απόδειξη πρότασης

¬"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα".

- Και εφαρμόζεται ο κανόνας συμπερασμού μέχρι να καταλήξει η διαδικασία σε άτοπο.

Απόδειξη βασισμένη στην "εις άτοπο απαγωγή"

Συνήθως ξεκινάμε με την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε

¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ ~~"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"~~

~~¬"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"~~

¬"έχει ομίχλη" ∨ ~~"υπάρχει κίνδυνος"~~ ~~¬"υπάρχει κίνδυνος"~~

~~"έχει ομίχλη"~~ ~~¬"έχει ομίχλη"~~

□

Παράδειγμα Απόδειξης

- Να αποδειχθεί: $\mathbf{P \land Q \vdash P \lor Q}$, με αρχή της ανάλυσης & απαγωγή σε άτοπο.
- Η πρόταση $\mathbf{P \land Q}$ είναι σε συζευκτική κανονική μορφή και δίνει 2 ξεχωριστές προτάσεις: **P, Q.**
- Υποθέτω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα:

$\mathbf{\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q}$.

- Η πρόταση $\mathbf{P \land Q}$ είναι σε συζευκτική κανονική μορφή και δίνει 2 ξεχωριστές προτάσεις: $\mathbf{\neg P, \neg Q}$.

$\mathbf{\neg P, P \vdash \square}$

Πλεονεκτήματα Αρχής της Ανάλυσης

- Η σημασία της παραπάνω αποδεικτικής διαδικασίας είναι προφανής:
- Απαιτείται μόνο ένας κανόνας συμπερασμού για την ορθή απόδειξη οποιασδήποτε πρότασης από ένα αρχικό σύνολο προτάσεων.
- Η διαδικασία απόδειξης μπορεί να αυτοματοποιηθεί.
- Στην Prolog χρησιμοποιείται αποκλειστικά η αρχή της ανάλυσης.

Πλεονεκτήματα Προτασιακής Λογικής

- Η απλότητα στη σύνταξη.
- Μπορεί να καταλήξει πάντα σε συμπέρασμα (*καταληκτική - decidable*).

Μειονεκτήματα Προτασιακής Λογικής (1/2)

- Έλλειψη γενικότητας που οδηγεί σε ογκώδη σύνολα προτάσεων.
  - Κάθε γεγονός πρέπει να αναπαριστάται με μια χωριστή λογική πρόταση.
- Η προτασιακή λογική υπονοεί ότι ο κόσμος αποτελείται μόνο από γεγονότα τα οποία είναι αληθή ή ψευδή, χωρίς καμία δυνατότητα διαχωρισμού και προσπέλασης των οντοτήτων του κόσμου στα οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο γεγονός.

Μειονεκτήματα Προτασιακής Λογικής (2/2)

- Π.χ. στην πρόταση "*οι τίγρεις είναι σαρκοβόρα*" δεν υπάρχει κανένας διαχωρισμός ανάμεσα στα αντικείμενα "*τίγρεις*" και στην ιδιότητα αυτών "*σαρκοβόρα*", αλλά ούτε και δίνεται η δυνατότητα προσπέλασης αυτών για την δημιουργία νέας γνώσης.
- Έτσι ακόμη και αν ήταν αληθής η πρόταση "*ο τζίμης είναι τίγρης*", η προτασιακή λογική δεν θα μπορούσε να καταλήξει στο (εύλογο) συμπέρασμα "*ο τζίμης είναι σαρκοβόρο*" συνδυάζοντας τα δύο γεγονότα.

Ασκήσεις - Με modus ponens (1/2)

- Έστω οι προτάσεις

(1) ***Emerald*** $\rightarrow$ ***Precious***

(2) ***Gem*** $\wedge$ ***Green*** $\rightarrow$ ***Emerald***

(3) ***Precious*** $\vee$ ***Rare*** $\rightarrow$ ***Wanted***

(4) ***Gem***

(5) ***Green***

$\vdash$ ***Gem*** $\wedge$ ***Green*** (6) *{ εισαγωγή συζεύξεων }*

$\vdash$ ***Emerald*** (7) *{ modus ponens }*

$\vdash$ ***Precious*** (8) *{ modus ponens }*

$\vdash$ ***Precious*** $\vee$ ***Rare*** (9) *{ εισαγωγή διαζεύξεων }*

$\vdash$ ***Wanted*** (10) *{ modus ponens }*

- Να αποδείξετε την πρόταση ***Wanted*** με τη χρήση των κανόνων συμπερασμού:
  - modus ponens, εισαγωγή συζεύξεων, εισαγωγή διαζεύξεων.

Ασκήσεις - Με modus ponens (2/2)

(4), (5) $\vdash$ ***Gem*** $\wedge$ ***Green*** (6) *{ εισαγωγή συζεύξεων }*

(6), (2) $\vdash$ ***Emerald*** (7) *{ modus ponens }*

(7), (1) $\vdash$ ***Precious*** (8) *{ modus ponens }*

(8) $\vdash$ ***Precious*** $\vee$ ***Rare*** (9) *{ εισαγωγή διαζεύξεων }*

(9), (3) $\vdash$ ***Wanted*** (10) *{ modus ponens }*

Ασκήσεις - Με αρχή της ανάλυσης

κανονική συζευκτική μορφή

(1) ***Emerald → Precious***

(1’) $\neg$***Emerald*** $\vee$ ***Precious***

(2) ***Gem*** $\wedge$ ***Green → Emerald***

(2’) $\neg$**(*Gem*** $\wedge$ ***Green*)** $\vee$ ***Emerald*** $\Leftrightarrow$
$\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald***

(3) ***Precious*** $\vee$ ***Rare → Wanted***

(3’) $\neg$**(*Precious*** $\vee$ ***Rare*)** $\vee$ ***Wanted*** $\Leftrightarrow$
($\neg$***Precious*** $\wedge$ $\neg$***Rare*)** $\vee$ ***Wanted*** $\Leftrightarrow$
($\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted*)** $\wedge$ **(**$\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted*)**
(3.1) $\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted***
(3.2) $\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted***

(4) ***Gem***

(5) ***Green***

- Να αποδείξετε την πρόταση ***Wanted*** <u>αποκλειστικά</u> με τη χρήση του κανόνα συμπερασμού της αρχής της ανάλυσης.

Αρχή της Ανάλυσης – Προετοιμασία

- Πρώτα πρέπει όλες οι προτάσεις να έρθουν σε *συζευκτική κανονική μορφή.*

(1’) $\neg$***Emerald*** $\vee$ ***Precious.***

(2’) $\neg$**(*Gem*** $\wedge$ ***Green*)** $\vee$ ***Emerald*** $\Leftrightarrow$

$\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald.***

(3’) $\neg$**(*Precious*** $\vee$ ***Rare*)** $\vee$ ***Wanted*** $\Leftrightarrow$

($\neg$***Precious*** $\wedge$ $\neg$***Rare*)** $\vee$ ***Wanted*** $\Leftrightarrow$

($\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted*)** $\wedge$ **(**$\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted*).**

(3.1) $\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted.***

(3.2) $\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted.***

Αρχή της ανάλυσης – Απόδειξη (1/2)

(1’) $\neg$***Emerald*** $\vee$ ***Precious***

(2’) $\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald***

(3.1) $\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted***

(3.2) $\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted***

(4) ***Gem***

(5) ***Green***

$\vdash$ ***Precious*** (8)

$\vdash$ ***Wanted*** (9)

$\vdash$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald*** (6)

$\vdash$ ***Emerald*** (7)

Αρχή της ανάλυσης – Απόδειξη (2/2)

- Εφαρμόζουμε αρχή της ανάλυσης στις προτάσεις: (1’), (2’), (3.1), (3.2), (4), (5)

(4), (2’) $\vdash \neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald*** (6) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(6), (5) $\vdash$ ***Emerald*** (7) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(7), (1’) $\vdash$ ***Precious*** (8) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(8), (3.1) $\vdash$ ***Wanted*** (9) *{ αρχή της ανάλυσης }*

Ασκήσεις

Με αρχή της ανάλυσης και απαγωγή εις άτοπο

(1) $\boldsymbol{Emerald \rightarrow Precious}$

(2) $\boldsymbol{Gem \wedge Green \rightarrow Emerald}$

(3) $\boldsymbol{Precious \vee Rare \rightarrow Wanted}$

(4) $\boldsymbol{Gem}$

(5) $\boldsymbol{Green}$

- Να αποδείξετε την πρόταση ***Wanted*** αποκλειστικά με τη χρήση του κανόνα συμπερασμού της αρχής της ανάλυσης σε συνδυασμό με την "*εις άτοπο απαγωγή*".

Αρχή της Ανάλυσης – Προετοιμασία

- Κάνουμε την ίδια μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή όπως πριν.

(1’) $\neg$***Emerald*** $\vee$ ***Precious.***

(2’) $\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald.***

(3.1) $\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted.***

(3.2) $\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted.***

- Επίσης, προσθέτουμε την άρνηση της προς απόδειξη πρότασης:

(6) $\neg$***Wanted.***

Αρχή της ανάλυσης – Απόδειξη (1/2)

(1’) $\neg$***Emerald*** $\vee$ ***Precious***

(2’) $\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** $\vee$ ***Emerald***

(3.1) $\neg$***Precious*** $\vee$ ***Wanted***

(3.2) $\neg$***Rare*** $\vee$ ***Wanted***

(4) ***Gem***

(5) ***Green***

(6) $\neg$***Wanted***

├ $\neg$***Gem*** $\vee$ $\neg$***Green*** (9)

├ $\neg$***Green*** (10)

├ □

├ $\neg$***Emerald*** (8)

├ $\neg$***Precious*** (7)

Αρχή της ανάλυσης – Απόδειξη (2/2)

- Η απόδειξη συνήθως ξεκινάει από την αποδεικτέα πρόταση.

(6), (3.1) $\vdash \neg$***Precious*** (7) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(7), (1’) $\vdash \neg$***Emerald*** (8) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(8), (2’) $\vdash \neg$***Gem*** $\vee \neg$***Green*** (9) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(9), (4) $\vdash \neg$***Green*** (10) *{ αρχή της ανάλυσης }*

(10), (5) $\vdash \square$ *{ Άρα δεν ισχύει η υπόθεση (6), άρα ισχύει* ***Wanted*** *}*

Άσκηση Λογικής Συνεπαγωγής (1/3)

- Έστω $\boldsymbol{P \equiv A \wedge B}$, $\boldsymbol{Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)}$.
- Να αποδειχτεί ότι: $\boldsymbol{P, Q \vdash \Gamma}$.

- Με απαλοιφή συζεύξεων: $\boldsymbol{A \wedge B \vdash A}$.
- Με modus ponens: $\boldsymbol{A, A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma) \vdash B \rightarrow \Gamma}$.
- Με απαλοιφή συζεύξεων: $\boldsymbol{A \wedge B \vdash B}$.
- Με modus ponens: $\boldsymbol{B, B \rightarrow \Gamma \vdash \Gamma}$.

Άσκηση Λογικής Συνεπαγωγής (2/3)

- Αν χρησιμοποιήσουμε αρχή της ανάλυσης:

$\boldsymbol{Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee \Gamma) \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee \Gamma.}$

$\boldsymbol{P \equiv A \wedge B}$ … σπάει σε 2 προτάσεις $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A, \neg A \vee \neg B \vee \Gamma \vdash \neg B \vee \Gamma.}$

$\boldsymbol{B, \neg B \vee \Gamma \vdash \Gamma.}$

Άσκηση Λογικής Συνεπαγωγής (3/3)

- Να αποδειχτεί ότι: $P \rightarrow (Q \vee R), Q \rightarrow S, R \rightarrow S \vdash P \rightarrow S.$
- Με αρχή της ανάλυσης:

$P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R$

{*μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή*}.

$Q \rightarrow S \Leftrightarrow \neg Q \vee S$ {*μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή*}.

$R \rightarrow S \Leftrightarrow \neg R \vee S$ {*μετατροπή σε συζευκτική κανονική μορφή*}.

$\neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee S \vdash \neg P \vee S \vee R$ { *αρχή της ανάλυσης* }.

$\neg P \vee S \vee R, \neg R \vee S \vdash \neg P \vee S \vee S$ { *αρχή της ανάλυσης* }.

$\neg P \vee S \vee S \Leftrightarrow \neg P \vee S$ { *ιδιότητα της διάζευξης* }.

$\neg P \vee S \Leftrightarrow P \rightarrow S$

Άσκηση Ταυτολογίας

- Έστω η πρόταση $\boldsymbol{P \equiv (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow \Gamma)}$
- Να δειχθεί ότι: $\models \boldsymbol{P}$

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow \Gamma) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee \Gamma) \vee (\neg B \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \Gamma) \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

Άσκηση μη Ορθότητας Λογικής Συνεπαγωγής

- Δείξτε ότι η λογική συνεπαγωγή $\neg P,\ P \vee Q \vdash \neg Q$ δεν ισχύει.
- Αρκεί στον πίνακα αλήθειας να βρεθεί 1 γραμμή με αληθείς <u>όλες</u> τις προτάσεις-προϋποθέσεις (premises), και ψευδή την πρόταση-συμπέρασμα.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg Q$
T	*T*	*F*	*T*	*F*
T	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*T*

Διατύπωση Προβλημάτων σε Λογική (1/2)

- *Σήμερα είτε θα έχει ήλιο, ή θα βρέξει αλλά όχι και τα δύο.*

  P ≡ «*θα έχει ήλιο*», ***Q*** ≡ «*θα βρέξει*».

  $$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

- Τελεστής XOR.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*

Διατύπωση Προβλημάτων σε Λογική (2/2)

- (1) *Αν βρέχει και ο Κώστας δεν έχει ομπρέλα μαζί του, θα βραχεί.*
- (2) *Ο Κώστας δεν βράχηκε.*
- (3) *Βρέχει.*
- (4) *Άρα ο Κώστας έχει ομπρέλα μαζί του.*

P ≡ «*βρέχει*», ***Q*** ≡ «*ο Κώστας έχει ομπρέλα μαζί του*»,
R ≡ «*ο Κώστας βράχηκε*»

$$(1)\ P \wedge \neg Q \rightarrow R,\ (2)\ \neg R,\ (3)\ P$$

$$(4)\ Q$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απόδειξη

(1) $\boldsymbol{P \wedge \neg Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \vee R \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R}$ (1’)

$\boldsymbol{\neg P \vee Q \vee R, P \vdash Q \vee R}$ (2’)

$\boldsymbol{Q \vee R, \neg R \vdash Q}$ (4)

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουήλ Ρήγας

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.