



# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών

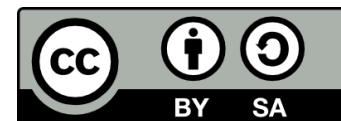




# Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4.1: Διόφαντος και συγκεκριμένη Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ∞ Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- ∞ Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- ∞ Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.



# Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έργο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.



# Τι είναι γινόμενο? (εμβαδόν)



Στον Ευκλείδη δουλεύουμε με ομογενείς ποσότητες:  
για παράδειγμα δεν μπορούμε να προσθέτουμε σε εμβαδόν  
(γινόμενα) διαφορετικού είδους μεγέθη όπως μήκη.



# Διόφαντος ~ 3<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.



DIOPHANTI  
ALEXANDRINI  
ARITHMETICORVM  
LIBRI SEX.

ET DE NUMERIS MULTANGVLIS  
LIBER VNVS.

*Huius primus Graecè et Latinè editi, atque absolutissimis  
Commentariis illustrati.*

AUCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO  
MEZIRIACO SEBVSIANO.V.C.



LVTETIAE PARISIORVM,  
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via  
Iacobæ, sub Ciconiis.

M. DC. XXI.  
CVM PRIVILEGIO REGIÆ

Έργα του:

Αριθμητική (13 βιβλία, σώζονται 6)

Περί πολυγώνων αριθμών.

Πορίσματα.

Εικόνα 1





# Αριθμητική Διόφαντος



## Arithmeticon Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque idem maior 1 N. + 2. Operatur itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adficiunt unitatibus 10. sequatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quaestioni.

### IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS apponitur eadem ratio est quae & apponitur praecedenti quaestioni, nil enim aliud requirit. quoniam ut quadratus interualli numerorum fit minor interuallo quadratorum, & Canonem uicem hic eandem locum habebunt, ut manifestum est.

### QVAESTIO VIII.

PROPOSITUM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum fit ut 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Operatur igitur 16 - 1 Q. aequales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quod continet latus ipsius 16. esse 12 N. - 4. hinc igitur quadratum erit 4 Q. + 16. - 16 N. haec aequabuntur unitatibus 16 - 1 Q. Communis adiciatur utriusque defectus, & a similibus auferantur familia, sient 5 Q. aequales 16 N. & fit 1 N. <sup>2</sup> Erit igitur alter quadratum <sup>11</sup>. alter uero <sup>5</sup> & uariisque summa est 16. & uterque quadratus est.

### OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cum in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis facti diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

### QVAESTIO IX.

RESERUAT operatur quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur prius primi latus 1 N. alterius uero quotquotque numerorum cum defectu tot unitatum, quot constat latus diuidendi. Effo itaque 2 N. - 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille uero 4 Q. + 16. - 16 N. Caeterum uolo utrumque simul aequari unitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. - 16 N. sequatur unitatibus 16. & fit 1 N. <sup>2</sup> erit

Τὸν τετραγώνον τετραγώνῳ διαλῶν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτεταμένῳ δὲ τὸ διπλασι εἰς δύο τετραγώνους καὶ τεταμένῳ ὁ αὐτῶν διαμέγεθος μῆκος, δέσσει ἀπὸ μετὰ δὲ τῶν ἀφ᾽ ἑαυτῶν τετραγώνων ἄλλο εἶναι ἢ τὸ πᾶσι λέγεται ποσῶν μὲ ἕσται ἔξῃ α ἢ τὸ μὲν πλάτος, ἔσται εἰς β λέγεται μὲ δ. αὐτὸς ἀπὸ τῆς ἑξῆς ἔσται διαμέγεθος δ' μὲν εἰς γ λέγεται εἰς ζ. πᾶσι τῶν μετὰ τὸν λέγεται διαμέγεθος μῆκος, κατὰ ἀναγκαῖον α ἢ γ εἶναι ἰσοσυνεταίτων. ὁ δὲ μῆκος εἰσοσυνεταίτων. ἔσται δὲ δύο συμπλήρεις ποσῶν εἰσοσυνεταίτων, ἔσται ἄρα τῶν τετραγώνων.

Εικόνα 2



# Σε ελεύθερη μετάφραση



Παλατινή ανθολογία 8.126(6<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.):

Σ' ΑΥΤΟΝ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ...Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ. Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΜΑ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ. ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ, ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ. ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ, ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ. ΤΙ ΚΡΙΜΑ, ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ, ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ. ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ, Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ, ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.

$$(1/6)n + (1/12)n + (1/7)n + 5 + (1/2)n + 4 = n$$

Λύση:  $n = 84$



# Σύμβολα του Διόφαντου (συγκεκριμένη άλγεβρα) (1)



Διόφαντος	Σήμερα
$\varsigma$	άγνωστος $x$
$\Delta^Y$	$x^2$ (δύναμις)
$K^Y$	$x^3$ (κύβος)
$\Delta^Y\Delta$	$x^4$ (δυναμοδύναμις)
$\Delta K^Y$	$x^5$ (δυναμόκυβος)
$K^Y K$	$x^6$ (κυβόκυβος)
$\varsigma^x$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$ (ειδικές ονομασίες για αντίστροφα)
$\iota\varsigma$	ίσος



# Σύμβολα του Διόφαντου (συγκεκριμένη άλγεβρα) (2)

---

$\Delta := \text{minus}$        $\overset{\circ}{M} := \text{units}$

$$K^{\Upsilon} \alpha \Delta^{\Upsilon} i \gamma \zeta \varepsilon \overset{\circ}{M} \beta = x^3 + 13x^2 + 5x + 2$$

$$K^{\Upsilon} \alpha \zeta \eta \Delta^{\Upsilon} \varepsilon \overset{\circ}{M} \alpha = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$\Delta^{\Upsilon} i \varepsilon \Delta \overset{\circ}{M} \lambda \theta = 15x^2 - 39$$



# Η «Αριθμητική» του Διόφαντου



Η «Αριθμητική» του Διόφαντου είναι συλλογή 150 περίπου προβλημάτων, με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

Από αυτή τη μελέτη:

Λείπει η συστηματική μελέτη των αλγεβρικών πράξεων και η συστηματική μελέτη επίλυσης εξισώσεων.

Δεν γίνεται προσπάθεια εύρεσης όλων των πιθανών λύσεων.

Ο Διόφαντος αναγνωρίζει μόνο τις θετικές ρητές ρίζες αν υπάρχουν δύο θετικές ρίζες, αναγνωρίζει μόνο τη μεγαλύτερη.

Δεν αναγνωρίζει καθόλου τις αρνητικές λύσεις.

Στα αόριστα προβλήματα (με άπειρο αριθμό λύσεων) δίνει μόνο μία απάντηση.



# Τα μεγάλα θετικά του Διόφαντου

(1)  
Ω

---

Τα μεγάλα θετικά (εκτός από τον μερικό συμβολισμό):

Ο Διόφαντος έδωσε κανόνες για μαθηματικές εκφράσεις:

- μεταφορά όρων από το ένα μέρος της εξίσωσης στο άλλο,
- ακύρωση όμοιων όρων από τις δύο πλευρές της ισότητας.

Όρισε αρνητικές δυνάμεις για τους αγνώστους και τους κανόνες για τους εκθέτες.

$$x^n x^m = x^{n+m}, -6 \leq m, n, m + n \leq 6$$



# Τα μεγάλα θετικά του Διόφαντου

(2)

---

Έδωσε κανόνες για το γινόμενα που αφορούν όρους με αρνητικούς συντελεστές: π.χ.  $(-)(-) = +$

Απομάκρυνση από την γεωμετρική άλγεβρα, (οι όροι δεν χρειάζεται να είναι ομογενείς), δουλεύει με δυνάμεις μεγαλύτερες του 3.



# Πρόβλημα I-28 (1)



Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:  
Λύση: Έστω το άθροισμα είναι 20 και το άθροισμα των τετραγώνων είναι 208.

Τότε έστω ότι η διαφορά των δύο αριθμών (του μεγαλύτερου από τον μικρότερο) είναι  $2x$ .

Το 10 είναι το μισό του πρώτου αθροίσματος.

Άρα και ο αριθμός  $x$  είναι 2 ενώ οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 8 και 12.





# Πρόβλημα I-28 (2)



**Ερμηνεία (δική μας):** έστω  $z, y$  οι δύο αριθμοί όπου  $z > y$ .

Αν λοιπόν το  $z$  διαφέρει από το  $y$  κατά  $2x$  τότε αφού

$z + y = 20$  έχουμε ότι  $2z - 2x = 20$  και άρα  $z = 10 + x$ ,  
ενώ  $y = 10 - x$ .

Αντικαθιστούμε  $z$  και  $y$  στη σχέση των τετραγώνων και  
λύνουμε ως προς  $x$ .


$$208 = (x + 10)^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 + 200$$

Επομένως δύο φορές το τετράγωνο του  $x$  είναι 8 άρα  $x$  είναι 2.



# Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (1)

---



(ας θυμηθούμε ότι για λύσεις αναγνωρίζει μόνο θετικούς ρητούς.)

Ξανά το γενικό πρόβλημα: να βρεθούν θετικοί ρητοί  $z$  και  $y$  έτσι ώστε

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

Μέθοδος του Διόφαντου:

$$z = \frac{a}{2} + x, y = \frac{a}{2} - x$$


Αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση:

$$b = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$



# Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (2)

---



Έτσι

$$b = 2 \frac{a^2}{4} + 2x^2$$

$$\text{και } 2x^2 = b - \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{άρα } x^2 = \frac{2b - a^2}{4} \text{ και } x = \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}.$$

Θα έχουμε λύση (σύμφωνα με τον Διόφαντο) όταν

$$x = \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2} \text{ είναι ρητός.}$$

Δηλαδή αν και μόνο αν  $2b - a^2$  είναι τετράγωνο.



# Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (3)



Την συνθήκη αυτή ο Διόφαντος, την δίνει αμέσως μετά την παράθεση του προβλήματος στη γενική μορφή και πριν ξεκινήσει με την λύση της συγκεκριμένης περίπτωσης:

λέει «πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$2 \times 208 - 20^2 = 4^2$$



# Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (4)



Στο γενικό λοιπόν πρόβλημα των δύο εξισώσεων

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

σύμφωνα με τον Διόφαντο, οι λύσεις είναι:

$$z = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}, y = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

αρκεί βέβαια  $2b - a^2$  να είναι τετράγωνο!

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει γεωμετρική μεθοδολογία στις μεθόδους του Διόφαντου.



# Το τελευταίο θεώρημα του Fermat (1993,1995)



$$a^n + b^n = c^n$$



Εικόνα 3

**Pierre de Fermat (1601 -1665)**

Εικόνα 4

**Sir Andrew John Wiles (1953--)**



# Η μαθηματική τέχνη



*Ας παύση η πραγματεία των μαθηματικών. Διότι εάν τις δημοσία ή κατ' ιδίαν, καθ' ημέραν ή νύκτωρ συλληφθή αναστρεφόμενος εν τη απαγορευμένη πλάνη, αμφοτέροι ας πληγούν δια κεφαλικής ποινής. Διότι δεν είναι διάφορον αμάρτημα το διδάσκεσθαι κεκωλυμένα ή το διδάσκειν». Κώδιξ Θεοδοσιανός (Ουαλεντιανού και Ουάλεντος), ΙΧ, 16, 8. (438μ.Χ.)*

*«Οι μαθηματικοί, εάν μή ώσιν έτοιμοι, καυθέντων των κωδίκων της ιδίας πλάνης υπό τα όμματα των Επισκόπων, να δώσουν πίστιν εις την λατρείαν της καθολικής πίστεως, ότι δεν θα επανέλθουν εις την παλαιάν πλάνην, ου μόνον από της πόλεως Ρώμης, αλλά και εκ πασών των πόλεων αποφασίζομεν να εκδιωχθούν. Εάν δε δεν κάμνουν τούτο και παρά την σωτηρίαν απόφασιν της ημετέρας επιεικείας, συλληφθούν εν ταις πόλεσιν· είτε παρεισάγουν τα μυστικά της πλάνης, θα τύχωσι της ποινής της εξορίας». Αυτοκράτορες Ονώριος και Θεοδόσιος προς τον Καικιλιανό Έπαρχο.*

*«Η μαθηματική τέχνη αξιόποινος ούσα απαγορεύεται». Ιουστινιάνειος Κώδιξ, ΙΧ, 18, 2.*



# Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.





# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1: "Diophantus-cover"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-cover.jpg>

☞ **Εικόνα 2: "Diophantus-II-8-Fermat"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)



- ☞ **Εικόνα 3: "Pierre de Fermat"** by This file is lacking author information. - <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre\\_de\\_Fermat.jpg#mediaviewer/File:Pierre\\_de\\_Fermat.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#mediaviewer/File:Pierre_de_Fermat.jpg)
- ☞ **Εικόνα 4: "Andrew wiles1-3"** by "copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J" - [http://www.mozzochi.org/deligne60/Deligne1/\\_DSC0024.jpg](http://www.mozzochi.org/deligne60/Deligne1/_DSC0024.jpg). Via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrew\\_wiles1-3.jpg#mediaviewer/File:Andrew\\_wiles1-3.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrew_wiles1-3.jpg#mediaviewer/File:Andrew_wiles1-3.jpg)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 4: Διόφαντος και  
Αραβικά Μαθηματικά. Ενότητα 4.1: Διόφαντος και συγκεκριμένη  
Άλγεβρα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

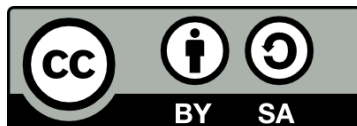
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

