



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1.2: Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ☞ Εισαγωγή.
- ☞ Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.
- ☞ Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων.



Σκοποί Ενότητας



☞ Παρουσίαση της γενικής εικόνας για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.



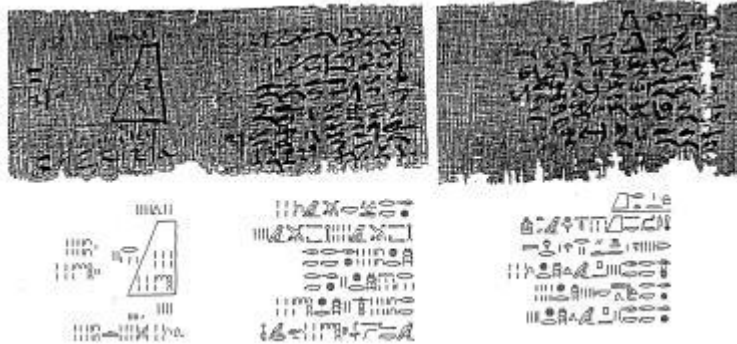
Μεσοποταμία-Αίγυπτος 3000-1000 π.Χ.



Εικόνα 1



Ο πάπυρος της Μόσχας



Εικόνα 2

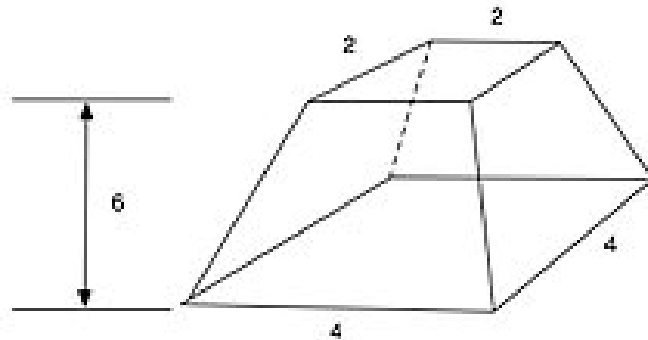
Ο πάπυρος της Μόσχας (~1600π.Χ.) περιέχει 25 προβλήματα. Έχει μήκος 6 μέτρα και πλάτος περίπου 5 εκατοστά.

14^ο πρόβλημα.

Βρίσκεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας από το 1893 μ.Χ.



Πρόβλημα: Να βρεθεί ο όγκος μίας (κομμένης) τετραγωνικής πυραμίδας



Εικόνα 3

«μετάφραση των συμβόλων:
Εάν σου πουν: μία κομμένη
πυραμίδα με ύψος 6, με βάση
πλευρά 4 και κορυφή πλευρά 2 :
πάρε το τετράγωνο του 4, βρες 16.
Διπλασίασε το 4, βρες 8. Πάρε το
τετράγωνο του 2, βρες 4.
Πρόσθεσε το 16, το 8 και το 4,
βρες 28. πάρε το $\frac{1}{3}$ του 6, βρες 2.
Διπλασίασε το 28, βρες 56.
Επιβεβαίωσε ότι είναι 56. Θα
βρεις ότι είναι σωστό.»



Απόδειξη



Ο όγκος της πυραμίδας με βάση εμβαδού A ισούται και ύψος H είναι $\frac{1}{3}AH$. Έστω ότι η πλευρά της βάσης είναι a .

Αν το κομμάτι της αποκομμένης πυραμίδας έχει ύψος h τότε η πυραμίδα της κορυφής έχει ύψος $H-h$. Έστω ότι η πλευρά της βάσης της είναι b .

Από όμοια τρίγωνα προκύπτει ότι $\frac{H-h}{a} = \frac{H}{b}$.

Έπεται ότι $\frac{H}{b} = \frac{h}{b-a}$.

Έτσι ο όγκος της αποκομμένης πυραμίδας είναι

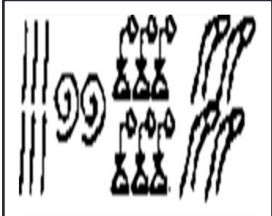
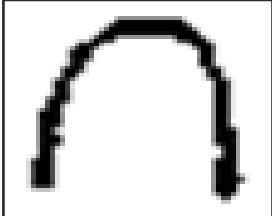
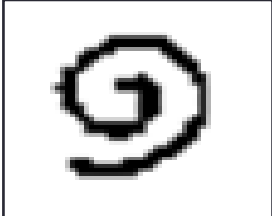
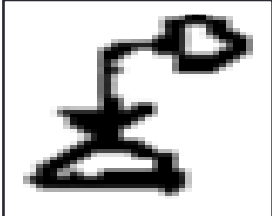


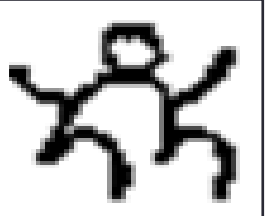

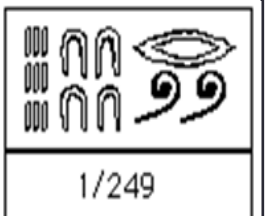

$$V = \frac{1}{3}b^2H = \frac{1}{3}a^2(H-h)$$

και τελικά αντικαθιστώντας $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$.



Τα νούμερα στην ιερατική γραφή των αρχαίων Αιγυπτίων

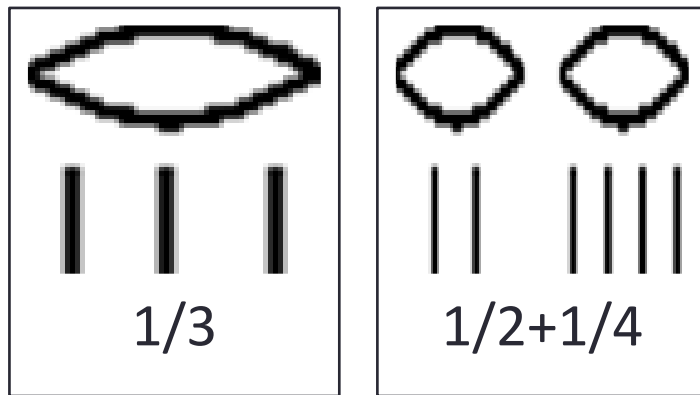


 42,206	 10	 100	 1000	 10,000
 100,000	 1,000,000	 276	 1/249	 1/249

Εικόνα 4



Κλάσματα στους αρχαίους Αιγυπτίους



- ☞ Παραδείγματα στην ιερογλυφική γραφή.
- ☞ «Αιγυπτιακό κλάσμα»: άθροισμα κλασμάτων με αριθμητή 1 και με διαφορετικούς παρανομαστές.
- ☞ Στον πάπυρο του Ahmes υπάρχει σειρά προβλημάτων που αφορούν το πως γράφονται οι εκφράσεις $2/n$ ως αιγυπτιακά κλάσματα.

Εικόνα 5



Ο πάπυρος του Rhind---Ahmes



Εικόνα 6



Ο πάπυρος του Rhind---Ahmes

...συνέχεια

- ☞ Ο πάπυρος του Rhind /Ahmes ~1650 π.Χ. είναι κατά τον Ahmes αντιγραφή από κείμενο 200 χρόνων παλαιότερο και περιέχει 87 μαθηματικά προβλήματα. Έχει μήκος 2 μέτρα, πλάτος 33 εκατοστά.
- ☞ 81 από αυτά τα προβλήματα έχουν λύσεις που αναφέρονται σε κλασματικές ποσότητες.
- ☞ Πρόβλημα 3, π. του Rhind: «να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες. Απάντηση : $1/2+1/10$.»



Πρόβλημα 3, πάπυρος του Rhind



Πρόβλημα 3: να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες.

Απάντηση : $1/2 + 1/10$.

Με άλλα λόγια: $6/10 = 1/2 + 1/10$

Φυσική ερμηνεία:

Στον κάθε άνδρα δίνεις μισή φραντζόλα και $1/10$.

Στο τέλος θα έχεις κόψει στο μισό τις 5 φραντζόλες και την έκτη σε 10 κομμάτια.

(Είναι πιο εύκολο στη πράξη από το $3/5$?)



Αιγυπτιακά κλάσματα



Ποια κλάσματα p/q (όπου $p < q$) γράφονται ως Αιγυπτιακά κλάσματα? (πόσους προσθετέους χρειαζόμαστε?)

Υπόδειξη:

Αν $p = 1$, τότε ο αλγόριθμος έχει λήξει.

Διαφορετικά: υπάρχει n έτσι ώστε $\frac{1}{n} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$.

Έπεται ότι $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} > 0$.

Από τη δεύτερη ανισότητα έπεται ότι ο αριθμητής του κλάσματος $\frac{pn-q}{qn}$ είναι μικρότερος του p .

Επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο έως ότου φτάσουμε σε κλάσμα με αριθμητή 1.



Πρόσθεση στο Αιγυπτιακό σύστημα



∞ Πρόσθεση είναι εύκολη στο αιγυπτιακό σύστημα:
Προσθέτουμε τα όμοια σύμβολα και αντικαθιστούμε με κατάλληλο σύμβολο όταν ξεπεράσουμε τις δεκάδες, εκατοντάδες, κ.λ.π.



Πολλαπλασιασμός



Για να υπολογίσουμε $a \times b$ ξεκινάμε με την δυάδα 1 και b .
Διπλασιάζουμε διαδοχικά το 1 και το b :

$$1 \rightarrow b,$$

$$2 \rightarrow 2b,$$

$$4 \rightarrow 4b,$$

$$8 \rightarrow 8b,$$

... ..

κ.λ.π. έως ότου το στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μεγαλύτερο του a . Βρίσκουμε τις δυνάμεις του 2 που αθροίζουν στο a και αθροίζουμε τα αντίστοιχα πολλαπλάσια του b .



Παράδειγμα



19x12	
1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
19=1+2+16	
19x12=12+24+192=228	

∞ Εδώ καταφέραμε να γράψουμε το 19 ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Μπορεί πάντα να γίνεται αυτό?



Πολλαπλασιασμός στην αρχαία Αίγυπτο

Φαίνεται ότι οι γραφείς πίστευαν ότι κάθε θετικός αριθμός γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 2.

Αυτό είναι όντως θεώρημα.

Πως όμως αποδεικνύεται?

Όχι μόνο δεν έχει σωθεί απόδειξη για αυτό στους παπύρους αλλά ούτε καν ένδειξη το πώς το ανακάλυψαν οι Αιγύπτιοι.

Η διαίρεση είναι το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού.



Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Αιγύπτιοι

Πρόβλημα από πάπυρο της Μόσχας:

«Βρες την τιμή που όταν την πάρουμε μία και μισή φορές και μετά προσθέσουμε το 4 βρίσκουμε 10. »

(αντίστοιχη εξίσωση $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$)

Περιγραφή λύσης:

«αφαίρεσε 4 από 10, βρες 6. πολλαπλασίασε με 2/3, βρες 4.»



Πρόβλημα 26, πάπυρος του Rhind:



Πρόβλημα 26, πάπυρος του Rhind:

«Βρες την τιμή που όταν την προσθέσεις στο $\frac{1}{4}$ του εαυτού της το αποτέλεσμα είναι 15.»

(αντίστοιχη εξίσωση $x + (1/4) * x = 15$.)

Λύση:

«έστω ότι η απάντηση είναι 4. Τότε 1 και $\frac{1}{4}$ του 4 είναι 5.

Πολλαπλασίασε το 5 για να βρεις 15. Η απάντηση είναι 3.

Πολλαπλασίασε το 3 με το 4. Η απάντηση είναι 12.»

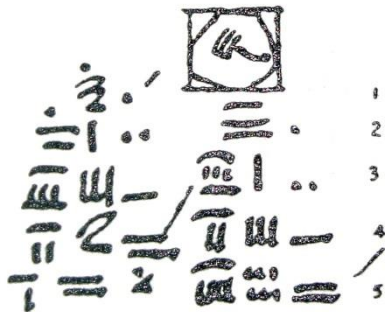
Η λύση προϋποθέτει γνώση αναλογιών.



Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (1)



Οι Αιγύπτιοι αναγνώριζαν την σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και το τετράγωνο της ακτίνας του. Θεωρούσαν ότι το εμβαδόν είναι $256/81$ φορές το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου. (Έτσι έδιναν στο π την τιμή $256/81$ που είναι περίπου 3.1604). Πιθανή εξήγηση από πρόβλημα και αντίστοιχη εικόνα στον πάπυρο του Ahmes:



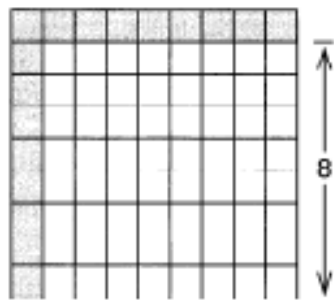
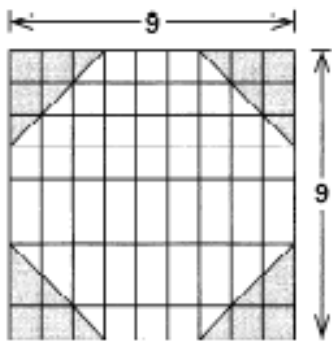
Εικόνα 7

Ο κύκλος μοιάζει με οκτάγωνο εγκλεισμένο σε τετράγωνο. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 9, μετράμε τα τετραγωνάκια εκτός οκταγώνου. Είναι 18. Άρα στο οκτάγωνο μένουν $81-18=63$ τετραγωνάκια.



Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (2)

Τοποθετούμε τα τετραγωνάκια που λείπουν οριζόντια και κάθετα στις παρυφές του αρχικού τετραγώνου. Προκύπτει ένα τετράγωνο με πλευρά 8. Το τετράγωνο αυτό έχει (κατά προσέγγιση) το εμβαδόν του αρχικού κύκλου με διάμετρο 9.



Γενικότερα: αν ο κύκλος έχει ακτίνα r τότε το τετράγωνο που έχει (κατά προσέγγιση το ίδιο εμβαδό με τον κύκλο) έχει πλευρά $2r - \frac{2r}{9}$.

Δηλαδή η πλευρά του είναι $\frac{16r}{9}$.



Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (3)

Σύμφωνα με τις οδηγίες του παπύρου για να βρει κανείς το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο d θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα:

Από τη διάμετρο d να αφαιρέσει $1/9d$ και στη συνέχεια να υψώσει στο τετράγωνο:

$$(8/9d)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(2r)^2 = 256/81r^2$$



Ερωτήματα για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων

- ☞ Υπήρχε διαχωρισμός ανάμεσα στις ακριβείς τιμές και στις προσεγγίσεις;
- ☞ Όλοι αυτοί οι γεωμετρικοί τύποι: πως προέκυψαν;
- ☞ Στηρίζανε οι Αιγύπτιοι τα αποτελέσματά τους σε αποδείξεις ή ήταν εμπειρικά;



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1: "Ancient Egypt and Mesopotamia c. 1450 BC"** by Свифт/Svift - my work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ancient_Egypt_and_Mesopotamia_c._1450_BC.png#mediaviewer/File:Ancient_Egypt_and_Mesopotamia_c._1450_BC.png
- ☞ **Εικόνα 2: "Moskou-papyrus"** by Unknown - Struve, Vasilij Vasil'evič, and Boris Turaev. 1930. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moskou-papyrus.jpg#mediaviewer/File:Moskou-papyrus.jpg>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)



- ☞ **Εικόνα 3:** "Pyramide-tronquée-papyrus-Moscou 14" by Stumps - wikimedia. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyramide-tronqu%C3%A9e-papyrus_Moscou_14.jpg#mediaviewer/File:Pyramide-tronqu%C3%A9e-papyrus-Moscou_14.jpg
- ☞ **Εικόνα 4:** http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_numerals
- ☞ **Εικόνα 5:** http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_numerals
- ☞ **Εικόνα 6:** "Rhind Mathematical Papyrus" by Paul James Cowie (Pjamescowie)-
http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg.
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons-
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg#mediaviewer/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)



☞ **Εικόνα 7: “Problème-R48-Papyrus-Rhind-texte”** von Arnold Buffum Chace - The rhind mathematical papyrus (1929). Lizenziert unter Public domain über Wikimedia Commons –

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind_texte.jpg#mediaviewer/File:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind-texte.jpg



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων. Ενότητα 1.2: Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

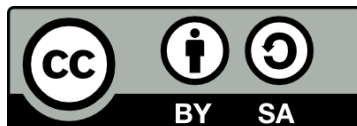
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons. Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

