ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και την Πρώτη Σχολική Ηλικία

Ενότητα 2: Μαθηματική Επιστήμη

Διδάσκουσα: Μαριάννα Τζεκάκη
Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής & Εκπαίδευσης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια ΤΕΠΑΕ, Α.Π.Θ.

Μαθηματική Επιστήμη

Περιεχόμενα ενότητας (1)

1. Τι είναι τα Μαθηματικά;
2. Μαθηματική Επιστήμη: Αντικείμενα μελέτης.
3. Σελίδα μαθηματικού βιβλίου.
4. Αντικείμενα μελέτης.
5. Τρεις κόσμοι του Popper.
6. Πως δημιουργήθηκαν;
7. Πορεία αφαίρεσης αντικειμένων.
8. Μαθηματική Επιστήμη: Ιστορική εξέλιξη.
9. Κατασκευάζονται ή ανακαλύπτονται;
10. Δημιουργία νέων αντικειμένων.
11. Μαθηματικά στην Τέχνη.

Περιεχόμενα ενότητας (2)

12. Πώς οδηγούμαστε στη μαθηματικοποίηση;
13. Στοιχεία μαθηματικοποίησης;
14. Αφαίρεση – Γενίκευση.
15. Συμβολισμός.
16. Συμβολικές αναπαραστάσεις.
17. Μαθηματικά Σύμβολα.
18. Μαθηματικά μοντέλα.
19. Σημειωτική δραστηριότητα.
20. Πως ελέγχουμε την αλήθεια;
21. Μαθηματικές διαδικασίες.
22. Αξιώματα.
23. Μαθηματική Λογική.

Περιεχόμενα ενότητας (3)

24. Μαθηματικές αποδεικτικές μέθοδοι.
    I. Παραγωγική διαδικασία.
    II. Απαγωγή σε άτοπο.
    III. Επαγωγική διαδικασία.
    IV. Επαγωγική απόδειξη.
25. Μαθηματική Επαγωγή.
26. Αλγόριθμοι.
27. Συλλογιστική Ικανότητα.
28. Ανάπτυξη συλλογισμού.
29. Διδασκαλία των Μαθηματικών.
30. Ερωτήσεις στην 2η ενότητα.
31. Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία.

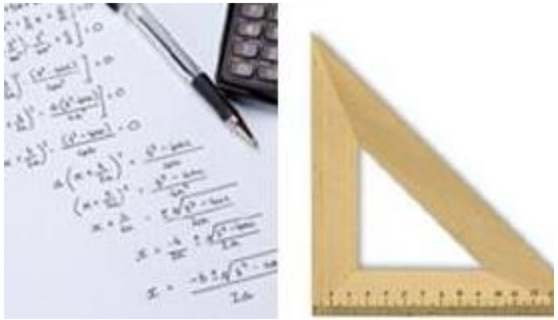
Σκοποί ενότητας

- Να γίνουν σαφή:
  1. Τι μελετούν τα Μαθηματικά (αντικείμενα);
  2. Ποιά μέσα χρησιμοποιούν (σύμβολα);
  3. Ποιες μεθόδους απόδειξης χρησιμοποιούν;

Τι είναι τα Μαθηματικά;

Τι είναι τα Μαθηματικά; (1)

- Ένα τυπικό σύστημα με αριθμούς, σχήματα, σύμβολα και πράξεις;



Εικόνα 1. Μαθηματικά αντικείμενα.

- *Ή ένα δυναμικός επιστημονικός κλάδος:*
  - Με τι ασχολείται;
  - Τι στοχεύει να πετύχει;
  - Ποια είναι τα αντικείμενα μελέτης του;
  - Ποιες είναι οι μέθοδοι που χρησιμοποιεί;

Τι είναι τα Μαθηματικά; (2)

- Η μαθηματική αναζήτηση είναι μια νοητική δραστηριότητα που ξεκίνησε και συνεχίζεται για χιλιάδες χρόνια.
- Έχει εφαρμογές στους περισσότερους επιστημονικούς κλάδους (θετικούς και θεωρητικούς) όπως στη γλωσσολογία, στη ψυχολογία, στην κοινωνιολογία κλπ.
- Αποτελεί κυρίαρχο μέσο διάκρισης και διαλογής.
- *Γιατί τόσο σημαντικά, από πού αντλούν επιρροή και δύναμη, γιατί τόσο μεγάλο εύρος εφαρμογών, γιατί εμφανίστηκαν τόσο παλιά και εξελίσσονται συνέχεια;*

Μαθηματική Επιστήμη: Αντικείμενα μελέτης

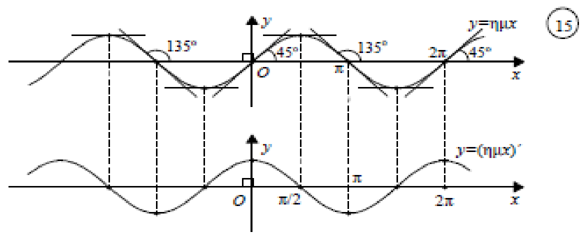
Με τι ασχολείται η μαθηματική επιστήμη, ποια τα αντικείμενα μελέτης;

- Τα Μαθηματικά *ασχολούνται* με τον πραγματικό κόσμο και τα *πραγματικά προβλήματα* ή με κατασκευασμένα αντικείμενα έξω από αυτόν;

- Ποια είναι η σχέση των *μαθηματικών αντικειμένων* με τον πραγματικό κόσμο;

Σελίδα μαθηματικού βιβλίου

30



Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\text{ημ}x)' = \text{συν}x\,.$$

Επίσης για τη συνάρτηση $g(x)=\text{συν}x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x\,.$$

- **Η παράγωγος του e^x και του $\ln x$**

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι

$$(e^x)' = e^x \quad \text{και} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Κανόνες Παραγώγισης

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x) = cf(x+h)-cf(x) = c(f(x+h)-f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x)\,.$$

Άρα $\quad (c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)\,.$

Εικόνα 2. Μαθηματικά σύμβολα. Από «*Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ’ Γενικού Λυκείου*», σ. 30. [1]

Αντικείμενα μελέτης (1)

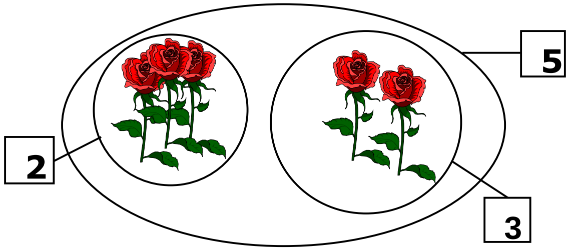
- *Πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα* ως μέρος της καθημερινής ανθρώπινης δραστηριότητας: *αριθμητικές πράξεις, υπολογισμοί, μετρήσεις κλπ.*
- *Μαθηματικά αντικείμενα* όπως για παράδειγμα τα x^2, τα $f(x)$, τα dx, τα $\int f(x)\,dx$, κλπ. που η ίδια η μαθηματική επιστήμη έχει δημιουργήσει.
- Μετά από τόσους αιώνες "ύπαρξης", τα ιδεατά αυτά αντικείμενα κατέληξαν να "υπάρχουν" μέσα σε αυτό που θα ονομάζαμε καθημερινή πραγματικότητα; πχ. ο αριθμός 158.783, το x^2, η εξίσωση δευτέρου βαθμού, η γραμμική συνάρτηση ή ένα τρίγωνο.

Τρεις κόσμοι του Popper

- Ο **Κόσμος 1** περιλαμβάνει τα φυσικά πράγματα, την ύλη, τη μάζα, την ενέργεια, δηλαδή τα "αντικείμενα" του φυσικού κόσμου.
- Ο **Κόσμος 2** περιλαμβάνει τα πνευματικά πράγματα που υπάρχουν μέσα από την ύπαρξη των φυσικών πραγμάτων όπως είναι οι σκέψεις, η συνείδηση, τα συναισθήματα κλπ.
- Στον **Κόσμο 3** υπάρχουν πνευματικά δημιουργήματα που προέρχονται από τους Κόσμους 1 και 2 αλλά διατηρούνται έξω από αυτούς, όπως είναι η γλώσσα, ο πολιτισμός και οι παραδόσεις, η κοινωνική συνείδηση, οι θεωρίες, οι θεσμοί κι επίσης τα Μαθηματικά.

Αντικείμενα μελέτης (2)

- Τα αντικείμενα των μαθηματικών είναι κατασκευές που εξελίχθηκαν στο βάθος των αιώνων.
- Μια μαθηματική κατασκευή αποτελεί τμήμα του λογικού συστήματος και μπορεί να έχει εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο.
- Το μαθηματικό αντικείμενο είναι η κατασκευή και όχι η εφαρμογή.
- Παράδειγμα το άθροισμα 2+3:
  - Η σχέση **2 + 3 = 5** ισχύει ανεξάρτητη από τα συγκεκριμένα αντικείμενα, είναι μια σχέση ανάμεσα στους αριθμούς.
  - Το ζεύγος των φυσικών αριθμών (2,3) συνδέεται με μοναδικό τρόπο με τον αριθμό 5.



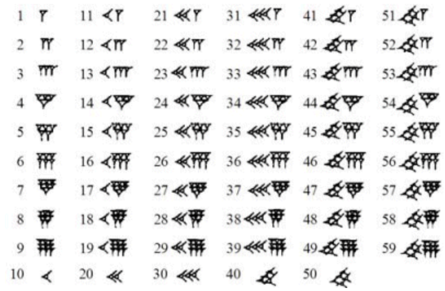
Εικόνα 3. Αριθμητική σχέση.

Πως δημιουργήθηκαν;

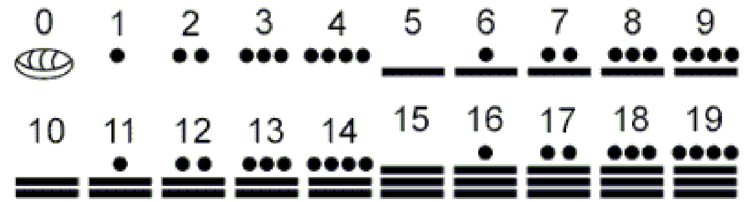
- Ξεκινώντας από πραγματικά προβλήματα, οδηγήθηκαν σε λύσεις και γενικεύσεις.
  – Παράδειγμα: για να μετρήσουν ποσότητες δημιουργούν αριθμούς και μονάδες, για να αντιμετωπίσουν χωρικές καταστάσεις δημιουργούν σχήματα και σχέσεις, για μελετήσουν σχέσεις δημιουργούν συναρτήσεις και τις μελετούν και για να λύσουν φυσικά προβλήματα ή προβλήματα επιφανειών δημιουργούν παραγώγους και ολοκληρώματα.
- *Η δημιουργία αυτή ακολουθεί μια αργή και μακροχρόνια πορεία.*
  – http://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_mathematics.
  – http://www.counton.org/timeline/.

Πορεία αφαίρεσης αντικειμένων (1)

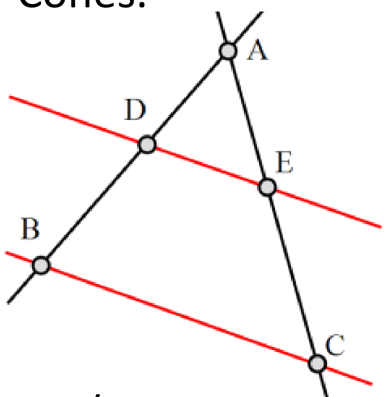
Εικόνα 4.
Sumerian Clay
Cones.



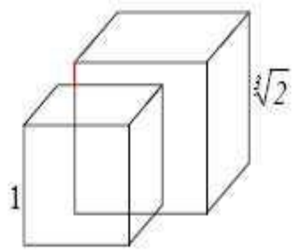
Εικόνα 5.
Βαβυλωνιακό
σύστημα αρίθμησης.



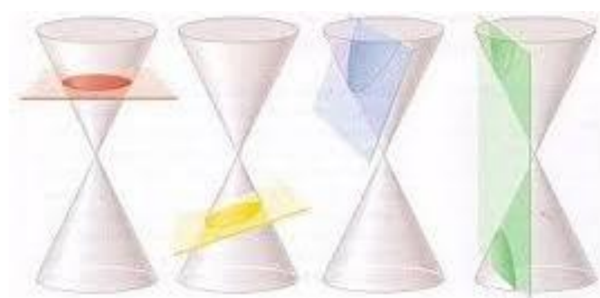
Εικόνα 6. Σύστημα αρίθμησης
των Mayas.



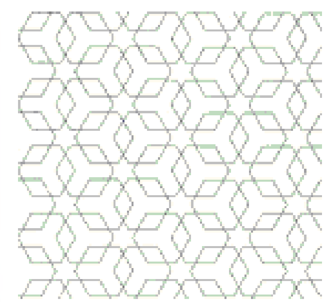
Εικόνα 7.
Θεώρημα Θαλή.



Εικόνα 8.
Διπλασιασμός κύβου -
Δήλιον πρόβλημα.



Εικόνα 9. Απολλώνιες
Τομές



Εικόνα 10.
Arabic Patterns.

Πορεία αφαίρεσης αντικειμένων (2)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Εικόνα 11. Το τρίγωνο του Pascal.

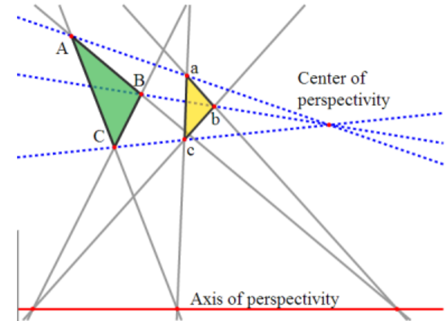
$5 = 1^2 + 2^2$ $\quad$ $269 = 10^2 + 13^2$

$29 = 2^2 + 5^2$ $\quad$ $79{,}601 = 200^2 + 199^2$

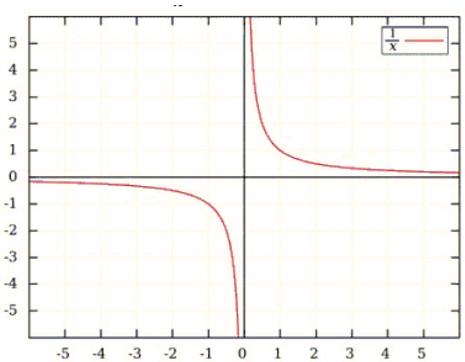
$41 = 4^2 + 5^2$ $\quad$ $2{,}369{,}929 = 1{,}100^2 + 1{,}077^2$

$89 = 5^2 + 8^2$ $\quad$ $201{,}743{,}929 = 10{,}035^2 + 10{,}052^2$

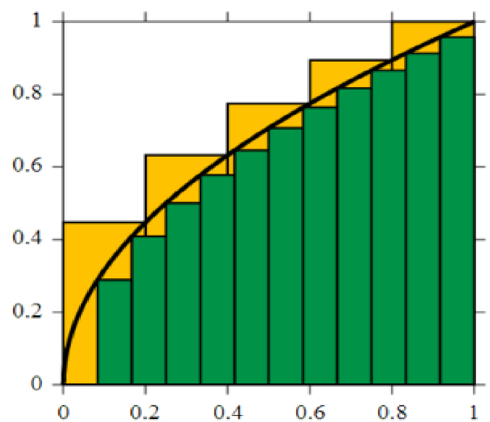
Εικόνα 12. Αριθμητικά σύμβολα.



Εικόνα 13. Θεώρημα του Desargues.



Εικόνα 14. Εξίσωση και γραφική παράσταση υπερβολής.



Εικόνα 15. Προσέγγιση ολοκληρώματος.

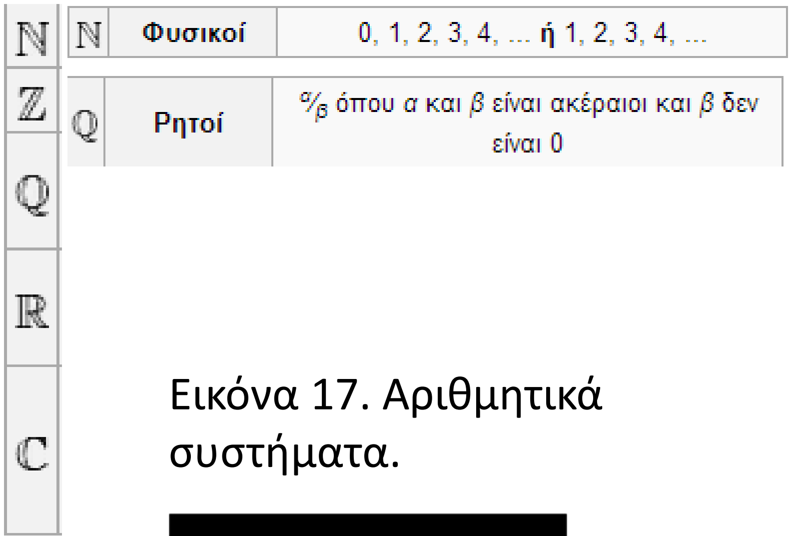
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \frac{d\big(f(x)\big)}{dx} \text{ or } \frac{dy}{dx}$$

$$f' \quad f''$$

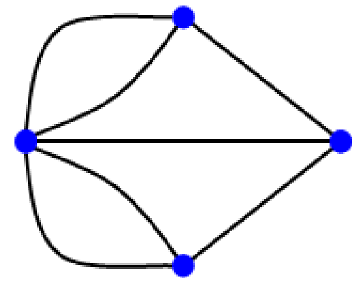
Εικόνα 16. Μαθηματικά σύμβολα

Πορεία αφαίρεσης αντικειμένων (3)

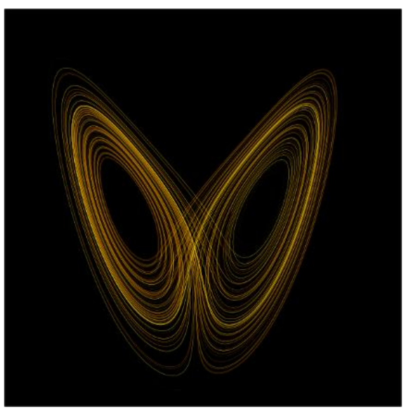


ℕ	ℕ	Φυσικοί	0, 1, 2, 3, 4, ... ή 1, 2, 3, 4, ...
ℤ	ℚ	Ρητοί	$^{\alpha}/_{\beta}$ όπου α και β είναι ακέραιοι και β δεν είναι 0
ℚ			
ℝ			
ℂ			

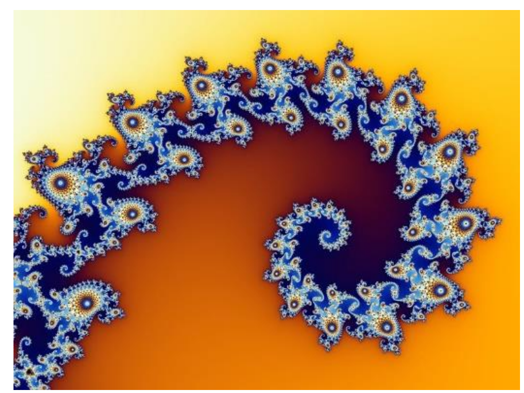
Εικόνα 17. Αριθμητικά συστήματα.



Εικόνα 18. Γράφημα των επτά γεφυρών του Königsberg.



Εικόνα 19. Θεωρία του Χάους.



Εικόνα 20. Φράκταλ.

Μαθηματική Επιστήμη: Ιστορική εξέλιξη

Σύγχρονα

Προ- ελληνικά | Ελληνικά | Ινδο-αραβικά | Δυτικά

600 | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000

Αριθμοί
Γεωμετρία
Αξιωματική Θεμελίωση
Θεμελίωση σύγχρονων εννοιών
Θαλής – Πυθαγόρας- Πλάτωνας- Ευκλείδης- Απολλώνιος - Διόφαντος

Άλγεβρα
Μελέτη Αριθμών
Αριθμητικά Συστήματα
Αλ-Χουαρίσμι
Pascal
Fibonnaci

Άλγεβρα
Ανάλυση
Άλλες Γεωμετρίες
Τριγωνομετρία
Αν. Γεωμετρία
Γαλιλλαίος
Κέπλερ
Gaulois
Newton
Laplace
Fourrier
…….

- Ξεκινούν με 2-3 θεματικές: αριθμητική – γεωμετρία – άλγεβρα.
- Επεκτείνονται 30 θεματικές και περί τους 100 κλάδους.

Εικόνα 21. Ιστορική εξέλιξη.

Κατασκευάζονται ή ανακαλύπτονται; (1)

- Η **πλατωνική άποψη** υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν έξω από τον άνθρωπο που τα ανακαλύπτει σιγά-σιγά.
- Πολλοί μαθηματικοί κανόνες και ιδιότητες στη φύση: ομόκεντροι κύκλοι στα δέντρα, κανονικά σχήματα σε πετρώματα, φύλλα στο κοτσάνι ενός φυτού που ακολουθούν τη διαδοχή των όρων μιας ακολουθίας Fibonacci, χρυσές αναλογίες.

Εικόνα 22. Πεταλούδα.

Εικόνα 23. Ηλιόσπορος.

Εικόνα 24. Ναυτίλος - λογαριθμική σπείρα.

Κατασκευάζονται ή ανακαλύπτονται; (2)

Εικόνα 25. Ιστός αράχνης.

Εικόνα 26. Μέλισσες.

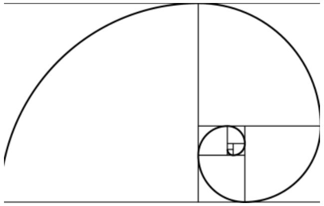
Εικόνα 27. Ψάρι.

Κατασκευάζονται ή ανακαλύπτονται; (3)

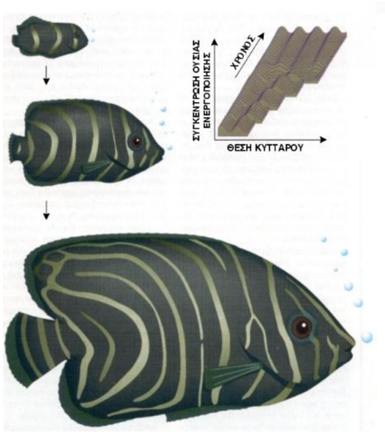
- **Σχηματισμός μαθηματικών μοντέλων**: Τα μαθηματικά προσπαθούν να δημιουργήσουν ένα μαθηματικό αντίγραφό του πραγματικού κόσμου, κυρίως για την κατανόηση και την χρήση του.
- Εξελίσσονται διαρκώς.

Εικόνα 28. Χρυσές αναλογίες- Παρθενώνας.

Εικόνα 29. Ναυτίλος.



Εικόνα 30. Ναυτίλος.

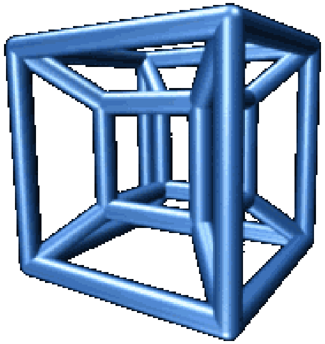


Εικόνα 31. Προσομοίωση αγγελόψαρου.

Δημιουργία νέων αντικειμένων (1)

- Τα Μαθηματικά δημιουργήθηκαν αρχικά
  - για την επίλυση των προβλημάτων,
  - την κατανόηση του κόσμου και προσαρμογή στις ανάγκες του,
  - για την οικονομία του χρόνου (για αυτό γενικές λύσεις).
- Συχνά δημιουργούνται και **νέα αντικείμενα**, έξω από την αντίληψη και την εποπτεία.
- Παράδειγμα ο Υπερκύβος,

  ένα σώμα 4 διαστάσεων.



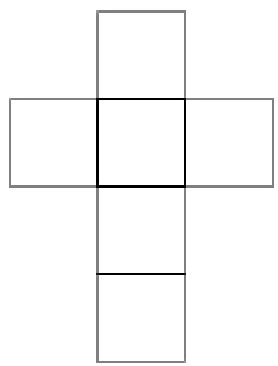
Εικόνα 32. Υπερκύβος.

26

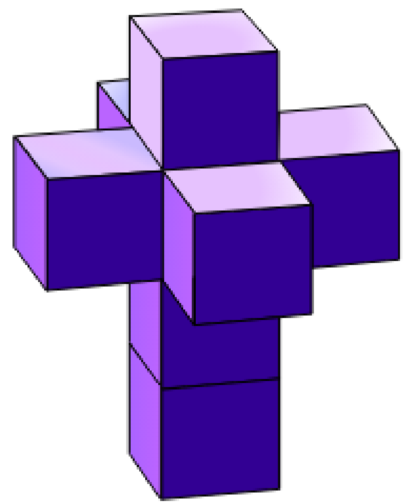
Δημιουργία νέων αντικειμένων (2)

- Το ανθρώπινο μυαλό δουλεύει αναλογικά:

Εικόνα 33. Κύβος.



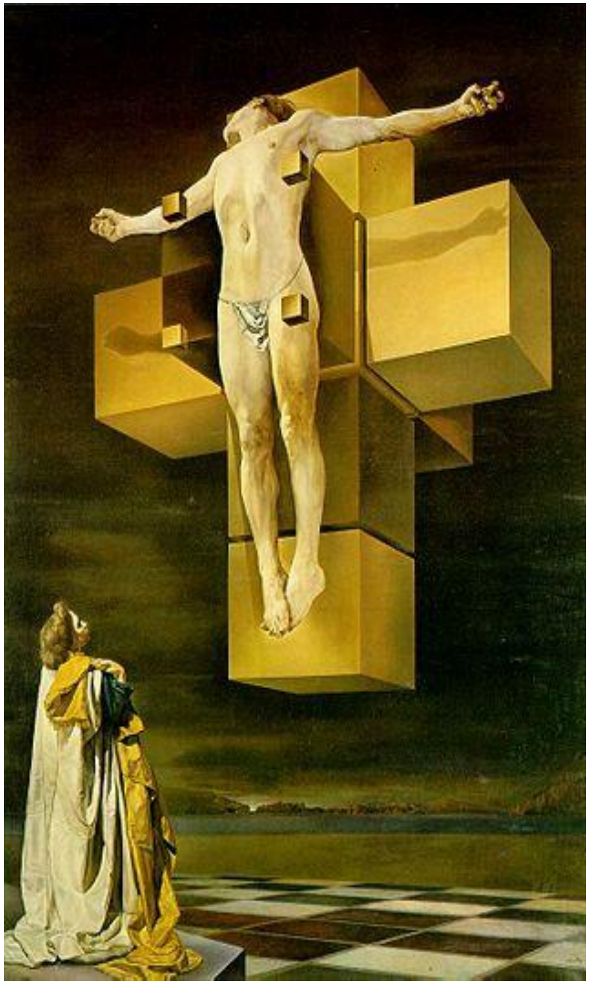
Εικόνα 34. Ανάπτυγμα κύβου.



Εικόνα 35. Ανάπτυγμα υπερκύβου.

Μαθηματικά στην Τέχνη

Εικόνα 36. Μητροπολιτικό
Μουσείο
Νέας Υόρκης.



Εικόνα 37. Corpus
Hypercubus S. Dali.

Πώς οδηγούμαστε στη μαθηματικοποίηση;

- Η ανάπτυξη γνώσης για την πραγματικότητα που μας περιβάλλει πραγματοποιείται με την ανάπτυξη συστημάτων εννοιών για τα αντικείμενα και τα φαινόμενα.
- Η μελέτη αντικειμένων και των φαινομένων περνάει:
  - από ένα πρώτο *ποιοτικό* - *περιγραφικό* στάδιο,
  - ένα δεύτερο *ποσοτικό* - σχεσιακό,
  - σε ένα στάδιο δημιουργίας νοερών εικόνων-σχημάτων, αναπαραστάσεων που αντανακλούν τις ουσιαστικές ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων ή φαινομένων.

Στοιχεία μαθηματικοποίησης;

- Δύο είναι τα βασικά στοιχεία της μαθηματικοποίησης:
  - Η διαδικασία *Γενίκευσης* και *Αφαίρεσης.*
  - Η διαδικασία *Αναπαράστασης* και *Συμβολισμού.*

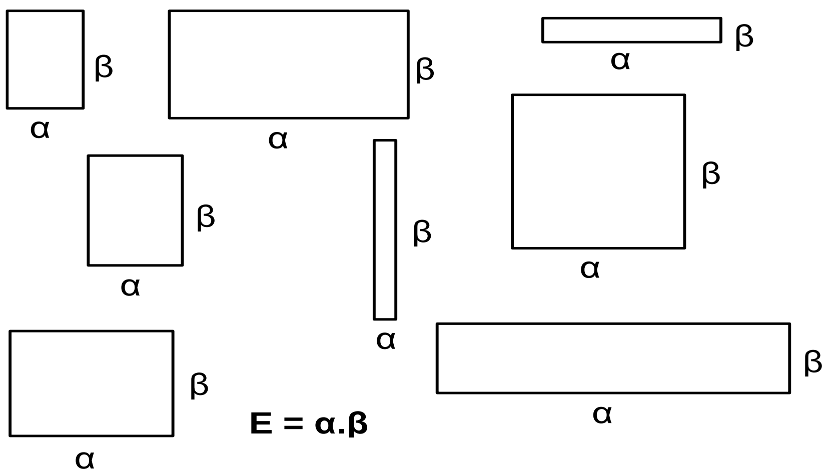
Αφαίρεση – Γενίκευση (1)

- Η αφαίρεση είναι μια διαδικασία με βάση την οποία:
  - ξεχωρίζουμε από ένα αντικείμενο, μια κατάσταση ή ένα φαινόμενο μια ομάδα χαρακτηριστικών, ή
  - από μία κατάσταση μπορούμε να αφαιρέσουμε τα ειδικά χαρακτηριστικά που την περιγράφουν.
- Τα χαρακτηριστικά αυτά τα αποδίδουμε: *εκφράζουμε, ονομάζουμε, αναπαριστούμε, συμβολίζουμε.*

Αφαίρεση – Γενίκευση (2)

Παράδειγμα:

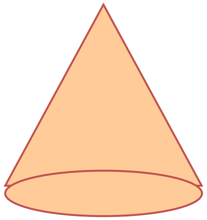
- Από ένα αντικείμενο – σχήμα (αφαίρεση).
- Από μια σχέση ένα κανόνα (γενίκευση).



$E = \alpha.\beta$

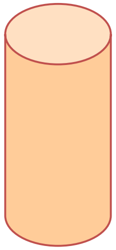
Εικόνα 38. Ορθογώνια.

Εικόνα 39. Βουνό.



Εικόνα 40. Κώνος.

Εικόνα 41. Δένδρο.



Εικόνα 42. Κύλινδρος.

Εικόνα 44. Ευθεία γραμμή.

Εικόνα 43. Πτώση νερού.

Συμβολισμός (1)

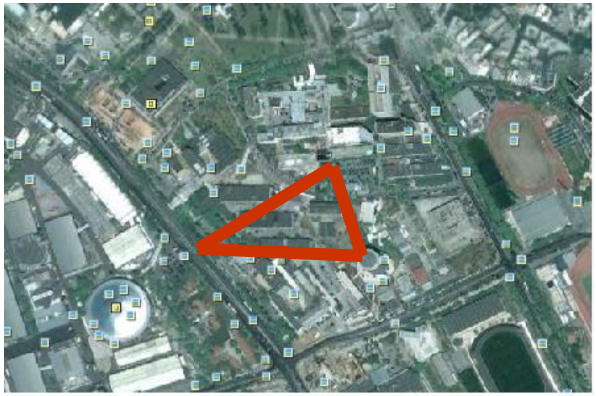
- Συμβολισμός είναι μια διαδικασία που συνίσταται στην απόδοση ενός μέρους της πραγματικότητας με ένα ή με πολλά μέσα.
- Μέσα: *σχήματα, διαγράμματα, σήματα, γραφικές αναπαραστάσεις, σύμβολα*.

  Παράδειγμα για πρόβλημα:

  Ο πατέρας του Νίκου έχει τα πενταπλάσια χρόνια από τον Νίκο, αν η διαφορά των ηλικιών τους είναι 24 χρόνια, πόσο χρονών είναι ο Νίκος και πόσο ο πατέρας του;

  – Αποδίδεται από την εξίσωση 5x – x = 24, όπου x η ηλικία του Νίκου (x=6).

Συμβολισμός (2)



Εικόνα 45. Υπολογισμός απόστασης.

- Αντιμετωπίζουμε μια χωρική ή μια άλλη κατάσταση.

  Ένας παρουσιαστής λέει σε κάποιον στο ακροατήριο:

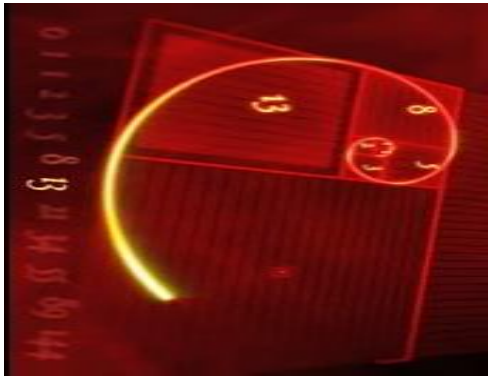
  - Βάλε στο νου σου ένα αριθμό αλλά μην τον πεις!
    Πρόσθεσε 15 και πολλαπλασίασε επί 3
    Αφαίρεσε 9 και διαίρεσε δια 3, αφαίρεσε 8
    Αριθμός βρήκες;
  - 32 απαντάει ο ακροατής και ο παρουσιαστής του λέει τον αριθμό.

34

Συμβολισμός (3)

- Αντιστοίχιση πραγματικού - συμβολικού αντικειμένου.
- *Τα σύμβολα αποτελούν το σημασιολογικό στήριγμα για την απελευθέρωση της νόησης*.
- Αποτελούν ένα εργαλείο προσομοίωσης της πραγματικότητας όπως επίσης ένα μέσο επεξεργασίας, μελέτης πρόβλεψης και επικοινωνίας.

Συμβολισμός (4)



Εικόνα 46. **Αναπαράσταση ακολουθίας Fibonacci.**

Εικόνες, σύμβολα, ιδιότητες σχέσεις

Πράξεις της σκέψης

Αποτελέσματα-πρόβλεψη

Εικόνα 47. **Πραγματικότητα ακολουθίας Fibonacci.**

Αντικείμενα διαφορετικές προσεγγίσεις

Μετασχηματισμοί δράσεις

Αποτελέσματα-αλλαγές στα αντικείμενα

Συμβολισμός (5)

- Απαραίτητη προϋπόθεση: η κατάλληλη αντιστοιχία ανάμεσα στην πραγματικότητα και την παράσταση, και η απόδοση σχεσιακών δομών της πραγματικότητας.
- Το αντικείμενο ή η κατάσταση που αναπαρίσταται ονομάζεται σημαινόμενο.
- Το συμβολικό μέσο με το οποίο αποδίδεται ονομάζεται σημαίνον.
- Η αντιστοιχία ανάμεσα σε ένα σημαινόμενο και ένα σημαίνον πραγματοποιείται στο *πλαίσιο* μιας συγκεκριμένης κατάστασης.

Συμβολισμός (6)

- Κάθε σημαίνον αποδίδει ένα και μόνο σημαινόμενο, ενώ αντίστροφα,
- Το ίδιο σημαινόμενο μπορεί να αποδοθεί από δύο ή περισσότερα σημαίνοντα, τα οποία στην περίπτωση αυτή, εφόσον ανήκουν στο ίδιο *αναπαραστατικό πεδίο*, είναι ίσα.
- Τα διαφορετικά σημαίνοντα προέρχονται από διαφορετικούς αναπαραστατικούς χώρους.

Συμβολικές αναπαραστάσεις (1)

Τρεις (τουλάχιστον) κατηγορίες:

- **Ένδειξη** είναι ένα αναπαραστατικό μέσο που λειτουργεί μόνο μέσα σε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο. Η ένδειξη συνδέεται άμεσα με το αντικείμενο ή την κατάσταση που αναπαριστά.
  - Παράδειγμα: *κίτρινο χρώμα στο ταξί, τα ηχητικά σήματα, τα χρώματα, ο καπνός που υποδηλώνει φωτιά, τα αχνάρια που υποδηλώνουν ότι πέρασε κάποιο ζώο κλπ.*

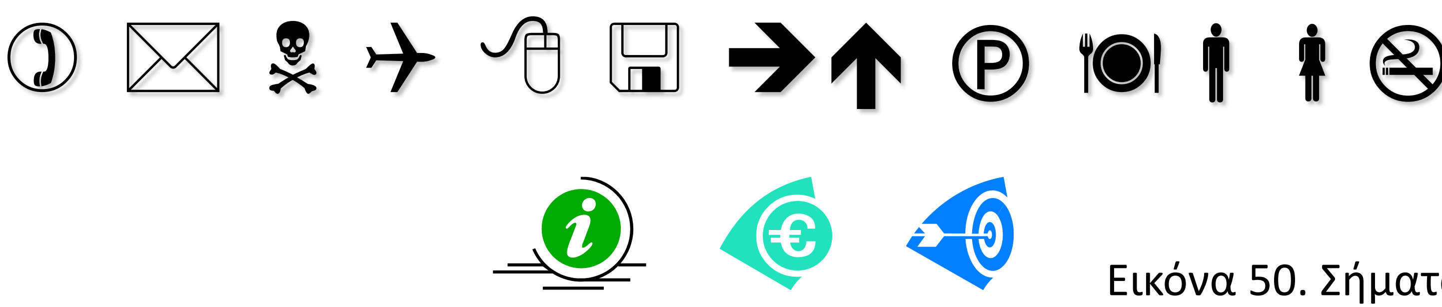
Εικόνα 48. Ταξί.

Εικόνα 49. Αχνάρια ζώου.

Συμβολικές αναπαραστάσεις (2)

Τρεις (τουλάχιστον) κατηγορίες:

- **Εικόνα - σήμα** είναι ένα αναπαραστατικό μέσο που παραπέμπει στο αντικείμενο που αναπαριστά, ακόμη και όταν αυτό λείπει.
  - Παράδειγμα: *μια γραμμή με κιμωλία παριστά μια γεωμετρική ευθεία, τα σήματα της τροχαίας, τα μετεωρολογικά σήματα, τα σήματα του αθλητισμού, τα απαγορευτικά σήματα κλπ.*



Εικόνα 50. Σήματα.

Συμβολικές αναπαραστάσεις (3)

Τρεις (τουλάχιστον) κατηγορίες:

- Το **σύμβολο** είναι ένα αναπαραστατικό μέσο που αποδίδει μια σημασία κατόπιν συμφωνίας.
  - Παράδειγμα: *οι λέξεις, οι αριθμοί ή άλλα μαθηματικά σύμβολα, σύμβολα από άλλες επιστήμες, νότες.*

Δένδρο, tree 3, 20, +, + CO_2, H_2O ☯ ♬

Εικόνα 51. Σύμβολα.

Μαθηματικά Σύμβολα (1)

- Όπως οι αριθμοί, τα σημεία των πράξεων ή τα ειδικά σημάδια που *κατόπιν συμφωνίας* συμβολίζουν έννοιες, πράξεις ή Μαθηματικά αντικείμενα.
- Αν και πιστεύεται ότι τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη συμβόλων, τα σύμβολα αναπτύχθηκαν μετά από πολλούς αιώνες μαθηματικής σκέψης χωρίς σύμβολα, όπως το =, τα + και -.

$\sum$	άθροισμα
$\int$	ολοκλήρωμα
$\forall$	για κάθε
$\cup$ $\cap$	ένωση, τομή
∞	άπειρο

Εικόνα 52. Μαθηματικά σύμβολα.

Μαθηματικά Σύμβολα (2)

- Το + και το - των πράξεων εμφανίζεται τον 15ο αι. από το γαλλικό et και το minus, η ισότητα = τον 16ο αι., επίσης τον ίδιο αιώνα εμφανίζεται το σύμβολο της ρίζας $\sqrt{2}$.
- Τον 16ο επίσης αιώνα εμφανίζονται τα γράμματα για την απόδοση των αγνώστων που μόλις τον 18ο αι. παίρνουν τη μορφή x, x^2, x^3,... Τον 18ο αιώνα εμφανίζονται πιο προχωρημένα σύμβολα όπως το $f(x)$.

http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_mathematical_symbols_by_introduction_date.

Μαθηματικά Σύμβολα (3)

- Μερικά σύμβολα είναι συντομογραφίες ή αρχικά λέξεων όπως το lim που σημαίνει "όριο" από το limit, το + που προκύπτει από τη γαλλική λέξη et που σημαίνει "και" ή το π είναι το αρχικό της λέξης "περιφέρεια".
- Άλλα σύμβολα είναι εικονομορφικά ή ιδεογραφικά όπως $\neq$, το $>$ και $\geq$, ή το $<$ και $\leq$ ή ακόμα το $\Rightarrow$
- Μερικά, τέλος είναι αυθαίρετα όπως το ∇

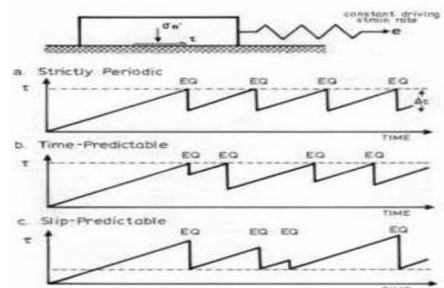
Μαθηματικά μοντέλα (1)

- **Μοντέλο** λοιπόν είναι ένα αναπαραστατικό μέσο με τη βοήθεια του οποίου αποδίδουμε μια όψη της πραγματικότητας, ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης.

- Το μοντέλο ονομάζεται *φυσικό* όταν είναι ένα πραγματικό φυσικό αντικείμενο, που αποτελεί εξιδανίκευση ή απλοποίηση των αντικειμένων που μελετάμε.

- Ένα μοντέλο ονομάζεται *μαθηματικό* όταν περιλαμβάνει Μαθηματικά μέσα, δηλαδή κυρίως μαθηματικές εξισώσεις (για αριθμητικά πρότυπα) ή μαθηματικές δομές.

Εικόνα 53.
Μοκέτα σπιτιού.



Εικόνα 54. Καμπύλη κίνησης ελατηρίου.

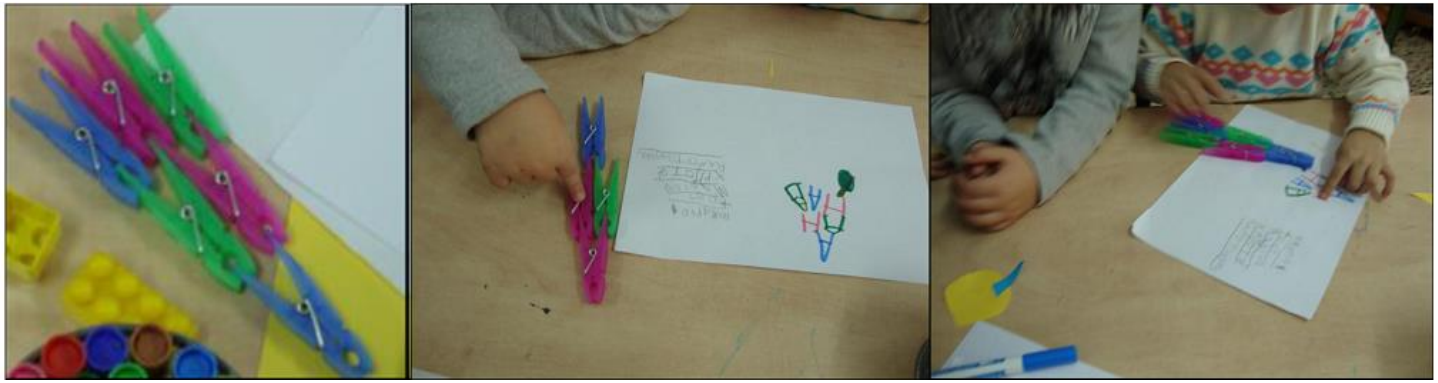
Μαθηματικά μοντέλα (2)

- Το πρότυπο και το μοντέλο του συγκροτούν διαφορετικούς χώρους οι οποίοι εμφανίζουν τα ίδια χαρακτηριστικά, έχουν τις ίδιες σχέσεις και να ακολουθούν τους ίδιους κανόνες.
- Δύο τέτοιοι χώροι ονομάζονται ***ισόμορφοι***.
  - Παράδειγμα: *οι τιμές αλήθειας, το ναι-όχι, το περνά-δεν περνά ηλεκτρικό ρεύμα, το σύνολο {0,1}.*

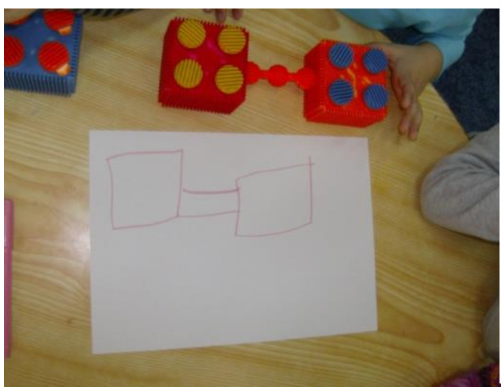
Σημειωτική δραστηριότητα (1)

- Η γενίκευση της εμπειρίας, η τυποποίησή της όπως και η συμβολοποίηση είναι στοιχεία της «μαθηματικοποίησης».
- Η σημειωτική δραστηριότητα δηλαδή η εξοικείωση με τη διαδικασία αυτή και το συμβολισμό, είναι στον *πυρήνα της διδασκαλίας των Μαθηματικών*.
- Γιατί οι μαθηματικές έννοιες είναι ιδεατές οντότητες που προέρχονται από αυτή τη γενίκευση και τυποποίηση της εμπειρίας.

Σημειωτική δραστηριότητα (2)

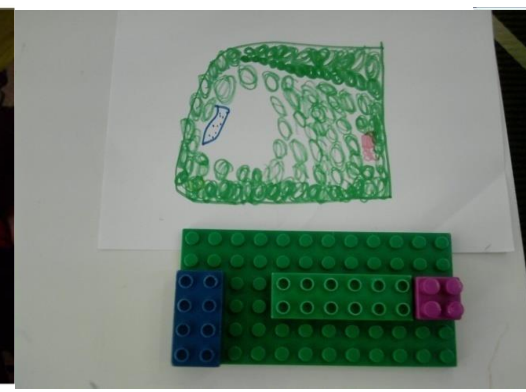


Εικόνα 55. Δράσεις.



Εικόνα 56. Δράσεις.

Εικόνα 57. Δράσεις.



Εικόνα 58. Δράσεις.

Εικόνα 59. Δράσεις

Πως ελέγχουμε την αλήθεια; (1)

- *Μια υπάλληλος, (Υ) αν είναι δυναμική, τότε θα είναι καλή σύμβουλος*.
- Για αυτήν ο προϊστάμενος της δηλώνει ότι είναι δυναμική ή δημιουργική. Δεν είναι δυνατόν να είναι συγχρόνως αποτελεσματική και δημιουργική. Αν όμως δεν είναι αποτελεσματική, τότε είτε είναι δυναμική ή θα γίνει μια καλή σύμβουλος.
  Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτές τις δηλώσεις;

  1) Ή δυναμική ή δημιουργική.

  2) Ή αποτελεσματική ή δημιουργική (όχι και τα δύο).

  3) Αν όχι αποτελεσματική, τότε ή δυναμική ή θα γίνει καλή σύμβουλος.

- Πρώτη υπόθεση (1) είναι δυναμική

  - τότε (Υ) θα γίνει καλή σύμβουλος.

- Δεύτερη υπόθεση (2) δεν είναι δυναμική:

  - τότε (1) είναι δημιουργική. Επίσης (2) δεν είναι αποτελεσματική. Τελικά (3), όχι δυναμική άρα θα γίνει καλή σύμβουλος.

Πως ελέγχουμε την αλήθεια; (2)

- Πέντε σκλάβες δύο με μαύρα μάτια που λένε πάντα αλήθεια και τρεις με γαλανά μάτια που λένε πάντα ψέματα κρυμμένες πίσω από μαντίλες απαντούν στο ερώτημα του βεζίρη «*τι χρώμα είναι τα μάτια σου;*»
  - Από την πρώτη δεν ακούει απάντηση.
  - Ρωτάει τη δεύτερη «τι είπε;» και του λέει για την πρώτη «*γαλανά*».
  - Η τρίτη λέει ότι «*η πρώτη έχει μαύρα και η δεύτερη γαλανά*».
- Με ποια σειρά είναι οι σκλάβες;

Μαθηματικές διαδικασίες (1)

- Θεμελιώδεις μέθοδοι: αξιωματική θεμελίωση και η μαθηματική απόδειξη.

- Τα Μαθηματικά αντικείμενα - **τα στοιχεία** - χωρίζονται σε 2 κατηγορίες:

  – τα ***βασικά στοιχεία*** που απλώς ονοματίζονται και

  – όλα ***τα υπόλοιπα*** στοιχεία που καθορίζονται με σαφείς ορισμούς από τα βασικά ή άλλα που έχουν προηγουμένως ορισθεί.

Μαθηματικές διαδικασίες (2)

- Θεμελιώδεις μέθοδοι: αξιωματική θεμελίωση και η μαθηματική απόδειξη.

- Οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ορίζονται με βάση **μαθηματικές προτάσεις** οι οποίες χωρίζονται επίσης σε δύο κατηγορίες.

  – Τα ***αξιώματα***, δηλαδή προτάσεις που τις "αποδεχόμαστε" ως, αρχικά, αληθείς χωρίς άλλη απόδειξη και τα

  – ***θεωρήματα***, προτάσεις που τις αποδεικνύουμε με βάση τα αξιώματα και τις προηγούμενες προτάσεις.

Μαθηματικές διαδικασίες (3)

- Γιατί έχει η Μαθηματική Επιστήμη ανάγκη από αυτό τον τρόπο θεμελίωσης της γνώσης;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της μεθόδου;
- Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ιδεατά, άρα δεν έχουμε εμπειρικό τρόπο να τα μελετήσουμε.
- Χρειάζονται συνεκτικές νοητικές διαδικασίες για να βγάλουμε τα αναγκαία συμπεράσματα.
- Ποια η ιδιαίτερη σημασία της έννοιας «*αξιωματική*»;

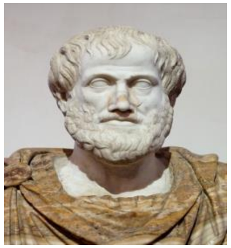
Αξιώματα

Εικόνα 60. Hilbert.

- Το σύστημα αξιωμάτων με βασικούς ορισμένους όρους (Hilbert, 1889 στο "τα Θεμέλια της Γεωμετρίας "):

I. Το σύστημα πρέπει να είναι απαλλαγμένο αντιφάσεων.
II. Οι προτάσεις του συστήματος πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
III. Το σύστημα πρέπει να συμπεριλαμβάνει το μικρότερο αριθμό προτάσεων και να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.

Μαθηματική Λογική (1)

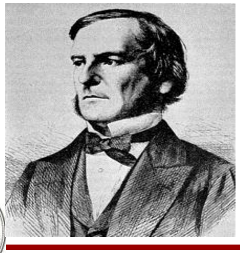


Εικόνα 61. Αριστοτέλης.

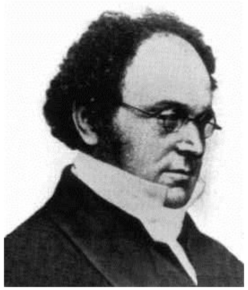
- Η Λογική αποτελεί ένα επιστημονικό κλάδο ο οποίος έχει ως αντικείμενο μελέτης τις τυπικές μορφές της αλήθειας, μελετάει δηλαδή τους κανόνες διαμέσου των οποίων εκφέρονται οι έννοιες, οι κρίσεις, οι συλλογισμοί κλπ.

Εικόνα 62. Leibnitz.

- Η πρώτη εμφάνιση: Αριστοτέλης.
- $17^{ος}$ αιώνα: Leibnitz, το 1666, και στη συνέχεια με
- $19^{ος}$ αιώνας: G. Boole, A. De Morgan.
- 20ος αιώνας: Μη αριστοτέλεια λογική.



Εικόνα 63. Boole.



Εικόνα 64. Morgan.

Μαθηματική Λογική (2)

- Η Αριστοτέλεια Λογική είναι Δίτιμη: Ναι – Όχι, του Αληθής – Ψευδής, “απόκλιση τρίτου”.

- *Μήπως υπάρχουν κι άλλες τιμές;*

  – Παράδειγμα: *ένας άνθρωπος με ύψος 1.80 είναι ψηλός ή κοντός; Σύμφωνα με το μέσο όρο του ύψους είναι μάλλον ψηλός, αλλά για μια ομάδα μπάσκετ είναι σίγουρα κοντός.*

- Η λογική του Ναι - Όχι δεν είναι αρκετά ευέλικτη για να καλύψει τα καθημερινά προβλήματα.

Μαθηματική Λογική (3)

- Περί το 1920: Οι Πολωνοί Łukasiewicz and Tarski εισάγουν μια Πλειότιμη Λογική.
- Το 1960: Ρώσσος Lotfi A. Zadeh, εγκατεστημένος στην Αμερική, δημιουργεί τη Λογική της Ασάφειας (Fuzzy Logic) και εισάγει περισσότερες τιμές σε μια πρόταση αντί για το Αληθής - Ψευδής.
- Με τον τρόπο αυτό η πραγματικότητα προσεγγίζεται πιο ρεαλιστικά και η αλήθεια δεν είναι απόλυτη αλλά σχετική.

Εικόνα 65. Lotfi A. Zadeh.

Μαθηματικές αποδεικτικές μέθοδοι

- Οι βασικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην αποδεικτική διαδικασία είναι:
  – η παραγωγική διαδικασία,
  – η επαγωγική διαδικασία,
  – η απαγωγή σε άτοπο,
  – η αντιθετοαντιστροφή,
  – απόδειξη με εξάντληση,
  – κατασκευαστική απόδειξη (αντιπαράδειγμα),
  – (άλλες μορφές χωρίς απόλυτη ακρίβεια όπως η πιθανοτική, η στατιστική, η οπτική κ.ά).

Παραγωγική διαδικασία (1)

- Η παραγωγική διαδικασία είναι η βασική μέθοδος μαθηματικής απόδειξης η οποία στηρίζεται σε μια διαδοχή αληθών προτάσεων.
- Οι προτάσεις αυτές θεωρούνται ισοδύναμες: η αλήθεια της μιας συνεπάγεται την αλήθεια της άλλης και αντίστροφα.
- Εκφράσεις για την ***ισοδυναμία***:
  - ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η πρόταση p είναι να ισχύει η πρόταση q
  - η p ισχύει τότε και μόνο όταν ισχύει η q
  - η p ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η q".

59

Παραγωγική διαδικασία (2)

- Η παραγωγική διαδικασία παρεμβάλει αναλυτικές και συνθετικές διαδικασίες ή και αντιστροφές.
  - ευθεία πορεία

  $p \Leftrightarrow p1 \Leftrightarrow p2 \Leftrightarrow p3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow q$

  - αντίστροφή πορεία

  $q \Leftrightarrow q1 \Leftrightarrow q2 \Leftrightarrow q3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p.$

- *Μέθοδος αντιθετοαντιστροφής*: από την αλήθεια μιας συνεπαγωγής συνεπάγεται η αλήθεια της αντίθετης και αντίστροφης συνεπαγωγής.
  - Η $p \Rightarrow q$, αποδεικνύει την ~ q (άρνηση q) $\Rightarrow$ ~ p (άρνηση p)

Απαγωγή σε άτοπο

- Η *απαγωγή σε άτοπο* είναι μια αποδεικτική διαδικασία κατά την οποία ξεκινάμε από το αντίστροφο αυτού που θέλουμε να αποδείξουμε και με την ίδια παραγωγική διαδικασία οδηγούμαστε σε ένα αδύνατο αποτέλεσμα (στη βάση του νόμου των αντιθέτων και του αποκλεισμού τρίτου).

- Εφαρμογές:
  - καθαρά μαθηματικές ("ο αριθμός δεν είναι ρητός"),
  - φυσικές ("η ταχύτητα του κινητού δεν μηδενίζεται"),
  - ή πραγματικές ("ο Γιώργος δεν είναι αδελφός του Δημήτρη").

Επαγωγική διαδικασία

- Η επαγωγική διαδικασία είναι η διαδικασία εκείνη κατά την οποία από κάποιες ειδικές περιπτώσεις καταλήγουμε σε γενικότερα συμπεράσματα.

- *Μπορούμε να το κάνουμε αυτό;* Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα επισφαλές και οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα (νόμος των μικρών αριθμών).

  Παράδειγμα, *δοκιμάζοντας σε 3-4 περιπτώσεις (όπως στα παραδείγματά μας) καταλήγουμε σε συμπεράσματα που υποστηρίζουμε ότι ισχύουν πάντα. 1,3,5,7, οι περιττοί αριθμοί είναι και πρώτοι!!*

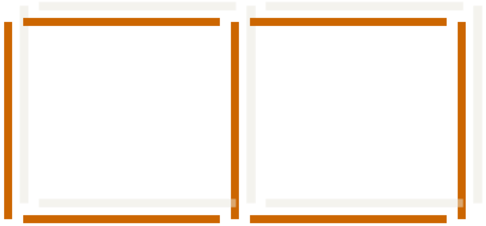
  - Κι από μεγάλους μαθηματικούς, ο Fermat, 17ο αι, παρατήρησε ότι οι αριθμοί $2^{2^0}+1$, $2^{2^1}+1$, $2^{2^2}+1$, κλπ. είναι πρώτοι αριθμοί και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο συμβαίνει για όλους τους αριθμούς της μορφής $2^{2^\nu}+1$, ν φυσικός. Τελικά αποδείχθηκε ψευδές από τον Euler ο οποίος βρήκε ότι $2^{2^5}+1=641\text{X}\ 6700417$ δεν είναι πρώτος.

- *Έχουμε τρόπους ασφαλούς γενίκευσης;*

Επαγωγική απόδειξη

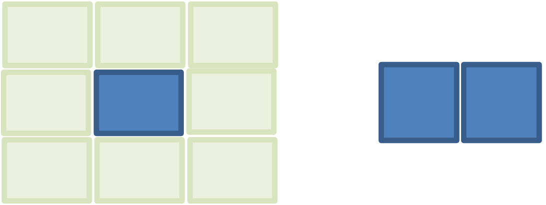
Ας δούμε **μερικά παραδείγματα:**

- Το πρόβλημα με τις χειραψίες.
- Με 4 σπίρτα δημιουργούμε ένα τετράγωνο. Βάζοντας κι άλλα 3 δημιουργούμε κι ένα δεύτερο. Πόσα σπίρτα χρειαζόμαστε για 5 τετράγωνα, 10, 1000, ν;



Εικόνα 66. Τετράγωνα.

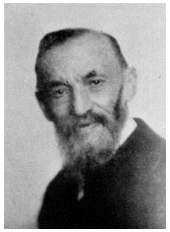
- Μια δεξαμενή 1 m^2 περιστοιχίζεται από 8 πλάκες m^2.Πόσες πλάκες χρειάζεται για 2 m^2, πόσα για 5 m^2, πόσα για ν m^2;



Εικόνα 67. Πλάκες.

Μαθηματική Επαγωγή (1)

Εικόνα 68. Pascal.



Εικόνα 69. Peano.

- Η μέθοδος της *πλήρους ή μαθηματικής επαγωγής* και χρησιμοποιείται κυρίως για την απόδειξη προτάσεων σε μη πεπερασμένα σύνολα (με άπειρο πλήθος στοιχείων).
- Pascal, 1654: διαφορετική διαδικασία για ασφαλή αποτελέσματα. Τη μέθοδο αυτή ολοκλήρωσε το 1889 ο Peano.
- Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο Pascal:
  - *αν ξέρω ότι μια πρόταση ισχύει για τον πρώτο ν,*
  - *αν ξέρω επίσης πώς αν ισχύει για μια πρόταση (ν), ισχύει και για την επόμενή της (ν+1),*
  - *τότε ξέρω ότι ουσιαστικά ισχύει για όλες τις ν προτάσεις.*

Μαθηματική Επαγωγή (2)

- Μια πρόταση με άπειρο πλήθος περιπτώσεις θα ήταν το άθροισμα ν διαδοχικών φυσικών αριθμών 1+2+3+...+ν.

  1+2+3+...+10 ή 1+2+3+...+100 ή 1+2+3+...+758 κλπ.

- Για να γίνει κατανοητή δίνουμε το παράδειγμα με τα ντόμινο:

  Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια ατελείωτη σειρά από ντόμινο, για τα οποία ξέρουμε πως αν μια πλάκα πέσει τότε και η επόμενή της πέφτει, τότε ρίχνοντας το πρώτο, πέφτουν (ανάβουν) όλα.

http://www.youtube.com/watch?v=ghfg7t5g7KE

Εικόνα 70. Ντόμινο.

Εικόνα 71. Σπίρτα.

Αλγόριθμοι

- Χρήση αυτοματισμών για εξοικονόμηση σκέψης και χρόνου,
- Ονομάζεται αλγόριθμος μια επαναλαμβανόμενη διαδοχή από πράξεις ή βήματα που οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα.

Παράδειγμα, ο αλγόριθμος της πρόσθεσης ακολουθεί τα εξής βήματα:

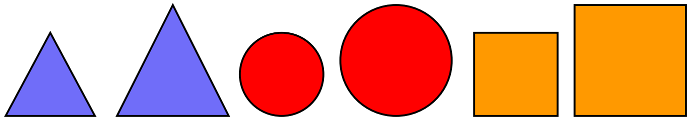
1. *Προσθέτω τους αριθμούς στη στήλη των μονάδων μιας τάξης.*
2. *Αν το άθροισμα είναι <10 το γράφω από κάτω.*
3. *Αν το άθροισμα είναι >10 , γράφουμε από κάτω τις μονάδες αυτής της τάξης και κρατάμε τον αριθμό των μονάδων της επόμενης τάξης.*
4. *Συνεχίζουμε από το 1ο βήμα με τη στήλη των μονάδων της επόμενης τάξης.*

Συλλογιστική Ικανότητα (1)

- Η συλλογιστική ικανότητα είναι ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της μαθηματικής ανάπτυξης για τις μικρότερες ηλικίες.
- Προτείνεται άσκηση από τα πρώτα τους χρόνια να μάθουν:
  - να περιγράφουν και να εξηγούν τη δράση τους,
  - να δικαιολογούν τις αποφάσεις τους,
  - να συνδέουν στοιχεία και να βγάζουν συμπεράσματα.

Ανάπτυξη συλλογισμού

- Τα παιδιά έχουν μπροστά τους ένα «μοτίβο» και δοκιμάζουν να το περιγράψουν:



Εικόνα 72. Μοτίβο.

Ένα παιδί λέει: «*υπάρχει τρίγωνο- τρίγωνο, κύκλος- κύκλος, τετράγωνο- τετράγωνο. Μετά είναι μικρό – μεγάλο, μικρό – μεγάλο, μικρό μεγάλο, μικρό- μεγάλο. Και μετά είναι μπλέ-μπλέ, κόκκινο- κόκκινο, κίτρινο- κίτρινο.*

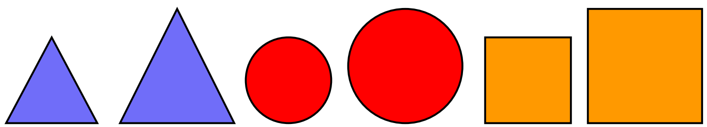
Ένα άλλο παιδί λέει: «*Νομίζω ότι είναι δύο: μικρά και μεγάλα σχήματα σε μπλέ - κόκκινο-κίτρινο χρώματα».* Τι κάνουν σε αυτή τη συζήτηση;

- «*Είναι όλα ίδια, γιατί έχουν το ίδιο σχήμα.»*
- «Τι θα γινόταν αν η κοκκινοσκουφίτσα δεν πήγαινε στο δάσος…»
- *«Θα είναι μπλε γιατί το προηγούμενο είναι κόκκινο ή*
- *« …αν είναι 3 και 3 είναι 6, τότε 3 και 2 θα είναι 5»*
- *«Αν αυτό είναι πράσινο, 2 κόκκινα και μπλε κι αυτό θα γίνει έτσι..»*

Εικόνα 73. Δράσεις.

Συλλογιστική ικανότητα (2)

- *Επαγωγικό συλλογισμό* ακολουθεί το παιδί όταν παρατηρεί μα κατάσταση και βγάζει ένα συμπέρασμα, όταν βρίσκει τον κανόνα σε μια κανονικότητα ή γενικεύει ένα αποτέλεσμα, όπως το μοτίβο «*τρίγωνο- τρίγωνο, κύκλος- κύκλος, τετράγωνο- τετράγωνο. Μετά είναι μικρό – μεγάλο, μικρό – μεγάλο, μικρό μεγάλο, μικρό- μεγάλο. Και μετά είναι μπλέ- μπλέ, κόκκινο- κόκκινο, κίτρινο- κίτρινο…».*



Εικόνα 74. Μοτίβο.

- Εξ*ειδίκευση* ακολουθεί το παιδί όταν βγάζει ένα συμπέρασμα με την εφαρμογή ενός ειδικού κανόνα:
  - *Είναι όλα ίδια, γιατί έχουν το ίδιο σχήμα.*

Συλλογιστική ικανότητα (3)

- Απλό *παραγωγικό συλλογισμό* ακολουθεί το παιδί όταν βγάζει ένα συμπέρασμα με βάση μία ή δύο προϋποθέσεις
  - *θα είναι μπλε γιατί το προηγούμενο είναι κόκκινο.*
  - *…αν είναι 3 και 3 είναι 6, τότε 3 και 2 θα είναι 5.*
- Σε μια τάξη η δασκάλα, για να ξεπεράσει ένα πρόβλημα δύο παιδιών που θέλανε να παίζουν με το ίδιο παιχνίδι, τους λέει ότι τη μισή βδομάδα θα το έχει το ένα παιδί και την άλλη μισή το άλλο.
  - «Αυτό δεν γίνεται!», ισχυρίζεται το ένα παιδί. «Γιατί», ρωτάει η δασκάλα και το παιδί εξηγεί, δείχνοντας με τα δάχτυλα.
  - «Αν το έχει ο Γ. Δευτέρα, Τρίτη , Τετάρτη και εγώ Πέμπτη, Παρασκευή και Σάββατο, ποιος θα το έχει την Κυριακή;».

Συλλογιστική ικανότητα (4)

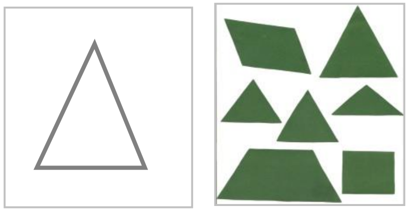
- Υ*ποθετικό παραγωγικό συλλογισμό* ακολουθεί το παιδί όταν βγάζει ένα συμπέρασμα της μορφής «τι θα γινόταν αν…».
  - τι θα γίνει με την εκδρομή αν βρέξει αύριο, τι θα γινόταν αν η κοκκινοσκουφίτσα δεν πήγαινε στο δάσος;
- *Αναλογικό συλλογισμό* ακολουθεί το παιδί όταν κάνει κάποιες απλές αναλογικές μεταφορές, π.χ. μεταφέρουν το σχέδιο από ένα πρότυπο κατασκευασμένο με ένα υλικό σε ένα άλλο.

Συλλογιστική ικανότητα (5)

- Π1: *Είδα εδώ και σκέφθηκα να το κάνω ίδιο. Αν το έβαζα εδώ θα ήταν ανάποδα και αν έπαιρνα το πιο μικρό δεν θα ήταν καθόλου ίδια*.
- Π2: *Είχα σκεφτεί να πάρω 2 τριγωνάκια να τα βάλω έτσι εδώ, όμως δεν τα κατάφερα…μετά σκέφτηκα να πάρω ένα μεγάλο τρίγωνο, να το βάλω εδώ, να πάρω κι ένα τετράγωνο…μετά είχα σκεφτεί να βάλω έτσι αυτό εδώ αλλά δεν πέτυχε.*

Και εξηγούν:

- Π1: *Επειδή δεν βγαίνει έξω και το καλύπτει όλο.*
- Π2: *Επειδή δεν ακουμπάει στις γραμμές και δεν είναι το ένα πάνω στο άλλο..*



Εικόνα 75. Σχήματα.

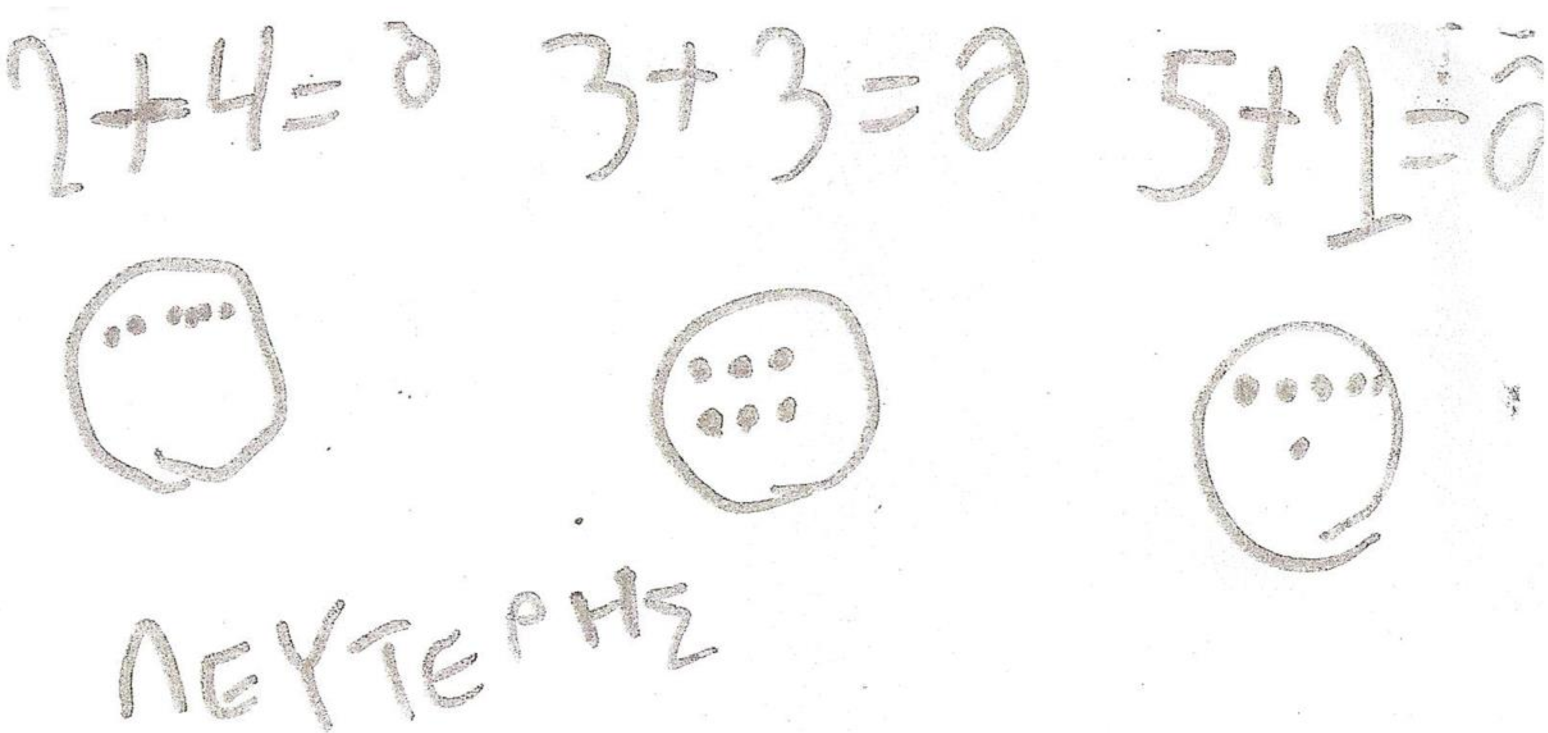
Συλλογιστική ικανότητα (6)

- Συμπέρασμα από γενίκευση:

Εικόνα 76. Ζωγραφιά με συμπεράσματα.

Συλλογιστική ικανότητα (7)

- Συμπέρασμα από γενίκευση (σε δύο μορφές!!):



Εικόνα 77. Συμπεράσματα στις προσθέσεις.

Ερωτήσεις στην 2η ενότητα

1. Ποια είναι τα αντικείμενα μελέτης των Μαθηματικών;
2. Τι ονομάζεται διαδικασία μαθηματικοποίησης;
3. Τι ονομάζουμε διαδικασία αφαίρεσης και τι διαδικασία γενίκευσης;
4. Τι ονομάζουμε διαδικασία συμβολισμού και ποια μέσα χρησιμοποιούνται;
5. Τι ονομάζεται σημαίνον, τι ονομάζεται σημαινόμενο και τι σημασιολογικός χώρος.
6. Ποιες είναι οι βασικές κατηγορίες των συμβολικών αναπαραστατικών μέσων;
7. Τι ονομάζεται μοντέλο, τι φυσικό, και τι μαθηματικό μοντέλο;
8. Τι σημαίνει αξιωματική θεμελίωση και γιατί είναι απαραίτητη στα Μαθηματικά;
9. Ποιες είναι οι βασικές αποδεικτικές διαδικασίες;
10. Τι ονομάζεται παραγωγική και τι επαγωγική διαδικασία;
11. Ποιά αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται απαγωγή σε άτοπο και ποια αντιθετοαντιστροφή;

Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία

1. Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Εκδ. Ζυγός. – σελίδες 30-32
2. Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg – σελίδες 24-34
3. Davis, P. & Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Αθήνα: Τροχαλία.
4. Δημήτριος Π. Γιαννόπουλος, Δ. (2007). Το νόημα και η σημασία των συμβόλων στα Μαθηματικά. Ιστορική εξέλιξη και σύγχρονη διδακτική πρακτική. Διπλωματική Εργασία, ΕΚΠΑ.
5. Καρδαμίτσης, Σ. (2010). Η απόδειξη στα Μαθηματικά και σχετικές αντιλήψεις μαθητών Λυκείου. Διπλωματική Εργασία, ΕΚΠΑ. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Kardamitsis.Spyros..pdf
6. Τουμάσης, Μ. (2000). *Η απόδειξη στα Μαθηματικά*. Αθήνα.

Αναφορές εικόνων (1)

1. By mathscareers.org (http://www.mathscareers.org.uk/article/use-maths/).
2. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2013). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Γενικού Λυκείου. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
3. Προσωπικό αρχείο.
4. By storyformatiics.com (http://www.storyofmathematics.com/sumerian.html).
5. Babylonian numerals.jpg
   http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Babylonian_numerals.jpg
   See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
6. Maya.png
   http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/09/Maya.png
   By Neuromancer2K4 (Own work) [CC-BY-SA-3.0-migrated, GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (2)

7. Thales theorem.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Thales_theorem.svg
By Helder, Dake (Own work)
8. Dup cubo.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Dup_cubo.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
9. By Greenstein.com (http://www.greenstein.com/webquest/conics/task.htm).
10. By Dover Publications Arabic Patterns to Color (https://www.pinterest.com/pin/330873903844957285/).
11. Pascal's triangle 5.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Pascal%27s_triangle_5.svg
By User:Conrad.Irwin originally User:Drini [GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
12. Προσωπικό αρχείο.

Αναφορές εικόνων (3)

13. Desargues theorem alt.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c8/Desargues_theorem_alt.svg
By Jujutacular (Own work) [CC BY-SA 3.0 , GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
14. Rectangular hyperbola.svg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rectangular_hyperbola.svg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
15. Integral approximations.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/91/Integral_approximations.svg
By KSmrq (Own work) [CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en), GNU Free Documentation License, via Wikimedia Commons
16. Riemann integral (http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_integral) & (http://goo.gl/5KA7yZ).

Αναφορές εικόνων (4)

17. Αριθμητικά συστήματα (http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82).
18. Konigsburg graph.png https://commons.wikimedia.org/wiki/File:K%C3%B6nigsberg_graph.png By Mark_Foskey (http://en.wikipedia.org/wiki/User:Mark_Foskey Mark_Foskey) [CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en) GNU Free Documentation License], via Wikimedia Commons
19. Lorenz attractor yb.svg http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorenz_attractor_yb.svg See page for author [GFDL (http://www.gnu.org/) or CC-BY-SA-3.0-migrated (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/), CC-BY-SA-2.5,2.0,1.0], via Wikimedia Commons
20. Mandel zoom 04 seehorse tail.jpg http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_04_seehorse_tail.jpg

Αναφορές εικόνων (5)

See page for author [GFDL (http://www.gnu.org/)or CC-BY-SA-3.0-migrated (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/), CC-BY-SA-2.5,2.0,1.0], via Wikimedia Commons

21. Προσωπικό αρχείο.
22. Blue morpho butterfly.jpg
    http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/65/Blue_morpho_butterfly.jpg
    By Gregory Phillips (Own work) [CC-BY-SA-3.0-migrated GNU Free Documentation License (http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-3.0-migrated)], via Wikimedia Commons
23. Sunflower (4426630831) (2).jpg
    http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/40/Sunflower_%284426630831%29_%282%29.jpg
    By Milan Nykodym, Czech Republic (Flickr images reviewed by File Upload Bot (Magnus Manske) [CC-BY-SA-2.0 (http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-2.0)], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (6)

24. NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg
By Chris 73 (Own work), GNU Free Documentation License [CC-BY-SA-3.0 (http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License)], via Wikimedia Commons
25. Araneus diadematus web 1.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Araneus_diadematus_web_1.jpg
By Gnissah (Own work) [CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
26. By Discovery Communications, Inc (http://blogs.discovery.com/bites-animal-planet/weblogs/).
27. Aquarium tropical du Palais de la Porte Dorée - Chaetodon semilarvatus.jpg

Αναφορές εικόνων (7)

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/Aquarium_tropical_du_Palais_de_la_Porte_Dor%C3%A9e_-_Chaetodon_semilarvatus.jpg
By KoS (Own work) [CC-BY-SA-3.0,2.5,2.0,1.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en) GNU Free Documentation License], via Wikimedia Commons

28. By ΠΟΛΥΤΙΜΗ ΓΚΟΥΡΛΙΑ (http://1lyk-karpen.eyr.sch.gr/geometry/gourlia.pdf).
29. NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg
By Chris 73 (Own work), GNU Free Documentation License [CC-BY-SA-3.0 (http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License)], via Wikimedia Commons
30. Fibonacci spiral 34.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/93/Fibonacci_spiral_34.svg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (8)

31. By ΡΙΖΟΣΠΑΣΤΗΣ (http://www.rizospastis.gr/page.do?publDate=26/11/2000&id=1444&pageNo=7&direction=1#overlay/0/).
32. Tesseract.gif
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Tesseract.gif
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
33. Uniform polyhedron-43-t0.png
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Uniform_polyhedron-43-t0.png
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
34. Hexahedron flat.png
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Hexahedron_flat.png
By Cyp [CC-BY-SA-3.0-migrated, GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
35. Tesseract2.svg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ac/Tesseract2.svg

Αναφορές εικόνων (9)

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

36. MET - The Great Hall - Metropolitan Museum of Art, New York, NY, USA - 2012.JPG
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/MET_-_The_Great_Hall_-_Metropolitan_Museum_of_Art%2C_New_York%2C_NY%2C_USA_-_2012.JPG
By WestportWiki (Own work) [CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

37. Dali Crucifixion hypercube.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/09/Dali_Crucifixion_hypercube.jpg
By Salvador Dalí [http://wikimediafoundation.org/wiki/Home (http://en.wikipedia.org/wiki/United_States_copyright_law)], via Wikipedia

38. Προσωπικό αρχείο.

39. Matterhorn from Domhütte - 2.jpg

Αναφορές εικόνων (10)

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Matterhorn_from_Domh%C3%BCtte_-_2.jpg
By Zacharie Grossen [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

40,42,44. Προσωπικό αρχείο.

41. By Peter Finger (http://www.peterfingerartist.com/usa.html).

43. Madeira nordküste wasserfall brautschleier 5-2007.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3b/Madeira_nordk%C3%BCste_wasserfall_brautschleier_5-2007.jpg
By Hedwig Storch (Own work) [CC-BY-SA-3.0,2.5,2.0,1.0, GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

45. By Google earth.

46. By Smiler (http://tisotit.blogspot.gr/2011/10/fibonacci-sequence-video.html).

47. By mathigon.org (http://world.mathigon.org/Sequences).

Αναφορές εικόνων (11)

48. USACab.JPG
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/USACab.JPG
By Nrbelex [CC BY-SA 3.0,
GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

49-53. Προσωπικό αρχείο.

54. By earthquakeprediction.gr (http://www.pipini.gr/them/sism/).

55-59. Προσωπικό αρχείο.

60. Hilbert.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Hilbert.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

61. Aristotle Altemps Inv8575.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

62. Gottfried Wilhelm von Leibniz.jpg

Αναφορές εικόνων (12)

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

63. George Boole.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/George_Boole.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

64. De Morgan Augustus.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2c/De_Morgan_Augustus.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

65. Zadeh-barcelona-1997@92x115.gif
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Zadeh-barcelona-1997%4092x115.gif
By Marc.M [CC BY-SA 3.0
GNU Free Documentation License
(http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (13)

66-67. Προσωπικό αρχείο.
68. Blaise pascal.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Blaise_pascal.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
69. Giuseppe Peano.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg?uselang=el
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
70. Toppledominos.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e4/Toppledominos.jpg
By Enoch Lai [CC BY-SA 3.0, GNU Free Documentation License (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
71. Zapalky makrofoto.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e7/Zapalky_makrofoto.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
72-77. Προσωπικό αρχείο.

Βιβλιογραφία

[1] Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2013). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Γενικού Λυκείου. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τζεκάκη Μαριάννα. «Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία. Ενότητα 2. Μαθηματική Επιστήμη». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS177/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Στοϊνίτση Αφροδίτη

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-15

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.