ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 1**: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.


**Χαρά Χαραλάμπους**

Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 1.3**: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

# Σκοποί Ενότητας

- Παρουσίαση της γενικής εικόνας για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.

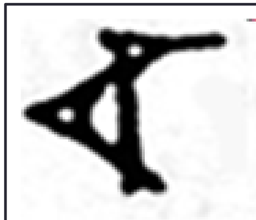
# Αρίθμηση στη Βαβυλωνία

Αρίθμηση στη Βαβυλωνία: βάση 60, συνδυασμός με 10, εξαρτώμενη από τη θέση των ψηφίων.

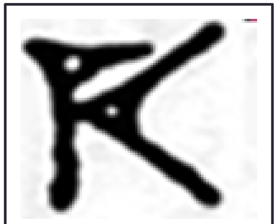

1 (και 60)

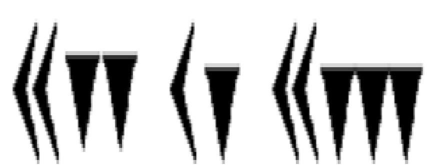

8


10


11


30


70


79883=$(22 * 60^2) +$
$(11 * 60) + 23$

# Πράξεις στην Βαβυλωνία

- Δεν έχουν βρεθεί πίνακες για πρόσθεση.
- Έχουν βρεθεί πολλοί πίνακες για τον πολλαπλασιασμό:

  Έτσι ένας πίνακας για τον αριθμό $a$ περιλαμβάνει τα πολλαπλάσια

  $$1 \times a, \ldots, 20 \times a, 30 \times a, 40 \times a, 50 \times a$$

- Έχουν βρεθεί επίσης πίνακες αντιστρόφων: δηλαδή δυάδες που δίνουν το 1, 60 ή γενικότερα δυνάμεις του 60.

# Πίνακας (κανονικών) αριθμών και αντιστρόφων

Γράφουμε με αραβικά ψηφία αλλά χρησιμοποιούμε τη βαβυλωνιακή αντιστοίχιση (7,30= 7+30/60) .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 30 | 16 | **3,45** | **45** | **1,20** |
| **3** | **20** | **18** | 3,20 | 48 | 1,15 |
| 4 | 15 | 20 | 3 | 50 | 1,12 |
| 5 | 12 | 24 | 2,30 | 54 | 1,6,40 |
| 6 | 10 | 25 | 2,24 | 1 | 1 |
| 8 | 7,30 | 27 | 2,13,20 | 1,4 | 56,15 |
| 9 | 6,40 | 30 | 2 | 1,12 | 50 |
| 10 | 6 | 32 | 1,52,30 | 1,15 | 48 |
| 12 | 5 | 36 | 1,40 | 1,20 | 45 |
| 15 | 4 | 40 | 1,30 | 1,21 | 44,26,40 |

# Κανονικοί αριθμοί

«**Κανονικοί**» αριθμοί είναι αυτοί που οι αντίστροφοί τους γράφονται με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων στα βαβυλωνιακά---(με βάση το 60).

Είναι οι αριθμοί που οι μόνοι τους διαιρέτες είναι 2,3,5, (δηλαδή οι διαιρέτες του 60).

Απόδειξη?

# Αντίστροφοι Κανονικών αριθμών

Για την εύρεση αντιστρόφων κανονικών αριθμών εκτός πίνακα αντιστρόφων οι Βαβυλώνιοι εφάρμοζαν μία μέθοδο που (σε κάθε στάδιο) ανήγαγε το πρόβλημα εύρεσης του $1/n$ σε εύρεση κατάλληλων $x, y$ έτσι ώστε $x + y = n$ και τουλάχιστον ένα από τα $x, y$ να είναι σε πίνακα αντιστρόφων:

Neugebauer, O. (1935-37). Mathematische Keilschrifttexte I-III (MKT). Berlin, Springer

# Αντίστροφοι Κανονικών αριθμών συνέχεια

Η διαίρεση γίνεται χρησιμοποιώντας

1) τους πίνακες πολλαπλασιασμού και
2) τους πίνακες των αντιστρόφων.

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

- Έχουν βρεθεί πίνακες με τετράγωνα, τετραγωνικές ρίζες, κύβους και κυβικές ρίζες.

# Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Βαβυλώνιοι

Πρόβλημα από την πλακέτα (σε ελεύθερη μετάφραση):


Εικόνα 1

Ένα χωράφι παράγει 2/3 «κιλού σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού» ενώ το άλλο χωράφι παράγει 1/2 «κιλό σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού». Τα εμβαδά των δύο χωραφιών είναι 1800. Κάποια χρονιά το πρώτο χωράφι παρήγαγε 500 κιλά περισσότερους σπό- ρους από το άλλο. Ποια είναι τα εμβαδά?

Σύγχρονη αλγεβρική (γραμμική άλγεβρα) αντιμετώπιση:

Έστω $x, y$ τα αντίστοιχα εμβαδά. Τότε

$\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1800$ και $\frac{2}{3}\mathrm{x} - \frac{1}{2}\mathrm{y} = 500.$

# Σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$x + y = 1800$$
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

Επίλυση με γραμμική άλγεβρα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1800 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 500 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 600 \end{bmatrix}$$

$x = 1200, y = 600.$

# Μέθοδος επίλυσης σύμφωνα με την πλακέτα (ελεύθερη μετάφραση)

Θέτουμε $x$ και $y$ να είναι 900. Τότε

$$\frac{2}{3} * 900 - \frac{1}{2} * 900 = 150$$

Η διαφορά από το 500 είναι 350.

Προσθέτουμε 300 στο 900 και η απάντηση για το $x$ είναι 1200.

Αφαιρούμε το 300 από το 900 και η απάντηση για το $y$ είναι 600.

# Εξήγηση της μεθόδου

Στη μία εξίσωση τα $x, y$ έχουν τους ίδιους συντελεστές. Βλέπουμε τι γίνεται αν είναι ίσα. Η λύση σύμφωνα με αυτήν την εξίσωση είναι 900. Η επιλογή αυτή δεν είναι σωστή αφού η άλλη εξίσωση δεν ικανοποιείται: υπάρχει η διαφορά των 350.

Αν αυξήσουμε κατά μία μονάδα το $x$ δηλαδή το κάνουμε 901 και μειώσουμε κατά μία μονάδα το $y$ και το κάνουμε 899 τότε $901 + 899 = 1800$ ενώ

$$\frac{2}{3} * 901 - \frac{1}{2} * 899 = 150 + 7/6$$

Πράγματι:

$$\left(\frac{2}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1)\right) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 7/6.$$

# Εξήγηση της μεθόδου συνέχεια

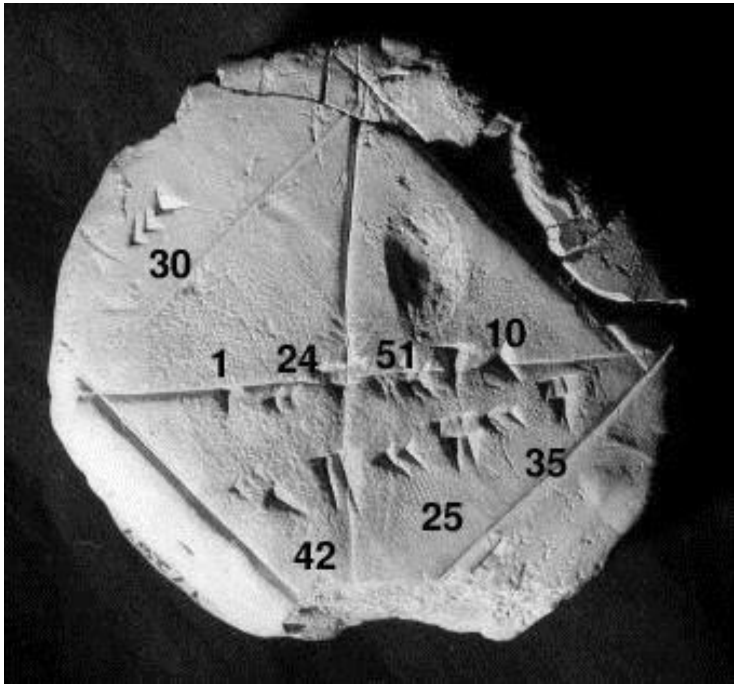
Έτσι αν προσθέσουμε $s$ μονάδες στο 900 και το κάνουμε $900 + s$ και αφαιρέσουμε $s$ μονάδες από το 900 και έχουμε $900 - s$ τότε το αποτέλεσμα αλλάζει κατά $\frac{7}{6}s$.

Για να ικανοποιηθεί η δεύτερη εξίσωση θα πρέπει $\frac{7}{6}s$ να καλύψει τη διαφορά των 350 μονάδων. Άρα $\frac{7}{6}s = 350$ και $s = 300$.

**Συμπέρασμα**

Οι Βαβυλώνιοι κατείχαν την έννοια της αναλογίας των τριών!

# Η πλακέτα




Εικόνα 2

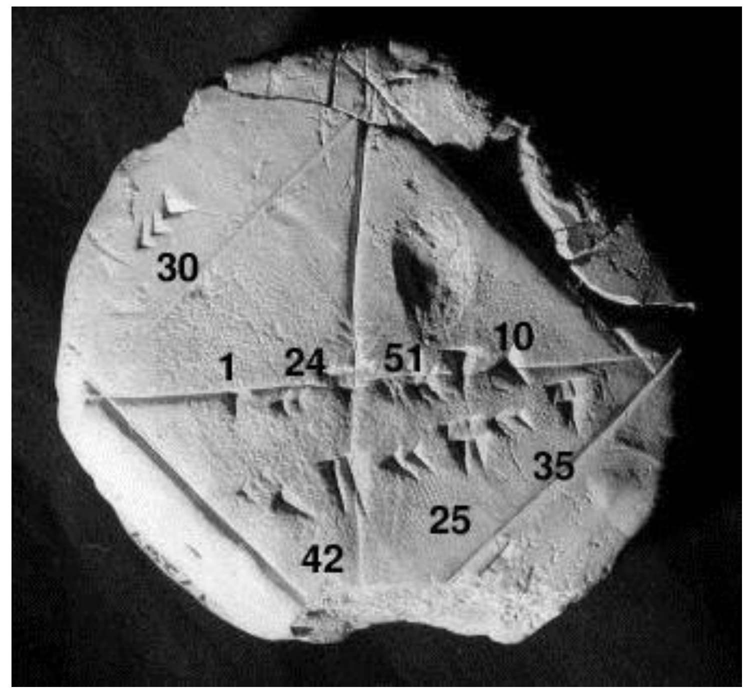
Η πλακέτα (1800 π.Χ.) τώρα βρίσκεται στη συλλογή στο Yale.

# Μεσοποταμία

Yale Babylonian collection 1800 π.Χ.

Εικόνα 3

Εικόνα 4



# Ο αριθμός

Ο αριθμός στη διαγώνιο είναι ο

1,24,51,10

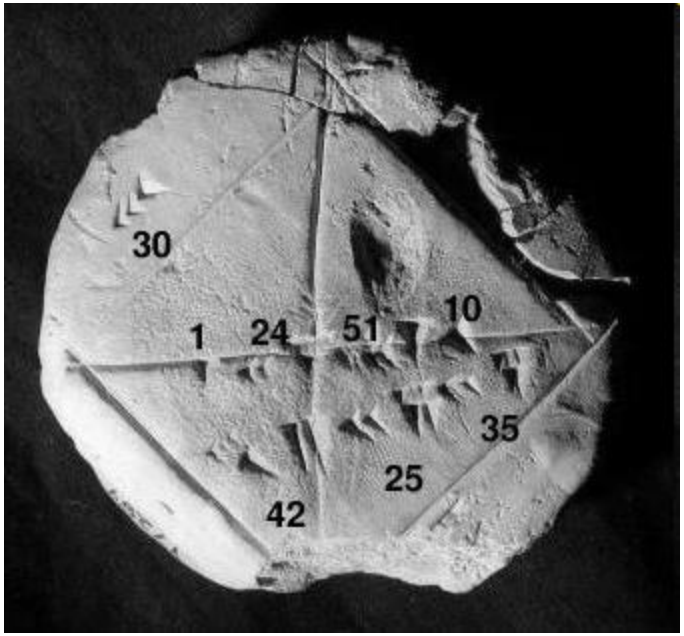
όπου

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41421296$$

Αναγνωρίζουμε τον αριθμό αυτό ως προσέγγιση της τετραγωνική ρίζα του 2

$$\sqrt{2}$$

# Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους τρεις αριθμούς;




Εικόνα 5

30

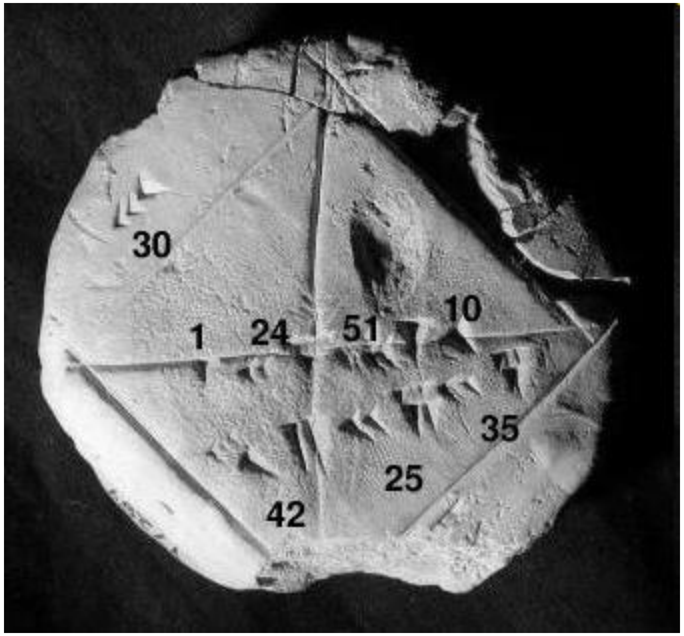
1,24,51,10

42,25,35

***ο τρίτος αριθμός προκύπτει από τους άλλους δύο ως το γινόμενο τους ***

Πολλαπλασιασμός με το 30 είναι το ίδιο με τη διαίρεση με το 2 αφού 30 *2=60.

# Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με ακμή a;




Εικόνα 6

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{2}$$

Αν λοιπόν 30 είναι το μήκος της ακμής του τετραγώνου, τότε 42,25,35=30*1,24,51,10 είναι το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου!

Η πλάκα υποδεικνύει ότι αν το μήκος μιας ακμής του τετραγώνου είναι 30 τότε για να βρούμε το μήκος της διαγωνίου πολλαπλασιάζουμε 30 με το 1,24,51,10.

# Μέθοδος των Βαβυλωνίων

- Οι Βαβυλώνιοι είχαν γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος(?)
- Είχαν αναπτύξει κάποια τεχνική για την εύρεση τετραγωνικών ριζών.

Η τεχνική που πιστεύουμε ότι είχαν αναπτύξει την αποκαλούμε σήμερα μέθοδο των Βαβυλωνίων ή μέθοδο του Ήρωνα (150 μ.Χ). Η μέθοδος αυτή μοιάζει ιδιαίτερα με τη μέθοδο του Νεύτωνα (1642-1727):

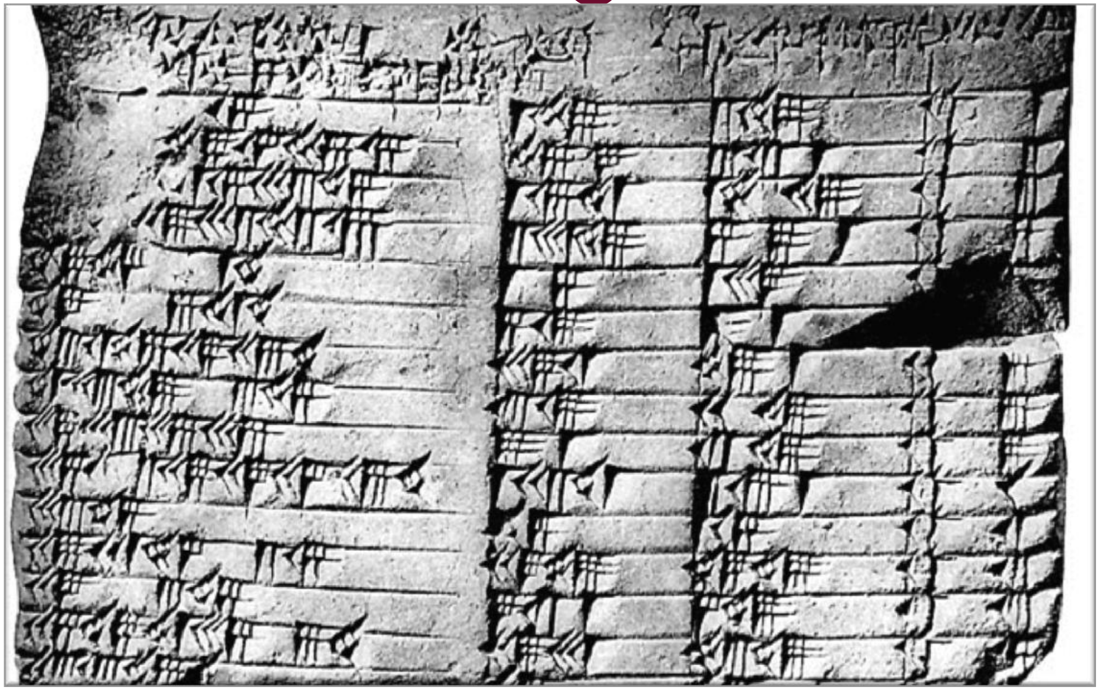
Για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του b ξεκινάμε με μία τιμή $a_1$. Στη συνέχεια παίρνουμε $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{b}{a_1}\right)$ κ.ο.κ.ε.

# Τετραγωνική ρίζα του 2

| $\sqrt{2}$ | |
|---|---|
| **1.41421**296 | Τιμή των Βαβυλωνίων |
| **1.41421356** | Τιμή (προσέγγιση) έως 8 δεκαδικά ψηφία |

- Έχουν υπολογιστεί 200,000,000,000 ψηφία για τη τετραγωνική ρίζα του 2 (2006).
- Ενδιαφέρουσες ιδιότητες:
  - το αντίστροφο της ρίζας 2 είναι ίση με το μισό της ρίζας 2.
  - μη ρητός αριθμός.
  - κ.ο.κ.

# Πλάκα του Plimpton 1700 π.Χ.



Εικόνα 7

Τριάδες του Πυθαγόρα

# Ταμπλέτα του Plimpton

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.9834028 | 119 | 169 | 1 |
| 0.9491586 | 3367 | 4825 | 2 |
| 0.9188021 | 4601 | 6649 | 3 |
| 0.8862479 | 12,709 | 18,541 | 4 |
| 0.8150077 | 65 | 97 | 5 |
| 0.7851929 | 319 | 481 | 6 |
| 0.7199837 | 2291 | 3541 | 7 |
| 0.6845877 | 799 | 1249 | 8 |
| 0.6426694 | 481 | 769 | 9 |
| 0.5861226 | 4961 | 8161 | 10 |
| 0.5625 | 45 | 75 | 11 |
| 0.4894168 | 1679 | 2929 | 12 |
| 0.4500174 | 161 | 289 | 13 |
| 0.4302388 | 1771 | 3229 | 14 |
| 0.3871605 | 56 | 106 | 15 |

Ταμπλέτα του Plimpton,

(O. Neugebauer and A. Sachs, **Mathematical cuneiform texts**, American Oriental Society, 1945)

$$(3/4)^2 = 0{,}5625$$

$$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{75}{60} = \frac{5}{4}$$

τριάδα (3,4,5)

# Πλάκα του Plimpton

| y | $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ | x | d | # |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 0.9834028 | 119 | 169 | 1 |
| 3456 | 0.9491586 | 3367 | 4825 | 2 |
| 4800 | 0.9188021 | 4601 | 6649 | 3 |
| 13,500 | 0.8862479 | 12,709 | 18,541 | 4 |
| 72 | 0.8150077 | 65 | 97 | 5 |
| 360 | 0.7851929 | 319 | 481 | 6 |
| 2700 | 0.7199837 | 2291 | 3541 | 7 |
| 960 | 0.6845877 | 799 | 1249 | 8 |
| 600 | 0.6426694 | 481 | 769 | 9 |
| 6480 | 0.5861226 | 4961 | 8161 | 10 |
| 60 | 0.5625 | 45 | 75 | 11 |
| 2400 | 0.4894168 | 1679 | 2929 | 12 |
| 240 | 0.4500174 | 161 | 289 | 13 |
| 2700 | 0.4302388 | 1771 | 3229 | 14 |
| 90 | 0.3871605 | 56 | 106 | 15 |

(φαίνεται οπτικά από την πλάκα ότι έχει σπάσει το κομμάτι που είχε μία ακόμα στήλη, αυτή που συμπληρώνουμε ως πρώτη στήλη των $y$...) όπου $x, y$ δύο πλευρές ενός ορθού τριγώνου και $d$ η υποτείνουσα.

# Τριάδες του Πυθαγόρα και Βαβυλώνιοι

Ερμηνεία για τον τρόπο εύρεσης των τριάδων

- $x^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow$ $(x/y)^2 + 1 = (d/y)^2$
- $u = \frac{x}{y}, v = \frac{d}{y}$
- $u^2 + 1 = v^2 \Leftrightarrow$ $v^2 - u^2 = 1$

και αφού

$v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$

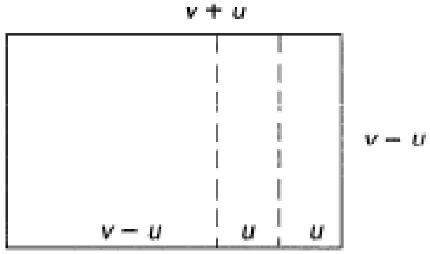
$\Leftrightarrow (v-u)(v+u) = 1$

Δηλαδή αντί να ψάχνουμε $x, y, d$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = d^2$ ψάχνουμε $v, u$ έτσι ώστε $(v-u)(v+u) = 1$. Από τον τύπο του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(v-u)$ και $(v+u)$ είναι οι ακμές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει εμβαδό 1.

Δίνουμε στο $v+u$ την τιμή $a$. Τότε $v - u = \frac{1}{a}$ και μπορεί να βρεθεί από τον πίνακα των αντιστρόφων. Για να βρούμε λοιπόν $v, u$ λύνουμε τις δύο γραμμικές εξισώσεις $v + u = a$, $v - u = \frac{1}{a}$. Τέλος πολλαπλασιάζοντας με $y$ (αφού $u = \frac{x}{y}, v = \frac{d}{y}$) βρίσκουμε τις τριάδες της πλάκας του Plimpton.

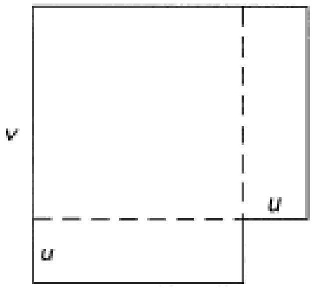
# Πως γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ότι $v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$ (για κάθε $v$ και $u$?)?

(υπενθύμιση: η αλγεβρική γραφή δεν είχε ακόμα εφευρεθεί…)




Μία πιθανή γεωμετρική εξήγηση:
Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $(v+u)$ και $(v-u)$.
Στην ακμή $v+u$ χαράσσουμε το $v-u$, το τμήμα που περισσεύει είναι $2u$.
Διαιρούμε λοιπόν το αρχικό παραλληλόγραμμο σε 3 μέρη: ένα τετράγωνο με ακμή $v-u$, και δύο παραλληλόγραμμα με ακμές $u$ και $v-u$.

# Πως γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ότι $v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$




Στρέφουμε κατά 90ᵒ το τελευταίο παραλληλόγραμο και το μεταφέρουμε έτσι ώστε να κολλήσει με το τετράγωνο που έχει ακμή $v - u$. Παίρνουμε το τετράγωνο με ακμή $v$ από το οποίο λείπει το τετραγωνάκι με ακμή $u$. Άρα το εμβαδόν είναι $v^2 - u^2$.

# Ήταν τυχαίες οι τριάδες; Γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα οι Βαβυλώνιοι?

Υπάρχουν προβλήματα στις πλάκες τους που κάνουν χρήση του θεωρήματος.

Για παράδειγμα, στην πλάκα BM85196 υπάρχει το παρακάτω πρόβλημα:

«μία κολώνα μήκους 30 στηρίζεται (κάθετα) σε έναν τοίχο. Η επάνω άκρη γλιστράει μία απόσταση 6. Πόσο γλίστρησε η κάτω άκρη?»

Η απάντηση δίνεται ως “η τετραγωνική ρίζα του $30^2 - 24^2$” και υπολογίζεται να είναι 18.

(όταν γλιστρήσει η σκάλα, σχηματίζεται ένα ορθό τρίγωνο, που η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος 24=30-6, ενώ η υποτείνουσα έχει μήκος 30. Υπολογίζουμε το μήκος της βάσης).

# Λύση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων

- Θα συζητηθούν σε επόμενο μάθημα.

# Βιβλιογραφία


- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** http://primeviridian.blogspot.gr/2015/03/ancient-babylonian-mathematics-tablet.html
- **Εικόνα 2:** "**Ybc7289-bw**". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Ybc7289-b2-traced**" by Ybc7289-bw.jpg: Bill Casselmanderivative work: Pmur002 (talk) - Ybc7289-bw.jpg. Licensed under Creative Commons Attribution 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-b2-traced.png#mediaviewer/File:Ybc7289-b2-traced.png

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4,5,6:** "**Ybc7289-bw**". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg
- **Εικόνα 7:** "**Plimpton 322**" by photo author unknown - image copied from http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg#mediaviewer/File:Plimpton_322.jpg

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης