ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.3: Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις και Cardano (Ferrari)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = z - \frac{a}{4} \Rightarrow$$

$$z^4 + ez^2 + fz + g = 0$$

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (1)

ΙΔΕΑ: Αν και από τις δύο μεριές της ισότητας είχαμε τέλεια τετράγωνα τότε θα παίρναμε τις ρίζες τους και θα είχαμε απλούστερες εξισώσεις για x. Προσπαθούμε λοιπόν να κάνουμε δύο τέλεια τετράγωνα. Ας συμμαζέψουμε πρώτα τα x στο αριστερό σκέλος. Προσθέτουμε $6x^2$ (και στα δύο σκέλη) και το πρώτο γίνεται τέλειο τετράγωνο.

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$
$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x \Rightarrow$$
$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x$$

Υπολείπεται βέβαια το δεξιό σκέλος. Θα δοκιμάσουμε να εισάγουμε μία νέα μεταβλητή y μέσα στο τετράγωνο του αριστερού σκέλους έχοντας ως στόχο να δημιουργήσουμε τετράγωνο στο δεξιό σκέλος.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (2)

Η ποσότητα που προστέθηκε στο αριστερό σκέλος έτσι ώστε να έχουμε το τετράγωνο με ακμή $x^2 + 6 + y$ είναι $y^2 + 12y + 2yx^2$. Η ίδια ποσότητα πρέπει να προστεθεί και στο δεξιό σκέλος.

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 6x^2 + 60x + (y^2 + 12y + 2yx^2)$$

Ποια τιμή πρέπει να έχει το y έτσι ώστε

$$(6 + 2y)x^2 + 60x + (y^2 + 12y) = (ax + c)^2$$

Γενικότερα, πότε $Ax^2 + Bx + C = (ax + c)^2$?

Στη περίπτωση αυτή το πολυώνυμο $Ax^2 + Bx + C$ έχει μία διπλή ρίζα.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (3)

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + c)^2 \Leftrightarrow \mathrm{B}^2 - 4AC = 0$$

Αφού $A = 6 + 2y, B = 60, C = y^2 + 12y$ θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

Η συνθήκη: «Διακρίνουσα=0» δίνει την εξίσωση της **επιλύουσας τριτοβάθμιας.**

Τύπος του Cardano για το y --- Mathematica

$$y \to -5 + \frac{1}{3}\left(5130 - 81\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}$$

Για το συγκεκριμένο y θα έχουμε ότι $(\ x^2 +\ r)\ 2 =\ (s\ x\ + t)2$ και άρα $x^2 +\ r\ = sx + t$ που μπορούμε να επιλύσουμε.

Σύμφωνα με την Mathematica η λύση είναι:

$$x \to -\frac{1}{2}\sqrt{-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} -24 - \left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} - 6\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} - \\ 360/\left(\sqrt{\left(-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{1/3} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}\right)}\right) \end{array}\right)}$$

Νέο παράδειγμα (1)

$$x^4 + 3 = 12x \Rightarrow$$

$$x^4 + 3 + (2yx + y^2 - 3) = 12x + (2yx + y^2 - 3)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y)^2 = 2yx^2 + 12x + (y^2 - 3)$$

Επιλύουσα τριτοβάθμια

$$\boldsymbol{2y^3 - 6y - 36 = 0}$$

λύση $\boldsymbol{y = 3}$.

Νέο παράδειγμα (2)

Αντικατάσταση του y:

$$(x^2+3)^2 = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x+1)^2 \Rightarrow$$

Παίρνουμε τετραγωνικές ρίζες και από τα δύο σκέλη

$$x^2 + 3 = \sqrt{6}(x+1) \Rightarrow$$

και επιλύουμε τη δευτεροβάθμια

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}}$$

Υπάρχουν άλλες ρίζες?

Rafael Bombelli (1526-1573) Μηχανικός «Άλγεβρα» 1572


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Εικόνα 1

Bombelli και τριτοβάθμια

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Ο Bombelli έδειξε ότι το 2 ισούται με αυτή την ποσότητα!

Ο συλλογισμός του Bombelli (1)

Έστω ότι $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} = \sqrt{b}+a$, ποια είναι τα b, a?

Τότε: $\left(\sqrt{b}+a\right)^3 = b\sqrt{b}+3ba+3a^2\sqrt{b}+a^3 =$

$$(3a^2+b)\sqrt{b}+(a^3+3ab) = \sqrt{108}+10$$

Επίσης $\left(\sqrt{b}-a\right)^3 = b\sqrt{b}-3ba+3a^2\sqrt{b}-a^3 =$

$$(3a^2+b)\sqrt{b}-(a^3+3ab) = \sqrt{108}-10$$

Δηλαδή

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = \sqrt{b}-a$$

Ο συλλογισμός του Bombelli (2)

Επίσης, αφού

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

προκύπτει αντικαθιστώντας ότι

$$(3a^2 + b)\sqrt{b} + (a^3 + 3ab) = 6\sqrt{3} + 10$$
$$b = 3, 3a^2 + b = 6, a^3 + 3ab = 10$$

και άρα $a = 1$.

Έτσι

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{b} + a = \sqrt{3} + 1$$
$$\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{b} - a = \sqrt{3} - 1$$

Ο συλλογισμός του Bombelli (3)

και επομένως

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)=2$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ τότε ο τύπος του Cardano είναι:

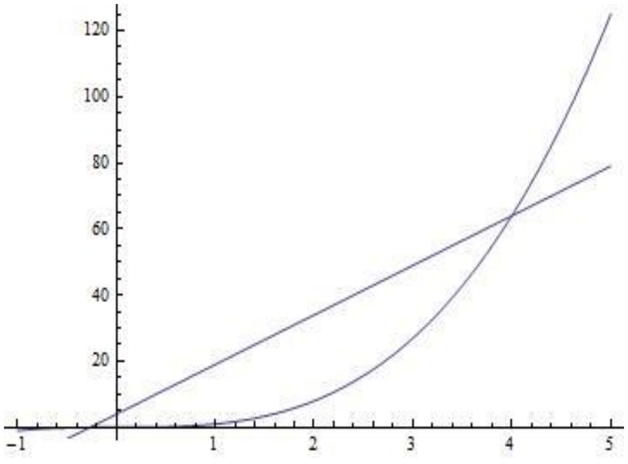
$$\sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}}}$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του Cardano αυτός είναι ένας θετικός αριθμός.

Ο συλλογισμός του Bombelli (4)

Ο Bombelli έδειξε ότι $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ έχει <u>ακριβώς μία</u> θετική πραγματική λύση. Πράγματι αν κοιτάξουμε το γράφημα της καμπύλης x^3 και της γραμμής $cx + d$ βλέπουμε ότι όταν $x = 0$ τότε η καμπύλη έχει την τιμή 0 ενώ η γραμμή την τιμή d αλλά μετά η καμπύλη αυξάνεται με πολύ γρηγορότερο ρυθμό. Άρα για θετικά x η καμπύλη και η γραμμή τέμνονται ακριβώς μία φορά.

Συντεταγμένες και Oresme (14ο αιώνα)



Ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας (1)

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ο Bombelli έκανε πράξεις ακολουθώντας τους κανόνες για τα ριζικά και έδειξε ότι η τιμή (από τον τύπο) του Cardano είναι ίση με το 4.

Αν

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

Τότε

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας (2)

Επίσης προκύπτει ότι

$$a^2 + b = 5$$
$$a^3 - 3ab = 2$$

Όμως αφού $a^2 < 5, a^3 > 2$

Στους ακεραίους η μόνη λύση είναι το $a = 2$ και $b = 1$.

Έπεται ότι

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

Τεράστια Σημασία των λύσεων τρίτου-τετάρτου βαθμού εξισώσεων (1)

Οι λύσεις δεν ήταν αποτέλεσμα πρακτικών υπολογισμών

Οι λύσεις δεν χρησίμευαν στους μηχανικούς.

Προσεγγιστικές λύσεις για αυτές τις εξισώσεις υπήρχαν.

Έδωσαν ώθηση στην αλγεβρική έρευνα προς διάφορες κατευθύνσεις.

Στην Άλγεβρα: προσπάθεια για γενίκευση για εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού.

Ενασχόληση με άλλο είδος αριθμών: τις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών.

Τεράστια Σημασία των λύσεων τρίτου-τετάρτου βαθμού εξισώσεων (2)

Στην εξίσωση $x^3 + cx = d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(d/2)^2 + (c/3)^3} + d/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(d/2)^2 + (c/3)^3} - d/2}$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$x = \sqrt[3]{d/2 + \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}} + \sqrt[3]{d/2 - \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}}$$

Μπορούμε να τους ενοποιήσουμε για τη περίπτωση

$$x^3 + cx + d = 0$$

(χωρίς περιορισμούς στα πρόσημα των c, d);

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Algebra by Rafael Bombelli**" by neznan - Book printed by editor Giovanni Rossi. Licensed under Public domain via Wikimedijina Zbirka

  http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Algebra_by_Rafael_Bombelli.gif#mediaviewer/File:Algebra_by_Rafael_Bombelli.gif

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση. Ενότητα 5.3: Επίλυση της τεταρτοβάθμιας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης