ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υπολογιστική Λογική και Λογικός Προγραμματισμός

Ενότητα 3: Λογική: Κατηγορηματική Λογική, Σχέση Λογικής και Λογικού Προγραμματισμού.

Νίκος Βασιλειάδης, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Λογική: Κατηγορηματική Λογική, Σχέση Λογικής και Λογικού Προγραμματισμού

Λογική

- Παρέχει έναν τρόπο για την αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης.
- Η *μαθηματική λογική* είναι η συστηματική μελέτη των *έγκυρων ισχυρισμών* (*valid arguments*) με χρήση εννοιών από τα μαθηματικά.
- Ένας *ισχυρισμός* (*argument*) αποτελείται από συγκεκριμένες *δηλώσεις* (*ή προτάσεις*), τις *υποθέσεις* (*premises*), από τις οποίες παράγονται άλλες δηλώσεις που ονομάζονται *συμπεράσματα* (*conclusions*).

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, **(*Δήλωση*).**

Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, **(*Δήλωση*).**

επομένως, ο Σωκράτης είναι θνητός **(*Συμπέρασμα*).**

Κατηγορηματική Λογική (1/3)

- Η κατηγορηματική λογική (*predicate logic*) αποτελεί επέκταση της προτασιακής λογικής.
- Ο κόσμος περιγράφεται σαν ένα σύνολο *αντικειμένων, ιδιοτήτων* και *σχέσεων* που προσδίδονται σε αυτά, δίνοντας έτσι την δυνατότητα για αναπαραστάσεις που είναι περισσότερο κοντά στην ανθρώπινη εμπειρία.

Κατηγορηματική Λογική (2/3)

- Η κατηγορηματική λογική αντιμετωπίζει το πρόβλημα της μη προσπελασιμότητας των στοιχείων των γεγονότων της προτασιακής λογικής.
  - Π.χ., η πρόταση " *ο τζίμης είναι τίγρης* " αναπαριστάται με *τίγρης(τζίμης)*, επιτρέποντας την προσπέλαση των στοιχείων του συγκεκριμένου αντικειμένου (*τζίμης*) από τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων για τη δημιουργία νέων προτάσεων.

Κατηγορηματική Λογική (3/3)

- Άλλη σημαντική επέκταση είναι η ύπαρξη *μεταβλητών*, που αυξάνει σημαντικά την εκφραστική ικανότητά της, καθώς επιτρέπει την αναπαράσταση "γενικής" γνώσης, όπως π.χ. "*όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί*".
- Η κατηγορηματική λογική επεκτείνει την προτασιακή λογική εισάγοντας *όρους* (*terms*), *κατηγορήματα* (*predicates*) και *ποσοδείκτες* (*quantifiers*).

Μετάβαση από την Προτασιακή Λογική στην Κατηγορηματική Λογική (1/3)

<table>
<tr><th>Προτασιακή Λογική</th><th colspan="2">Κατηγορηματική Λογική</th></tr>
<tr><td>Προτάσεις / άτομα: P, Q, R
Π.χ. Q ≡ «ο νίκος είναι προγραμματιστής».</td><td colspan="2">Ατομικοί Τύποι: p(X,Y), q(Z), r
Π.χ. είναι_προγραμματιστής(νίκος) ή
είναι(νίκος,προγραμματιστής) ή
είναι_προγραμματιστής_νίκος.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Κατηγορήματα: p, q, r
Τάξη ≡ αριθμός ορισμάτων (παραμέτρων).
Π.χ. p(X,Y) τάξη 2
είναι_προγραμματιστής(νίκος) τάξη 1
είναι_προγραμματιστής_νίκος τάξη 0
{ θα μπορούσε να γραφτεί και ως
είναι_προγραμματιστής_νίκος() }</td></tr>
<tr><td></td><td>Μεταβλητές
X, Y, Z</td><td>Σταθερές
Π.χ. νίκος, προγραμματιστής</td></tr>
</table>

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Μετάβαση από την Προτασιακή Λογική στην Κατηγορηματική Λογική (2/3)

Προτασιακή Λογική	Κατηγορηματική Λογική
Προτάσεις / άτομα: ***P***, ***Q***, ***R*** Π.χ. ***Q*** ≡ «*ο νίκος είναι προγραμματιστής*».	**Ατομικοί Τύποι**: ***p*(*X*,*Y*), *q*(*Z*), *r*** Π.χ. ***είναι_προγραμματιστής*(*νίκος*)** ή ***είναι*(*νίκος*,*προγραμματιστής*)** ή ***είναι_προγραμματιστής_νίκος*.**
	Συναρτησιακοί όροι. Π.χ. ***είναι*(*νίκος*,*προγραμματιστής*(prolog))** ***είναι*(*κώστας*,*προγραμματιστής*(java))** ***προγραμματιστής*(prolog)** ≡ συναρτησιακός όρος. ***προγραμματιστής***≡ συναρτησιακό σύμβολο. τάξη συναρτησιακού όρου ≡ αριθμός ορισμάτων. Π.χ. ***προγραμματιστής*(prolog)** ≡ τάξη 1.
	Όρος (term). Είναι τα ορίσματα των ατομικών τύπων. Σταθερά, Μεταβλητή, Συναρτησιακός όρος.

Μετάβαση από την Προτασιακή Λογική στην Κατηγορηματική Λογική (3/3)

Προτασιακή Λογική	Κατηγορηματική Λογική
Συνδετικά: ∧, ∨, ¬, →, ↔ Σύμβολα στίξης: "(", ")" και "," Σύμβολα αλήθειας: **T**, **F**	***Τα ίδια!***
	Ποσοδείκτες: ∀, ∃ Είναι απαραίτητοι για να προσδιορίσουν το εύρος τιμών των μεταβλητών. Π.χ. **∀*X είναι_πληροφορικός*(*X*) → *είναι_προγραμματιστής*(*X*).** **∃*X είναι_πληροφορικός*(*X*) ∧ ¬*είναι_προγραμματιστής*(*X*).**

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (1/5)

- *Σταθερές*, π.χ. **a, b, c, a_1, a_2**, κ.λ.π.
  - Τα ονόματα των σταθερών ξεκινούν με πεζά γράμματα ή αριθμούς.
- *Μεταβλητές*, π.χ. **X, Y, X_1, X_2, Man** κ.λ.π.
  - Οι μεταβλητές αναπαριστώνται από κεφαλαία σύμβολα του λατινικού αλφάβητου, ή τουλάχιστον τα ονόματα τους ξεκινούν με κεφαλαίο γράμμα.
- *Συναρτησιακό σύμβολο*, π.χ. **f, g, father-of** κ.λ.π.
  - Σε κάθε σύμβολο συνάρτησης αντιστοιχεί ένας αριθμός που ονομάζεται *τάξη* (*arity*).
  - Η τάξη ισούται με το πλήθος των *ορισμάτων* (*arguments*) ή αλλιώς, *παραμέτρων* (*parameters*), της συνάρτησης.

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (2/5)

- *Σύμβολα κατηγορημάτων*, π.χ. p, q, color, κ.λ.π.
  – Κάθε σύμβολο κατηγορήματος έχει μια συγκεκριμένη τάξη.
- *Συνδετικά*:
  – Τα συνδετικά της κατηγορηματικής λογικής είναι όμοια με εκείνα της προτασιακής λογικής και με την ίδια σημασιολογία.
  – "$\wedge$" σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ"), "$\vee$" διάζευξη (λογικό "Η"), "$\neg$" άρνηση, "$\rightarrow$" συνεπαγωγή ("ΕΑΝ ΤΟΤΕ"), "$\leftrightarrow$" ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ").

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (3/5)

- *Δύο ποσοδείκτες.*
  - *Υπαρξιακός* ποσοδείκτης "∃" (existential quantifier).
  - *Καθολικός* ποσοδείκτης "∀" (universal quantifier).
- *Τρία σύμβολα στίξης*: "(", ")" και ",".
- Δύο σύμβολα αλήθειας **T** (αληθές) και **F** (ψευδές).

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (4/5)

- Ένας *όρος* (*term*) της κατηγορηματικής λογικής είναι:
  - μια σταθερά (π.χ. **νίκος**).
  - μια μεταβλητή (π.χ. **X**).
  - ένας *συναρτησιακός όρος* (*functional term*) $F(t_1,t_2,\ldots,t_n)$: F είναι συναρτησιακό σύμβολο τάξης n και τα ορίσματα t_1, $t_2,\ldots,t_n$ είναι όροι.

πατέραςΤου(νίκου), πατέραςΤου(πατέραςΤου(νίκου))

- Ένας *ατομικός τύπος* (atomic formula) έχει τη μορφή

$$\mathbf{p(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$$

  - p είναι σύμβολο κατηγορήματος (ή κατηγόρημα) τάξης n και τα $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *ορίσματα* (*arguments*).
  - Κάθε όρισμα είναι όρος.

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (5/5)

- Η σύνδεση προτάσεων για τη δημιουργία *ορθά δομημένων τύπων* γίνεται με τη χρήση συνδετικών.
- Επιπρόσθετα στην κατηγορηματική λογική οι ορθά δομημένοι τύποι περιέχουν και ποσοδείκτες.
- Π.χ. ένας ορθά δομημένος τύπος:

$$\forall \mathbf{X}\ \textbf{φάλαινα}(\mathbf{X}) \rightarrow \textbf{θηλαστικό}(\mathbf{X})$$

- Για την επεξήγηση του τύπου και την απόδοση λογικής τιμής απαιτείται να ορίσουμε την σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής.

Σημασιολογία Κατηγορηματικής Λογικής (1/2)

- Μια *ερμηνεία* αντιστοιχεί τους όρους και ατομικούς τύπους της λογικής στα αντικείμενα και σχέσεις του κόσμου που αναπαριστάται.
- Η απεικόνιση όρων σε αντικείμενα ονομάζεται *ανάθεση όρων* (*term assignment*).
- Οι σταθερές αντιστοιχούνται στα αντικείμενα του κόσμου.
  - Π.χ. η σταθερά **τζίμης** αντιστοιχεί στο αντικείμενο "*τζίμης*" του κόσμου.

Σημασιολογία Κατηγορηματικής Λογικής (2/2)

- Οι συναρτησιακοί όροι αναφέρονται σε αντικείμενα, στα οποία δεν δίνουμε ένα συγκεκριμένο όνομα αλλά χρησιμοποιούμε μια περίφραση για να αναφερθούμε σ' αυτά.
  - Π.χ. για να αναφερθούμε στο κεφάλι του αντικειμένου "*τζίμης*", αντί να αντιστοιχίσουμε μια σταθερά (όνομα) χρησιμοποιούμε ένα συναρτησιακό όρο της μορφής **κεφάλι(τζίμης).**
- Ένας ατομικός τύπος απεικονίζει μια σχέση ανάμεσα στα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται τα ορίσματα του, και μπορεί να είναι αληθής όταν η σχέση ισχύει ή ψευδής.
  - Π.χ. η πρόταση ότι "ο Νίκος είναι ο πατέρας της Άννας" αναπαριστάται ως **πατέρας(νίκος, άννα).**

Μεταβλητές και Ποσοδείκτες (1/2)

- Στην *κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης* (*first order predicate logic*) οι μεταβλητές αναφέρονται μόνο σε αντικείμενα και όχι σε συναρτησιακά σύμβολα ή κατηγορήματα.
  - Οι μεταβλητές θεωρούνται όροι, όπως οι σταθερές και οι συναρτησιακοί όροι.
- Η σωστή ερμηνεία των μεταβλητών επιβάλλει την ποσοτικοποίηση τους από έναν από τους ποσοδείκτες.

άνθρωπος(X) $\rightarrow$ θνητός(X).

άνθρωπος(X) $\wedge$ μαθηματικός(X).

Μεταβλητές και Ποσοδείκτες (2/2)

- Τι ακριβώς αναπαριστούν οι τύποι;

  άνθρωπος(Χ) $\rightarrow$ θνητός(Χ).

  - όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί?
  - για κάποιο αντικείμενο Χ του πεδίου ισχύει η εν λόγω ισοδυναμία?

  άνθρωπος(Χ) $\wedge$ μαθηματικός(Χ).

  - όλα τα αντικείμενα Χ του πεδίου είναι άνθρωποι και μαθηματικοί ?
  - κάποιος άνθρωπος είναι μαθηματικός?
- Η αποσαφήνιση της σημασίας των παραπάνω εκφράσεων απαιτεί την εισαγωγή κατάλληλων ποσοδεικτών.

Υπαρξιακός Ποσοδείκτης (1/2)

"∃" (*existential quantifier*).

- Ο τύπος **(∃X)(φ(X))** προφέρεται "*υπάρχει **X,** τέτοιο ώστε ο τύπος **φ(X)** να αληθής*".
- Σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο στο πεδίο τέτοιο, ώστε όταν το **X** αναφέρεται σ' αυτό, ο τύπος **φ(X)** καθίσταται αληθής.

(∃X)(άνθρωπος(X) $\wedge$ μαθηματικός(X)).

"*κάποιος άνθρωπος είναι μαθηματικός*“.

Υπαρξιακός Ποσοδείκτης (2/2)

$(\exists X)$(άνθρωπος(X) $\wedge$ μαθηματικός(X)).

- Για να αληθεύει η παραπάνω πρόταση θα πρέπει να υπάρχει οπωσδήποτε τουλάχιστον ένας άνθρωπος και να είναι και μαθηματικός.
- Η πρόταση είναι ψευδής όταν:
  - Δεν υπάρχει κανείς άνθρωπος, ή
  - Δεν υπάρχει κανείς μαθηματικός, ή
  - Και τα δύο.
- Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι «σφιχτός» στην αλήθεια και «χαλαρός» στο ψεύδος.

Καθολικός Ποσοδείκτης

"∀" (*universal quantifier*).

- Ο τύπος **(∀X)(φ(X))** προφέρεται "*για κάθε **X**, ο **φ(X)** είναι αληθής*".
- Σημαίνει ότι καθένα από τα στοιχεία του πεδίου τον καθιστά αληθή, όταν το X αναφέρεται σ' αυτά τα στοιχεία.
- Ο τύπος **(∀X)(φ(X))** είναι αληθής, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του πεδίου τον καθιστά αληθή.

(∀X)(άνθρωπος(X) → θνητός(X)).

"*όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί*".

Καθολικός Ποσοδείκτης

$(\forall X)$(άνθρωπος$(X) \rightarrow$ θνητός(X)).

- Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής όταν:
  - Για κάθε άνθρωπο που υπάρχει, αυτός είναι και θνητός (**T→T**).
  - Για οποιοδήποτε άλλο **X** που δεν είναι άνθρωπος, χωρίς να ενδιαφέρει αν είναι θνητός ή όχι (**F→T**, **F→F**).
    - Όταν δεν υπάρχει κανείς άνθρωπος, η πρόταση είναι αληθής.
- Η πρόταση είναι ψευδής όταν υπάρχει ($\exists$) έστω και ένας άνθρωπος που δεν είναι θνητός (**T□F**).
- Ο καθολικός ποσοδείκτης είναι «χαλαρός» στην αλήθεια και «σφιχτός» στο ψεύδος.

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (1/5)

- Κατηγορήματα ***father*(*X*,*Y*), *mother*(*X*,*Y*), *husband*(*X*,*Y*), *brother*(*X*,*Y*), *sister*(*X*,*Y*).**
- Διατυπώστε σε κατηγορηματική λογική τις ακόλουθες προτάσεις.
- *Ο Κώστας και η Μαίρη είναι ανδρόγυνο.*

  ***husband*(*kostas*,*mary*).**

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (2/5)

- *Όλοι έχουν μητέρα.*

ΣΩΣΤΟ: $\forall X\, \exists Y\, mother(Y, X).$

ΛΑΘΟΣ: $\forall X\, \forall Y\, mother(Y, X).$

  – Σημαίνει: *όλοι έχουν όλες τις μητέρες.*

- Παραλλαγή: *Όλοι οι άνθρωποι έχουν μητέρα.*

ΣΩΣΤΟ: $\forall X\, \mathrm{human}(X) \rightarrow \exists Y\, mother(Y, X).$

ΛΑΘΟΣ: $\forall X\, \forall Y\, \mathrm{human}(X) \rightarrow mother(Y, X).$

  – Σημαίνει: *όλοι οι άνθρωποι έχουν όλες τις μητέρες.*

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (3/5)

- *Όλοι έχουν μητέρα και πατέρα.*

ΣΩΣΤΟ: $\forall X\, \exists Y\, \exists Z\, mother(Y, X) \wedge father(Z, X).$

ΛΑΘΟΣ: $\forall X\, \exists Y\, mother(Y, X) \wedge father(Y, X).$

  - Σημαίνει: *όλοι έχουν μητέρα και πατέρα το ίδιο άτομο!*

- *Όποιος έχει μητέρα, έχει και πατέρα.*

$$\forall X\, \exists Y\, mother(Y, X) \rightarrow \exists Z\, father(Z, X).$$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (4/5)

- *Ο Κώστας είναι παππούς.*

$\exists Z\ \exists Y\ father(kostas,Z) \land (father(Z,Y) \lor mother(Z,Y))$.

Ή

$\forall X\ \forall Y\ (\exists Z\ father(X,Z) \land (father(Z,Y) \lor mother(Z,Y)) \leftrightarrow grandfather(X,Y)$.

$\exists Y\ grandfather(kostas,Y)$.

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (5/5)

- Όλοι οι πατεράδες είναι γονείς.

  $\forall X \, \forall Y \, father(X,Y) \rightarrow (father(X,Y) \vee mother(X,Y)).$

ή

$\forall X \, \forall Y \, father(X,Y) \rightarrow parent(X,Y),$

$\forall X \, \forall Y \, mother(X,Y) \rightarrow parent(X,Y).$

ή

$\forall X \, \forall Y \, (father(X,Y) \vee mother(X,Y)) \leftrightarrow parent(X,Y).$

Αντικατάσταση

- Οι έννοιες της αντικατάστασης και της ενοποίησης είναι σημαντικές για την εφαρμογή των κανόνων συμπερασμού της κατηγορηματικής λογικής και την εξαγωγή νέας γνώσης.
- Η *αντικατάσταση* (*substitution*) αφορά την αντικατάσταση των μεταβλητών που εμφανίζονται σε ένα τύπο από κάποιους όρους.
- Μια αντικατάσταση παριστάνεται με $\mathbf{\{X_i/t_i\}}$ όπου $\mathbf{X_i}$ η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και $\mathbf{t_i}$ ο όρος.
  - Π.χ. η αντικατάσταση **{X/φάλαινα}** στον τύπο:

    είναι(X, θηλαστικό).
  - θα δώσει τον τύπο: **είναι(φάλαινα, θηλαστικό).**

Ενοποίηση

- *Ενοποίηση* (*unification*) είναι η διαδικασία κατά την οποία δύο εκφράσεις γίνονται συντακτικά όμοιες με την χρήση αντικαταστάσεων.
- Π.χ. οι ακόλουθες προτάσεις:

  είναι(λιοντάρι, θηλαστικό, X).

  είναι(λιοντάρι, Y, σαρκοβόρο).

  – ενοποιούνται με την αντικατάσταση **θ={X/σαρκοβόρο, Y/θηλαστικό}**.

Ενοποιητής

- Για δύο εκφράσεις $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$, ο *ενοποιητής* (*unifier*) τους, είναι μια αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta}$ τέτοια ώστε η έκφραση $\boldsymbol{\varphi_1\theta}$ να είναι συντακτικά όμοια με την $\boldsymbol{\varphi_2\theta}$.
- Αν υπάρχει μια τέτοια αντικατάσταση οι εκφράσεις $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$ ονομάζονται *ενοποιήσιμες* (*unifiable*).
- Υπάρχουν πολλοί δυνατοί ενοποιητές ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες εκφράσεις.
- Ο *γενικότερος ενοποιητής* (*mgu - most general unifier*) ενοποιεί τις εκφράσεις με τις λιγότερες δυνατές αντικαταστάσεις.

Αλγόριθμος Ενοποίησης (1/2)

- Η εύρεση του γενικότερου ενοποιητή ανάμεσα σε δύο εκφράσεις βρίσκεται με τον αναδρομικό αλγόριθμο:
  - Δύο σταθερές ενοποιούνται αν και μόνο αν είναι ίδιες.
  - Μια μεταβλητή ενοποιείται με οποιονδήποτε όρο.
    - Εισάγεται μια νέα αντικατάσταση στον γενικότερο ενοποιητή.
  - Δύο συναρτησιακοί όροι ενοποιούνται αν
    - έχουν το ίδιο συναρτησιακό σύμβολο,
    - έχουν την ίδια τάξη (αριθμό ορισμάτων), και
    - κάθε όρισμα του πρώτου μπορεί να ενοποιηθεί με το αντίστοιχο σε θέση όρισμα του δεύτερου όρου.

Αλγόριθμος Ενοποίησης (2/2)

- Δυο ατομικοί τύποι ενοποιούνται αν
  - έχουν το ίδιο κατηγόρημα,
  - έχουν την ίδια τάξη (αριθμό ορισμάτων), και
  - κάθε όρισμα του πρώτου μπορεί να ενοποιηθεί με το αντίστοιχο σε θέση όρισμα του δεύτερου ατομικού τύπου.

Αλγόριθμος Ενοποίησης
Ιδιότητες (1/2)

- Ο αλγόριθμος ενοποίησης είναι αποδοτικός.
- Χρησιμοποιείται σε σχεδόν όλα τα συστήματα λογικού προγραμματισμού που βασίζονται στην κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης (πχ. Prolog).

Αλγόριθμος Ενοποίησης
Ιδιότητες (2/2)

- Ο αλγόριθμος ενοποίησης **δεν είναι ορθός**.
- Η μη ορθότητα του αλγορίθμου έγκειται στις περιπτώσεις όπου η προς ενοποίηση μεταβλητή εμφανίζεται στον όρο με τον οποίο θα ενοποιηθεί.
  – Π.χ. η ενοποίηση **X=επάγγελμα(X)** δίνει **X=επάγγελμα(επάγγελμα(επάγγελμα(...)))**
  – Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σαν *έλεγχος εμφάνισης* (*occurs check*) και η αποφυγή του απαιτεί τη χρήση ενός αλγορίθμου με μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Ασκήσεις Ενοποίησης (1/2)

- Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ενοποίησης, βρείτε το γενικότερο ενοποιητή των παρακάτω λογικών τύπων:

πατέρας(νίκος,X)	***πατέρας(Y,θανάσης)***	***{Y/νίκος,X/θανάσης}***
επάγγελμα(X,μισθός(υψηλός), ωράριο(12))	***επάγγελμα(νίκος,Y,Z)***	***{X/νίκος, Y/μισθός(υψηλός), Z/ωράριο(12)}***
μηχανή(μέρος(έμβολο), λειτουργεί)	***μηχανή(X,βλάβη)***	*Δεν ενοποιείται*
υπάλληλος(κώστας, διευθυντής(κώστας))	***υπάλληλος(κώστας,νίκος)***	*Δεν ενοποιείται*

Ασκήσεις Ενοποίησης (2/2)

***υπάλληλος*(*κώστας*, *διευθυντής*(*κώστας*))**	***υπάλληλος*(*X*, *διευθυντής*(*X*))**	**{*X*/*κώστας*}**
***υπάλληλος*(*κώστας*,*Y*)**	***υπάλληλος*(*X*, *διευθυντής*(*X*))**	**{*X*/*κώστας*, *Y*/*διευθυντής*(*κώστας*))}**
***υπάλληλος*(*κώστας*, *διευθυντής*(*νίκος*))**	***υπάλληλος*(*X*, *διευθυντής*(*X*))**	*Δεν ενοποιείται*

Ισοδυναμίες
Από την Προτασιακή Λογική

Ισοδυναμία		Ονομασία
(1)	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$	νόμος της διπλής άρνησης
(2)	$(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$	νόμος De Morgan
(3)	$(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	νόμος De Morgan
(4)	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	επιμερισμός ως προς την σύζευξη
(5)	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	επιμερισμός ως προς την διάζευξη
(6)	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
(7)	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	

Ισοδυναμίες - Για Ποσοδείκτες

(8)	$\forall X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\exists X(\neg p(X))$	
(9)	$\exists X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\forall X(\neg p(X))$	
(10)	$\forall X(p(X)) \vee q \Leftrightarrow \forall X(p(X) \vee q)$	όπου το q δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής X.
(11)	$\forall X(p(X)) \wedge q \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q)$	
(12)	$\exists X(p(X)) \vee q \Leftrightarrow \exists X(p(X) \vee q)$	
(13)	$\exists X(p(X)) \wedge q \Leftrightarrow \exists X(p(X) \wedge q)$	
(14)	$\forall X(p(X)) \Leftrightarrow \forall Y(p(Y))$	μετονομασία μεταβλητών
(15)	$\exists X(p(X)) \Leftrightarrow \exists Y(p(Y))$	
(16)	$\forall X(p(X)) \wedge \forall X(q(X)) \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q(X))$	
(17)	$\exists X(p(X)) \vee \exists X(q(X)) \Leftrightarrow \exists X(p(X) \vee q(X))$	

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (1/6)

- *Κανένας θείος δεν είναι θεία!*

$\forall X\, \forall Y\, (\exists Z\, (brother(X,Z) \land (father(Z,Y) \lor mother(Z,Y))) \leftrightarrow uncle(X,Y)$

$\forall X\, \forall Y\, (\exists Z\, (sister(X,Z) \land (father(Z,Y) \lor mother(Z,Y))) \leftrightarrow aunt(X,Y)$

$\neg(\exists X\, \exists Y\, \exists Z\, (uncle(X,Y) \land aunt(X,Z)))$

$\Downarrow$

$\forall X\, \forall Y\, \forall Z\, \neg(uncle(X,Y) \land aunt(X,Z))$

$\Downarrow$

$\forall X\, \forall Y\, \forall Z\, (\neg uncle(X,Y) \lor \neg aunt(X,Z))$

$\Downarrow$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (2/6)

$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\neg(\exists W\ (brother(X,W) \wedge (father(W,Y) \vee mother(W,Y))) \vee$

$\neg(\exists Q\ (sister(X,Q) \wedge (father(Q,Z) \vee mother(Q,Z))))$

$\Downarrow$

$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\ (\forall W\ \neg(brother(X,W) \wedge (father(W,Y) \vee mother(W,Y))) \vee$

$(\forall Q\ \neg(sister(X,Q) \wedge (father(Q,Z) \vee mother(Q,Z))))$

$\Downarrow$

$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\ (\forall W\ (\neg brother(X,W) \vee \neg(father(W,Y) \vee mother(W,Y))) \vee$

$(\forall Q\ (\neg sister(X,Q) \vee \neg(father(Q,Z) \vee mother(Q,Z))))$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (3/6)

$\Downarrow$

$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\ (\forall W\ (\neg brother(X,W) \vee (\neg father(W,Y) \wedge \neg mother(W,Y))) \vee$

$(\forall Q\ (\neg sister(X,Q) \vee (\neg father(Q,Z) \wedge \neg mother(Q,Z))))$

$\Downarrow$

$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\ (\forall W\ (\neg brother(X,W) \vee \neg father(W,Y)) \wedge (\neg brother(X,W) \vee \neg mother(W,Y))) \vee$

$(\forall Q\ (\neg sister(X,Q) \vee \neg father(Q,Z)) \wedge (\neg sister(X,Q) \vee \neg mother(Q,Z))))$

$\Downarrow$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (4/6)

$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ \forall W\ \forall Q$$

$$(\neg brother(X,W) \lor \neg father(W,Y) \lor \neg sister(X,Q) \lor \neg father(Q,Z)) \land$$

$$(\neg brother(X,W) \lor \neg father(W,Y) \lor \neg sister(X,Q) \lor \neg mother(Q,Z)) \land$$

$$(\neg brother(X,W) \lor \neg mother(W,Y) \lor \neg sister(X,Q) \lor \neg father(Q,Z)) \land$$

$$(\neg brother(X,W) \lor \neg mother(W,Y) \lor \neg sister(X,Q) \lor \neg mother(Q,Z)))$$

$$\Downarrow$$

$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ \forall W\ \forall Q$$

$$\neg\ (brother(X,W) \land father(W,Y) \land sister(X,Q) \land father(Q,Z)) \land$$

$$\neg\ (brother(X,W) \land father(W,Y) \land sister(X,Q) \land mother(Q,Z)) \land$$

$$\neg\ (brother(X,W) \land mother(W,Y) \land sister(X,Q) \land father(Q,Z)) \land$$

$$\neg\ (brother(X,W) \land mother(W,Y) \land sister(X,Q) \land mother(Q,Z)))$$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (5/6)

- *Ο Γιάννης και η Σοφία είναι κουνιάδοι.*

$$\forall X \forall Y (\exists Z \exists W (brother(Z,X) \wedge husband(Z,W) \wedge sister(W,Y)) \leftrightarrow siblings\text{-}in\text{-}law(X,Y)$$

$$siblings\text{-}in\text{-}law(john,sophia) \vee siblings\text{-}in\text{-}law(sophia,john)$$

$$\Downarrow$$

$$(\exists Z \exists W (brother(Z,john) \wedge husband(Z,W) \wedge sister(W,sophia)) \vee$$

$$(\exists Z \exists W (brother(Z,sophia) \wedge husband(Z,W) \wedge sister(W,john))$$

Διατύπωση Προτάσεων στην Κατηγορηματική Λογική (6/6)

$$\Downarrow$$

$$(\exists Z\, \exists W\, (brother(Z,john) \wedge husband(Z,W) \wedge sister(W,sophia))$$

$$\vee$$

$$(\exists F\, \exists G\, (brother(F,sophia) \wedge husband(F,G) \wedge sister(G,john))$$

$$\Downarrow$$

$$\exists Z\, \exists W\, \exists F\, \exists G$$

$$(brother(Z,john) \wedge husband(Z,W) \wedge sister(W,sophia)) \vee$$

$$(brother(F,sophia) \wedge husband(F,G) \wedge sister(G,john))$$

Ισοδύναμοι Τύποι

- Το πλούσιο αλφάβητο της κατηγορηματικής λογικής επιτρέπει την ύπαρξη τύπων που αν και φαινομενικά διαφορετικοί, είναι στην ουσία λογικά ισοδύναμοι.

$$\neg((\exists X)(p(X) \rightarrow q(X)))$$

$$(\forall X)(p(X) \wedge \neg q(X))$$

- Η δυνατότητα αναγωγής ενός τύπου σε μια περιορισμένη κανονική μορφή θα ήταν χρήσιμη για συγκρίσεις τέτοιων εκφράσεων, αλλά και στις αποδεικτικές διαδικασίες.

Προσημασμένη Συζευκτική Κανονική Μορφή (1/3)

- *Προσημασμένη συζευκτική κανονική μορφή* (*prenex conjunctive normal form*), η μορφή της οποίας είναι

$$\forall X \exists Y\ (\ \underline{p(X)} \wedge \underline{\neg q(X)} \wedge \underline{(p(X) \vee \neg p(X) \vee q(X,\ Y))} \wedge \ldots \wedge \underline{(r(X,Y) \vee s(X))}\ ).$$

- Τα βασικά δομικά στοιχεία της μορφής αυτής είναι τα λεκτικά στοιχεία (literals) (π.χ. **p(X)**, **¬q(X)**), τα οποία με τη σειρά τους συγκροτούν τις *προτάσεις* (*clauses*) (π.χ. **r(X,Y)∨s(X)**).

Προσημασμένη Συζευκτική Κανονική Μορφή (2/3)

- Ένα λεκτικό στοιχείο είναι ένας ατομικός τύπος ή η άρνηση ενός ατομικού τύπου.
  - Π.χ. **r(X,Y)** , **$\neg$q(X)**
- Μια πρόταση είναι μια πεπερασμένη διάζευξη (disjunction) κανενός ή περισσοτέρων λεκτικών στοιχείων.
  - Π.χ. η έκφραση **p(X) $\vee$ $\neg$p(X) $\vee$ q(X, Y)** είναι μια πρόταση, αφού είναι διάζευξη τριών λεκτικών στοιχείων.
  - Π.χ. η έκφραση **$\neg$q(X)** είναι μια πρόταση, ακόμα και αν δεν αποτελείται από διαζεύξεις λεκτικών.

Προσημασμένη Συζευκτική Κανονική Μορφή (3/3)

- Η διάζευξη μηδέν στο πλήθος λεκτικών στοιχείων ονομάζεται κενή *πρόταση* (*empty clause*) και αναπαρίσταται με το σύμβολο □.
- Ένας τύπος (formula) στην μορφή αυτή αποτελείται από μια σύζευξη προτάσεων, η οποία είναι προσημασμένη από υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες στις μεταβλητές που εμφανίζονται στις προτάσεις.

∀X (¬έχει(X,τρίχωμα) ∨ ¬παράγει(X, γάλα) ∨ είναι(X, θηλαστικό)).

∀X ((¬έχει(X, φτερά) ∨ είναι(X, πουλί)) ∧ (¬γεννάει(X, αυγά)) ∨ είναι(X, πουλί))).

Διαδικασία Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (1/3)

- Απαλοιφή των συνδετικών της ισοδυναμίας και συνεπαγωγής.
  - (6) $\mathbf{(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q}$
  - (7) $\mathbf{(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
- Μετονομασία των μεταβλητών έτσι ώστε δύο μεταβλητές που ποσοτικοποιούνται από διαφορετικούς ποσοδείκτες να μην έχουν το ίδιο όνομα.
  - (14) $\forall \mathbf{X(p(X)) \Leftrightarrow} \forall \mathbf{Y(p(Y))}$
  - (15) $\exists \mathbf{X(p(X)) \Leftrightarrow} \exists \mathbf{Y(p(Y))}$

Διαδικασία Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (2/3)

- Μετατροπή των τύπων έτσι ώστε το συνδετικό της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο σε ατομικούς τύπους.
  - (1) $\mathbf{p \Leftrightarrow \neg\neg p}$
  - (2) $\mathbf{(\neg p \lor \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \land q)}$
  - (3) $\mathbf{(\neg p \land \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \lor q)}$
  - (8) $\mathbf{\forall X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\exists X(\neg p(X))}$
  - (9) $\mathbf{\exists X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\forall X(\neg p(X))}$

Διαδικασία Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (3/3)

- Μεταφορά των ποσοδεικτών με αναδρομική εφαρμογή των ισοδυναμιών (10)-(13).
  - (10) $\forall \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X})) \vee \mathbf{q} \Leftrightarrow \forall \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X}) \vee \mathbf{q})$.
  - (11) $\forall \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X})) \wedge \mathbf{q} \Leftrightarrow \forall \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X}) \wedge \mathbf{q})$.
  - (12) $\exists \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X})) \vee \mathbf{q} \Leftrightarrow \exists \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X}) \vee \mathbf{q})$.
  - (13) $\exists \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X})) \wedge \mathbf{q} \Leftrightarrow \exists \mathbf{X}(\mathbf{p}(\mathbf{X}) \wedge \mathbf{q})$.
- Εφαρμογή των ισοδυναμιών επιμερισμού έτσι ώστε ο τελικός τύπος να αποτελείται από συζεύξεις προτάσεων.
  - (4) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r} \Leftrightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$.
  - (5) $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \Leftrightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.

Παράδειγμα Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (1/3)

$\forall$X (βλάβη(X) $\rightarrow$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\neg$($\exists$Y(βλαβη(Y) $\wedge$ μηχάνημα(λειτουργεί)).

- Απαλοιφή του συνδετικού της ισοδυναμίας που εμφανίζεται στην πρώτη σύζευξη (ισοδυναμία (6)):

$\forall$X ($\neg$βλάβη(X) $\vee$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\neg$($\exists$Y(βλαβη(Y) $\wedge$ μηχάνημα(λειτουργεί)).

Παράδειγμα Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (2/3)

- Επειδή η μεταβλητή Υ εμφανίζεται ποσοτικοποιημένη από δύο διαφορετικούς ποσοδείκτες, η δεύτερη της εμφάνιση μετονομάζεται σε Z.

∀X (¬βλάβη(X) ∨ ∃Y(σύμπτωμα(X,Y))) ∧ ¬(∃Z(βλάβη(Z) ∧ μηχάνημα(λειτουργεί)).

- Εφαρμογή ισοδυναμιών DeMorgan και (9) έτσι ώστε να εφαρμόζεται η άρνηση μόνο σε ατομικούς τύπους:

∀X (¬βλάβη(X) ∨ ∃Y(σύμπτωμα(X,Y))) ∧

∀Z(¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί)).

Παράδειγμα Αναγωγής σε Κανονική Μορφή (3/3)

- Εφαρμογή των ισοδυναμιών (10) και (12) για την κατάλληλη ομαδοποίηση των λεκτικών.

∀X ∃Y ∀Z ((¬βλάβη(X) ∨ σύμπτωμα(X,Y)) ∧ (¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί))).

- Δεν απαιτείται περαιτέρω εφαρμογή ισοδυναμιών καθώς ο παραπάνω τύπος είναι μια σύζευξη προτάσεων (διαζεύξεων).

Κανονική Μορφή κατά Skolem (1/3)

- Είναι δυνατό να υπάρξει κάποια κανονική μορφή στην οποία να εξαλείφονται πλήρως οι ποσοδείκτες;
- *Κανονική μορφή κατά Skolem*, στην οποία οι υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες εμφανίσεις μεταβλητών αντικαθίστανται από σταθερές ή συναρτήσεις καθολικά ποσοτικοποιημένων μεταβλητών.
- Π.χ. $\exists$**X human(X)** $\land$ **professor(X)**
- Μορφή Skolem: **human(sk_X)** $\land$ **professor(sk_X)**
- **sk_X** είναι μια σταθερά Skolem.
  - Ο δείκτης X υπενθυμίζει το όνομα της μεταβλητής από όπου προήλθε η σταθερά και δεν έχει κανένα ουσιαστικό νόημα.

Κανονική Μορφή κατά Skolem (2/3)

- Το όνομα της σταθεράς μπορεί να είναι αυθαίρετο.

human(a) $\wedge$ professor(a)

- Αρκεί να είναι μοναδικό στην περίπτωση που υπάρχουν πολλές μεταβλητές υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες στο ίδιο σύνολο προτάσεων.
- Π.χ. αν υπάρχει και ο τύπος

$\exists$Y human(Y) $\wedge$ student(Y)

  - Πρέπει η Y να αντικατασταθεί από άλλη σταθερά.

human(b) $\wedge$ student(b)

ή καλύτερα

human(sk_Y) $\wedge$ student(sk_Y).

Κανονική Μορφή κατά Skolem (3/3)

- Όταν μια υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή εξαρτάται από μια καθολικά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή (ή καλύτερα βρίσκεται μέσα στο εύρος επιρροής της – scope), τότε η αντικατάσταση γίνεται με συνάρτηση Skolem και όχι σταθερά.
- Π.χ. *Όλοι έχουν μητέρα* $\forall X\ \exists Y\ mother(Y, X).$
- **ΛΑΘΟΣ:** $\forall X\ mother(sk_Y, X).$
  - Όλοι οι Χ έχουν την ίδια σταθερά sk_Y ως μητέρα!
- **ΣΩΣΤΟ:** $\forall X\ mother(sk\_fun_Y(X), X).$
  - Κάθε Χ έχει διαφορετική μητέρα $sk\_fun_Y(X)$.
  - Η τιμή της εξαρτάται από το Χ – είναι συνάρτηση του Χ.

Αλγόριθμος Μετατροπής σε Κανονική Μορφή Skolem (1/2)

- Έστω $\exists \mathbf{X_i}$ η πρώτη από αριστερά υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή στον τύπο.
  - $\forall \mathbf{X_1} \dots \forall \mathbf{X_{i-1}}$ είναι οι καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές του τύπου, μέσα στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται το $\exists \mathbf{X_i}$
    - Βρίσκονται στα "αριστερά του $\exists \mathbf{X_i}$
- Αν δεν υπάρχουν καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές στα αριστερά της $\mathbf{X_i}$, τότε:
  - κάθε εμφάνιση της $\mathbf{X_i}$ στο τύπο αντικαθίσταται από μια νέα σταθερά Skolem $\mathbf{sk_{Xi}}$

Αλγόριθμος Μετατροπής σε Κανονική Μορφή Skolem (2/2)

- Αν υπάρχουν καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές στα αριστερά της $\mathbf{X_i}$, τότε
  - κάθε εμφάνιση της $\mathbf{X_i}$ στον τύπο αντικαθίσταται από μια νέα συνάρτηση Skolem $\mathbf{sk\_func_{Xi}(X_1,\ldots,X_{i-1})}$ στις μεταβλητές $\mathbf{X_1 \ldots X_{i-1}}$
  - Διάγραψε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists \mathbf{X_i}$ από τον τύπο.
- Αν υπάρχουν άλλοι υπαρξιακοί ποσοδείκτες στον τύπο, τότε πήγαινε στο βήμα 1.
- Διάγραψε όλους τους καθολικούς ποσοδείκτες.

Παράδειγμα Κανονικής Μορφής Skolem

$\forall$X $\exists$Y $\forall$Z (($\neg$βλάβη(X) $\vee$ σύμπτωμα(X,Y)) $\wedge$ ($\neg$βλάβη(Z) $\vee$ $\neg$μηχάνημα(λειτουργεί)))

- Στον τύπο υπάρχει μόνο ένας υπαρξιακός ποσοδείκτης ($\exists$**Y**) μέσα στην εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη $\forall$**X**.
- Ο ποσοδείκτης αντικαθίσταται από την συνάρτηση Skolem **sk_function$_{\gamma}$(X)**:

$\forall$X $\forall$Z(($\neg$βλάβη(X) $\vee$ σύμπτωμα(X, sk_func$_{\gamma}$(X)))

$\wedge$ ($\neg$βλάβη(Z) $\vee$ $\neg$μηχάνημα(λειτουργεί)))

  - Η συνάρτηση Skolem δεν εξαρτάται από την μεταβλητή **Z** αλλά μόνο από την **X**.

- Εφόσον δεν υπάρχουν άλλοι υπαρξιακοί ποσοδείκτες, διαγράφονται όλοι οι καθολικοί ποσοδείκτες από τον παραπάνω τύπο:

($\neg$βλάβη(X) $\vee$ σύμπτωμα(X, sk_func$_{\gamma}$(X)))

$\wedge$($\neg$βλάβη(Z) $\vee$ $\neg$μηχάνημα(λειτουργεί))

Προτασιακή Μορφή της Κατηγορηματικής Λογικής (1/2)

- Ο τελευταίος μετασχηματισμός αφορά την μετατροπή ενός τύπου κανονικής μορφής σε ένα σύνολο προτάσεων,
  - Προτασιακή μορφή της λογικής (clausal form).
- Ο μετασχηματισμός βασίζεται στον κανόνα της απαλοιφής σύζευξης:

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

- Ένας τύπος της μορφής **p ∧ q ∧ r ∧ s** μετατρέπεται στο σύνολο των τύπων **{p, q, r, s}.**
- Αν οι παραπάνω κανόνες εφαρμοστούν σε ένα τύπο που είναι εκφρασμένος στην κανονική μορφή κατά Skolem, τότε το σύνολο των τύπων που προκύπτει αποτελείται από προτάσεις (διαζεύξεις λεκτικών στοιχείων ή αρνήσεις αυτών).

Προτασιακή Μορφή της Κατηγορηματικής Λογικής (2/2)

- Για παράδειγμα ο τύπος

  (¬βλάβη(X) ∨ σύμπτωμα(X, sk_func$_{\gamma}$(X))) ∧

  (¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί))

- μετατρέπεται στις προτάσεις:

  ¬βλάβη(X) ∨ σύμπτωμα(X, sk_func$_{\gamma}$(X))

  ¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί)

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπερασμάτων

- Ο βασικός μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων στην κατηγορηματική λογική είναι η απόδειξη.
- Υπάρχουν πολλοί κανόνες συμπερασμού που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια αποδεικτική διαδικασία.
  - Αυτοί που ισχύουν στην προτασιακή λογική, π.χ. "τρόπος του θέτειν" (modus ponens), η εισαγωγή συζεύξεων, η εισαγωγή διαζεύξεων κλπ.
  - Επιπλέον υπάρχουν δύο κανόνες που αφορούν προτάσεις που περιέχουν ποσοτικοποιημένες μεταβλητές.
  - Όλοι οι κανόνες βασίζονται στην έννοια της αντικατάστασης μεταβλητών.

Κανόνες Συμπερασμού της Κατηγορηματικής Λογικής

Κανόνας Συμπερασμού			Ονομασία
(1)	$p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \wedge p_n$	$\vdash p_i$	απαλοιφή σύζευξης (and elimination)
(2)	$p_1, p_2, \dots p_n$	$\vdash \ p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \wedge p_n$	εισαγωγή συζεύξεων (and introduction)
(3)	p_i	$\vdash \ p_1 \vee p_2 \vee \ \dots \vee p_n$	εισαγωγή διαζεύξεων (or introduction)
(4)	$\neg\neg p$	$\vdash p$	απαλοιφή διπλής άρνησης (double negation elimination)
(5)	$p, p \rightarrow q$	$\vdash \ q$	τρόπος του θέτειν (modus ponens)
(6)	$p \vee q, \neg q \vee r$	$\vdash p \vee r$	αρχή της ανάλυσης (resolution)
(7)	$\forall X p(X)$	$\vdash p(a)\ \theta=\{X/a\}$	απαλοιφή καθολικού ποσοδείκτη (universal elimination)
(8)	$p(a)$	$\vdash \exists X p(X)\ \theta=\{X/a\}$	εισαγωγή υπαρξιακού ποσοδείκτη (existential introduction)

Modus Ponens και Αντικατάσταση

$(\forall X)$(άνθρωπος(X) $\rightarrow$ θνητός(X)) (1)

άνθρωπος(νίκος) (2)

- Σύμφωνα με τον κανόνα συμπερασμού (7) και την αντικατάσταση **θ={X/νίκος}** είναι δυνατό να εξαχθεί το συμπέρασμα:

άνθρωπος(νίκος) $\rightarrow$ θνητός(νίκος) (3)

- Με εφαρμογή του κανόνα "*τρόπος του θέτειν*" (*modus ponens*) στις προτάσεις (2) και (3), εξάγεται η πρόταση

θνητός(νίκος) (4)

Γενικευμένος Τρόπος του Θέτειν

- Οι κανόνες συμπερασμού της απαλοιφής του καθολικού ποσοδείκτη και του "τρόπου του θέτειν" μπορούν να συνδυαστούν σε ένα μόνο κανόνα συμπερασμού που ονομάζεται "*γενικευμένος τρόπος του θέτειν*" (*generalized modus ponens*):

$$\frac{p'_1 , p'_2 \ldots, p'_n , p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n \rightarrow q}{\theta\, q}$$

- **θ** το σύνολο των αντικαταστάσεων οι οποίες κάνουν τα $\mathbf{p'_i}$ και $\mathbf{p_i}$ συντακτικά όμοια, όπως προκύπτει από μια διαδικασία ενοποίησης των τύπων.

Παράδειγμα Γενικευμένου Modus Ponens

- Με τη χρήση του γενικευμένου τρόπου του "θέτειν" (ΓΤΘ) η εξαγωγή του συμπεράσματος γίνεται σε ένα βήμα:

(∀X)(άνθρωπος(X) → θνητός(X))

άνθρωπος(νίκος)

θνητός(νίκος) (με θ={X/νίκος})

- Μια αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιεί ως μοναδικό κανόνα συμπερασμού τον ΓΤΘ είναι ορθή αλλά στην γενική περίπτωση δεν είναι πλήρης.
  - Είναι πλήρης μόνο αν η βάση γνώσης αποτελείται από προτάσεις Horn.

Η Αρχή της Ανάλυσης στην Κατηγορηματική Λογική (1/2)

- Η *αρχή της ανάλυσης* (*resolution*) είναι ο **μοναδικός κανόνας** που απαιτείται για την εξαγωγή **όλων των σωστών** συμπερασμάτων σε μια αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της "*εις άτοπο απαγωγής*" (*refutation*).
  - Η διαδικασία απόδειξης είναι ορθή και πλήρης.
- Στην απλή περίπτωση περιλαμβάνει προτάσεις οι οποίες περιέχουν το πολύ δύο λεκτικά στοιχεία (literals).

$$\frac{p \vee \neg q,\ z \vee q'}{\theta(p \vee z)}$$

Η Αρχή της Ανάλυσης στην Κατηγορηματική Λογική (2/2)

$$\frac{p \vee \neg q,\ z \vee q'}{\theta(p \vee z)}$$

- Τα λεκτικά στοιχεία q' και $\neg q$ ονομάζονται συμπληρωματικά ζεύγη και δεν είναι ανάγκη να είναι "απολύτως" όμοια, αλλά να ενοποιούνται με κατάλληλες αντικαταστάσεις (ενοποιητής ϑ).
- Οι αντικαταστάσεις μεταβλητών που προκύπτουν εφαρμόζονται στο αναλυθέν (resolvent) $p \vee z$.

Διαδικασία Απόδειξης

- Για να είναι δυνατή η εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης οι προτάσεις πρέπει να είναι σε μορφή διαζεύξεων (**προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής**).
- **Εισαγωγή** της **άρνησης** της προς απόδειξης **πρότασης** στο αρχικό σύνολο προτάσεων.
- **Εφαρμογή** του κανόνα της **ανάλυσης** μέχρι το σύστημα να εξαγάγει την **κενή πρόταση** (άτοπο) □.

Παράδειγμα
Αντικατάσταση Εμβόλου Μηχανής

- **βλάβη(μηχανή).**
- **σύμπτωμα(έμβολο, θόρυβος).**
- **μέρος(έμβολο, μηχανή).**
- **εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί).**
- **¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z).**
- **¬βλάβη(X)∨¬σύμπτωμα(R, θόρυβος)∨¬μέρος(R,X)∨ αντικατάσταση(R).**
  - Εισάγεται η άρνηση της πρότασης **αντικατάσταση(έμβολο)** και εφαρμόζεται διαδοχικά ο κανόνας της ανάλυσης.
  - Για την συγκεκριμένη απόδειξη απαιτείται μόνο ένα υποσύνολο των προτάσεων.

Απόδειξη βασισμένη στην Αρχή της Ανάλυσης στην Κατηγορηματική Λογική

¬ αντικατάσταση(έμβολο)

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z)

ϑ={Z/έμβολο}

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(έμβολο,W,δεν_λειτουργεί)

εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

ϑ'={W/μηχανή}

βλάβη(μηχανή)

¬βλάβη(μηχανή)

□ (κενή πρόταση)

Μορφή Kowalski

- Αποτελεί εναλλακτικό τρόπο εμφάνισης της προτασιακής (clausal) μορφής της λογικής.
- Όλες οι προτάσεις εκφράζονται σαν λογικές ισοδυναμίες της μορφής

$$\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m}$$

- Οι ατομικοί τύποι $\mathbf{r_i}$ είναι σε **διάζευξη**, ενώ οι $\mathbf{q_j}$ σε σύζευξη.
- Τα $\mathbf{r_i}$ αποτελούν τα ***συμπεράσματα*** της πρότασης, ενώ τα $\mathbf{q_j}$ τις ***υποθέσεις*** της.
- Τόσο τα συμπεράσματα όσο και οι υποθέσεις **δεν περιέχουν αρνήσεις** ατομικών τύπων.

Διαδικασία Μετατροπής Πρότασης σε Μορφή Kowalski

$$\mathbf{p \lor \neg q \lor r \lor \neg s \lor t}$$

- Συγκέντρωση όλων των ατομικών τύπων σε άρνηση στο αριστερό μέρος της πρότασης.

$$\mathbf{\neg q \lor \neg s \lor p \lor r \lor t}$$

- Εφαρμογή νόμου DeMorgan $\mathbf{\neg p \lor \neg q \Leftrightarrow \neg(p \land q)}$

$$\mathbf{\neg(q \land s) \lor p \lor r \lor t}$$

- Εφαρμογή ισοδυναμίας $\mathbf{(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \lor q}$.

$$\mathbf{q \land s \rightarrow p \lor r \lor t}$$

- Αντικατάσταση συμβόλων σύζευξης/διάζευξης με κόμμα ","

$$\mathbf{q, s \rightarrow p, r, t}$$

Παράδειγμα Μορφής Kowalski

¬βλάβη(X)∨ σύμπτωμα(X, θόρυβος) ∨ ένταση(θόρυβος, μεγάλη).

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z).

- Μορφή Kowalski:

βλάβη(X) → σύμπτωμα(X, θόρυβος), ένταση(θόρυβος, μεγάλη).

βλάβη(W), εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) → αντικατάσταση(Z).

- Το πλεονέκτημα της μορφής Kowalski είναι ότι οι προτάσεις εκφράζονται σε μια περισσότερο αναγνώσιμη μορφή.

Περιπτώσεις Προτάσεων Kowalski
Κανόνας

$\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m}$

$\mathbf{q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n \rightarrow r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m}$

- Αν m > 0 και n > 0, τότε η πρόταση ερμηνεύεται σαν

ισχύει *r_1* ή *r_2*…ή *r_m* εάν *q_1* και *q_2* …και *q_n*

- Μια ειδική περίπτωση προτάσεων με μεγάλη πρακτική σημασία (π.χ. στο λογικό προγραμματισμό - Prolog), είναι οι *προτάσεις Horn* (*Horn clauses*).
  - Επιτρέπεται **μόνο ένας ατομικός τύπος στο συμπέρασμα**, είναι δηλαδή της μορφής:

$\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r}$ ***Κανόνας***

Προτάσεις Horn vs. Γενικές Προτάσεις Kowalski (1/2)

- Γιατί οι προτάσεις Horn έχουν μεγάλη πρακτική σημασία, και όχι η γενική μορφή προτάσεων Kowalski?
  - Γιατί για τις προτάσεις Horn ο modus ponens είναι ορθός και πλήρης.

hasChild(X,Y) $\rightarrow$ father(X,Y), mother(X,Y)

hasChild(nick,anna)

- Τι συμπέρασμα βγαίνει?

father(nick,anna) $\vee$ mother(nick,anna)

  - Υπάρχει αμφιβολία για το αν είναι πατέρας ή μητέρα ο nick.

Προτάσεις Horn vs. Γενικές Προτάσεις Kowalski (2/2)

hasChild(X,Y) → parent(X,Y)

hasChild(nick,anna)

- Τι συμπέρασμα βγαίνει?

parent(nick,anna)

- – Είναι ένα και μοναδικό συμπέρασμα που εξάγεται αναμφίβολα.
    - Ακόμα υπάρχει αμφιβολία για το αν ο **nick** είναι πατέρας ή μητέρα, αλλά εδώ ενδιέφερε μόνο το συμπέρασμα **parent.**

Περιπτώσεις Προτάσεων Kowalski
Γεγονότα

$q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$

- Αν n=0, τότε αναπαριστάται μια πρόταση χωρίς υπόθεση, δηλαδή **κάποιο** από τα r_i ισχύει.

$\rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$ ***Γεγονότα***

$r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m$

- Ισχύει η ίδια παρατήρηση με τις προτάσεις Horn
  - Αν m>1 τότε υπάρχει αμφιβολία για το ποιο ακριβώς $\mathbf{r_i}$ ισχύει.
  - Για m=1 έχουμε «γεγονότα Horn» (μη-δόκιμος όρος)

$\rightarrow r_1$ ***Γεγονός***

Περιπτώσεις Προτάσεων Kowalski
Κενή Πρόταση

$q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$

- Αν m=0 και n=0, τότε αναπαριστάται μια πρόταση χωρίς συμπέρασμα και υποθέσεις που δηλώνει πρόταση πάντα αναληθή και συμβολίζεται με την κενή πρόταση □.

Περιπτώσεις Προτάσεων Kowalski
Στόχος, Ερώτηση (1/2)

$q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$

- Αν m=0, τότε οι υποθέσεις καταλήγουν σε αναληθή συμπέρασμα, που ουσιαστικά ισοδυναμεί με άρνηση της σύζευξης, δηλαδή ερμηνεύεται σαν "Δεν ισχύει q_1 και q_2 και …q_n":

$q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow$ *Στόχος, Ερώτηση*

$\neg(q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n)$

- Γιατί ονομάζεται έτσι?

Περιπτώσεις Προτάσεων Kowalski
Στόχος, Ερώτηση (2/2)

hasChild(X,Y) $\rightarrow$ parent(X,Y)

$\rightarrow$ hasChild(nick,anna) **parent(nick,anna) $\rightarrow$**

- Τι συμπέρασμα βγαίνει?
  - Οι προτάσεις γίνονται σε προτασιακή μορφή:

$\neg$hasChild(X,Y) $\vee$ parent(X,Y)

hasChild(nick,anna) **$\neg$parent(nick,anna)**

- Με εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης παίρνουμε την κενή πρόταση □ (άτοπο)
  - Άρα η προσπάθεια απόδειξης του **parent(nick,anna) $\rightarrow$** οδήγησε σε άτοπο, άρα ισχύει το **parent(nick,anna).**

Αρχή της Ανάλυσης και Μορφή Kowalski

- Μια εναλλακτική διατύπωση του κανόνα της ανάλυσης αφορά την μορφή Kowalski.
  - ϑ ο ενοποιητής των q και q'.

$$\frac{\begin{array}{c} p_1, p_2, \ldots, p_m \rightarrow q \\ q', z_1, z_2, \ldots, z_n \rightarrow s \end{array}}{\theta(p_1, p_2, \ldots, p_m, z_1, z_2, \ldots, z_n \rightarrow s)}$$

- Το πλεονέκτημα χρήσης της μορφής Kowalski είναι ότι όλη η διαδικασία είναι περισσότερο κατανοητή.

Παράδειγμα Ανάλυσης στη Μορφή Kowalski

→βλάβη(μηχανή).

→εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί).

→σύμπτωμα(έμβολο, θόρυβος).

→μέρος(έμβολο, μηχανή).

βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) →
αντικατάσταση(Z).

βλάβη(X),σύμπτωμα(R, θόρυβος),μέρος(R,X) →
αντικατάσταση(R).

- Η άρνηση της προς απόδειξη πρότασης αναπαριστάται στη μορφή Kowalski ως

αντικατάσταση(έμβολο)→

Απόδειξη με προτάσεις στην Μορφή Kowalski

βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) → αντικατάσταση(Z)

αντικατάσταση(έμβολο)→

ϑ={Z/έμβολο}

βλάβη(W),εξάρτημα(έμβολο,W,δεν_λειτουργεί)→

→εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

ϑ'={W/μηχανή}

→βλάβη(μηχανή)

βλάβη(μηχανή)→

□ (κενή πρόταση)

Πλεονεκτήματα Αρχής της Ανάλυσης

- Η αρχή της ανάλυσης αποτέλεσε την βάση για την δημιουργία μιας νέας σχολής γλωσσών προγραμματισμού, το λογικό προγραμματισμό.
  - Ο πλέον διαδεδομένος αντιπρόσωπος αυτής της σχολής είναι η γλώσσα Prolog.
  - Χρησιμοποιεί προτάσεις Horn και για την εξαγωγή συμπερασμάτων χρησιμοποιεί μια παραλλαγή της γραμμικής ανάλυσης, που ονομάζεται SLD - ανάλυση.
  - Ουσιαστικά ξεκινάει πάντα από το πρώτο αριστερά λεκτικό στην ερώτηση και διαλέγει την πρώτη στη σειρά πρόταση Horn που ενοποιείται.

Πλεονεκτήματα της Κατηγορηματικής Λογικής

- Αντιστοιχία με τη φυσική γλώσσα.
- Ικανοποιητική έκφραση ποσοτικοποίησης των εννοιών με τους κατάλληλους ποσοδείκτες.
- Ικανότητα να συλλάβει τη γενικότητα.

Μειονεκτήματα της Κατηγορηματικής Λογικής

- *Αδυναμία έκφρασης ασάφειας*: Κάθε πρόταση μπορεί να είναι μόνο αληθής ή ψευδής.
- *Αθροιστικότητα των αποτελεσμάτων*: Ένα συμπέρασμα προστίθεται στη γνώση χωρίς να δίνεται η δυνατότητα αναθεώρησής του αν αργότερα κριθεί ότι είναι εσφαλμένο.
- Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, η κλασική λογική επεκτείνεται με εντολές ελέγχου και λειτουργικές δομές, που προσφέρουν ευελιξία και ευκολία στην ανάπτυξη εφαρμογών.
  – Χαρακτηριστικό παράδειγμα η γλώσσα Prolog.

Ασκήσεις Μετατροπής και Εξαγωγής Συμπερασμάτων - Ζωικό Βασίλειο (1/4)

Κάθε ζώο το οποίο έχει τρίχωμα ή παράγει γάλα είναι θηλαστικό.	$\forall X$ (**έχει**(X,**τρίχωμα**) $\lor$ **παράγει**(X, **γάλα**)) $\rightarrow$ **είναι**(X, **θηλαστικό**)
Κάθε ζώο που έχει φτερά και γεννάει αυγά είναι πουλί.	$\forall X$ (**έχει**(X, **φτερά**) $\land$ **γεννάει**(X, **αυγά**)) $\rightarrow$ **είναι**(X, **πουλί**)
Κάθε θηλαστικό που τρέφεται με κρέας ή έχει κοφτερά δόντια είναι σαρκοβόρο.	$\forall X$ (**είδος**(X,**θηλαστικό**) $\land$ ((**τρέφεται**(X, **κρέας**) $\lor$ **έχει**(X, **δόντια**(**κοφτερά**)))) $\rightarrow$ **είναι**(X, **σαρκοβόρο**)
Κάθε σαρκοβόρο με χρώμα καφέ-πορτοκαλί που έχει μαύρες ρίγες είναι τίγρης.	$\forall X$ (**είναι**(X,**σαρκοβόρο**) $\land$ **χρώμα**(X,**καφέ-πορτοκαλί**) $\land$ **έχει**(X,**ρίγες**(**μαύρες**)) $\rightarrow$ **είναι**(X, **τίγρης**)
Κάθε σαρκοβόρο με χρώμα καφέ-πορτοκαλί και μαύρες βούλες είναι τσιτάχ.	$\forall X$ (**είναι**(X,**σαρκοβόρο**) $\land$ **χρώμα**(X,**καφέ-πορτοκαλί**) $\land$ **έχει**(X,**βούλες**(**μαύρες**)) $\rightarrow$ **είναι**(X,**τσιτάχ**)
Κάθε πουλί το οποίο δεν πετά και κολυμπά είναι πιγκουΐνος.	$\forall X$ (**είναι**(X,**πουλί**) $\land$ $\neg$**πετά**(X) $\land$ **κολυμπά**(X)) $\rightarrow$ **είναι**(X, **πιγκουΐνος**)

Ασκήσεις Μετατροπής και Εξαγωγής Συμπερασμάτων - Ζωικό Βασίλειο (2/4)

- Μετασχηματίστε τις προτάσεις στην προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής.

(A)

$\forall X$ **(*έχει(X,φτερά)*$\wedge$ *γεννάει(X,αυγά)*) $\rightarrow$ *είναι(X,πουλί)*** $\Leftrightarrow$

$\forall X$ $\neg$**(*έχει(X,φτερά)*$\wedge$ *γεννάει(X,αυγά)*)$\vee$*είναι(X,πουλί)*** $\Leftrightarrow$

$\forall X$ **($\neg$*έχει(X,φτερά)*$\vee$ $\neg$*γεννάει(X,αυγά)*$\vee$*είναι(X, πουλί)*)**

$\neg$***έχει(X, φτερά)*** $\vee$ $\neg$***γεννάει(X, αυγά)*** $\vee$ ***είναι(X, πουλί)***

Ασκήσεις Μετατροπής και Εξαγωγής Συμπερασμάτων - Ζωικό Βασίλειο (3/4)

(Β)

$\forall X$ (*έχει*(X, *τρίχωμα*) $\vee$ *παράγει*(X, *γάλα*))

$\rightarrow$ *είναι*(X, *θηλαστικό*) $\Leftrightarrow$

$\forall X$ $\neg$(*έχει*(X, *τρίχωμα*) $\vee$ *παράγει*(X, *γάλα*))

$\vee$ *είναι*(X, *θηλαστικό*) $\Leftrightarrow$

$\forall X$ ($\neg$*έχει*(X, *τρίχωμα*) $\wedge$ $\neg$*παράγει*(X, *γάλα*))

$\vee$ *είναι*(X, *θηλαστικό*) $\Leftrightarrow$

$\forall X$ ($\neg$*έχει*(X,*τρίχωμα*) $\vee$ *είναι*(X,*θηλαστικό*)) $\wedge$ ($\neg$*παράγει*(X,*γάλα*) $\vee$ *είναι*(X,*θηλαστικό*)) $\Leftrightarrow$

$\neg$*έχει*(X,*τρίχωμα*) $\vee$ *είναι*(X,*θηλαστικό*)

$\neg$*παράγει*(X,*γάλα*) $\vee$ *είναι*(X,*θηλαστικό*)

Ασκήσεις Μετατροπής και Εξαγωγής Συμπερασμάτων - Ζωικό Βασίλειο (4/4)

- Κωδικοποιήστε τη γνώση "*ο αετός έχει φτερά*" και "*ο αετός γεννάει αυγά*" στη λογική.

***έχει*(*αετός*, *φτερά*)** **(1)**

***γεννάει*(*αετός*, *αυγά*)** **(2)**

- Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ανάλυσης και τη βάση γνώσης που δίδεται ότι είναι πουλί.

¬*έχει*(*X*, *φτερά*) ∨ ¬*γεννάει*(*X*, *αυγά*) ∨ *είναι*(*X*, *πουλί*) **(3)**

(1), (3) ├ {*X*/*αετός*}

¬*γεννάει*(*αετός*, *αυγά*) ∨ *είναι*(*αετός*, *πουλί*) **(4)**

(4), (2) ├ *είναι*(*αετός*, *πουλί*)

Αποδείξεις στην Κατηγορηματική Λογική (1/4)

- Αποδείξτε με modus ponens ότι ισχύει η λογική συνεπαγωγή:

$$\forall X\, p(a,X,X),\ \forall X\, \forall Y\, \forall Z\, (\, p(X,Y,Z) \rightarrow p(f(X),Y,f(Z))\,) \vdash p(f(a),a,f(a))$$

$$\Downarrow$$

$$\forall W\, p(a,W,W),\ \forall X\, \forall Y\, \forall Z\, (\, p(X,Y,Z) \rightarrow p(f(X),Y,f(Z)))$$

- Αν $\theta = \{\, X/a,\ Y/W,\ Z/W \,\}$, τότε:

$$\forall W\, p(a,W,W),\ \forall W\, (\, p(a,W,W) \rightarrow p(f(a),W,f(W)))$$

- Με **modus ponens** αποδεικνύεται ότι:

$$\forall W\, p(f(a),W,f(W))$$

- Σύμφωνα με τον κανόνα συμπερασμού: $\forall X\, p(X) \vdash p(a)\ \theta=\{X/a\}$

$$\forall W\, p(f(a),W,f(W)) \vdash p(f(a),a,f(a))\ \theta=\{W/a\}$$

Αποδείξεις στην Κατηγορηματική Λογική (2/4)

Αν υπάρχουν κάποιοι που πληρώνουν φόρους, τότε όλοι οι πολιτικοί πληρώνουν φόρους.

Αν υπάρχουν φιλάνθρωποι, τότε όλοι αυτοί που πληρώνουν φόρους είναι φιλάνθρωποι.

Άρα, αν υπάρχουν φιλάνθρωποι που πληρώνουν φόρους, τότε όλοι οι πολιτικοί είναι φιλάνθρωποι.

$\exists X\ \textit{taxpayer}(X) \rightarrow (\forall Y\ \textit{politician}(Y) \rightarrow \textit{taxpayer}(Y))$ (1)

$\exists X\ \textit{philanthropist}(X) \rightarrow (\forall Y\ \textit{taxpayer}(Y) \rightarrow \textit{philanthropist}(Y))$ (2)

$\exists X\ (\textit{philanthropist}(X) \wedge \textit{taxpayer}(X)) \rightarrow (\forall Y\ \textit{politician}(Y) \rightarrow \textit{philanthropist}(Y))$ (3)

Αποδείξεις στην Κατηγορηματική Λογική (3/4)

$\exists X\ taxpayer(X) \rightarrow (\forall Y\ politician(Y) \rightarrow taxpayer(Y)) \Leftrightarrow$

$\neg\exists X\ taxpayer(X) \vee (\forall Y\ \neg politician(Y) \vee taxpayer(Y)) \Leftrightarrow$

$\forall X\ \neg taxpayer(X) \vee (\forall Y\ \neg politician(Y) \vee taxpayer(Y)) \Leftrightarrow$

$\forall X\ \forall Y\ (\neg taxpayer(X) \vee \neg politician(Y) \vee taxpayer(Y))$ **(1')**

$\exists X\ philanthropist(X) \rightarrow$
$(\forall Y\ taxpayer(Y) \rightarrow philanthropist(Y)) \Leftrightarrow$

$\forall X\ \forall Y\ (\neg philanthropist(X) \vee \neg\ taxpayer(Y) \vee$
$philanthropist(Y)) \Leftrightarrow$

$\forall Z\ \forall W\ (\neg philanthropist(Z) \vee \neg\ taxpayer(W) \vee$
$philanthropist(W))$ **(2')**

Αποδείξεις στην Κατηγορηματική Λογική (4/4)

$\forall X\ \forall Y\ (\neg taxpayer(X) \lor \neg politician(Y) \lor taxpayer(Y))$ **(1')**

$\forall Z\ \forall W\ (\neg philanthropist(Z) \lor \neg taxpayer(W) \lor philanthropist(W))$ **(2')**

(1'), (2') $\vdash$ **{Y/W,Z/X}**

$(\neg taxpayer(X) \lor \neg politician(W) \lor \neg philanthropist(X) \lor philanthropist(W)) \Leftrightarrow$

$\neg(philanthropist(X) \land taxpayer(X)) \lor (\neg politician(W) \lor philanthropist(W)) \Leftrightarrow$

$(philanthropist(X) \land taxpayer(X)) \rightarrow (politician(W) \rightarrow philanthropist(W))$

Σημείωμα Αναφοράς

«Υπολογιστική Λογική και Λογικός Προγραμματισμός. Λογική: Κατηγορηματική Λογική, Σχέση Λογικής και Λογικού Προγραμματισμού». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS163/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουήλ Ρήγας

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

BY NC SA

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.