# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 6**: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 6.2**: Μέθοδοι παραγώγισης.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

# Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

# Marin Mersenne (Γαλλία) 1588-1648

Εικόνα 1

«Ινστιτούτο (ανταλλαγής γνώσεων) μαθηματικών»

Πρώτοι αριθμοί του Mersenne

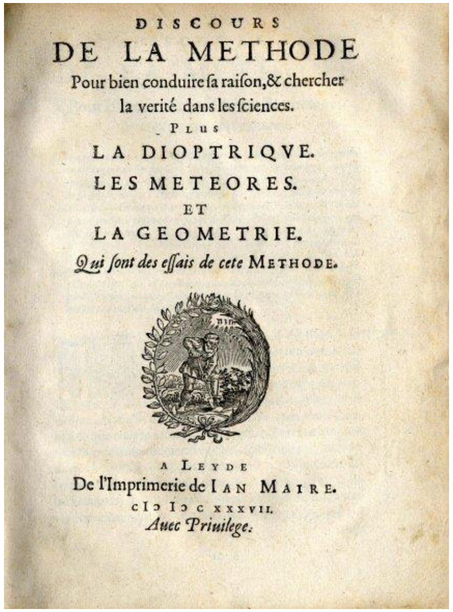
$$2^P - 1$$

# René Descartes (Γαλλία) 1596-1650 φιλόσοφος

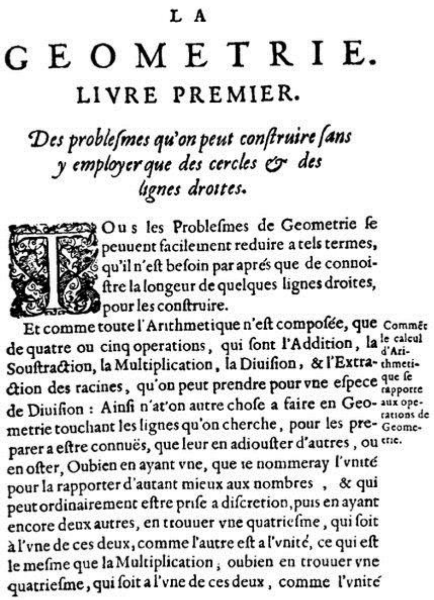
Εικόνα 2

**“Cogito ergo sum”**

# De la Methode


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
*Qui ſont des eſſais de cete* METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
*Auec Priuilege.*


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

*Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.*

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt composée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commét le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Εικόνα 3

**1637**

Εικόνα 4

# Καρτεσιανή γεωμετρία = αναλυτική γεωμετρία

**Καρτεσιανή γεωμετρία = αναλυτική γεωμετρία**

Στόχος του:

«κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του.»

Συστηματική χρήση της συμβολικής άλγεβρας: σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός είναι βασισμένος στον συμβολισμό του Descartes.

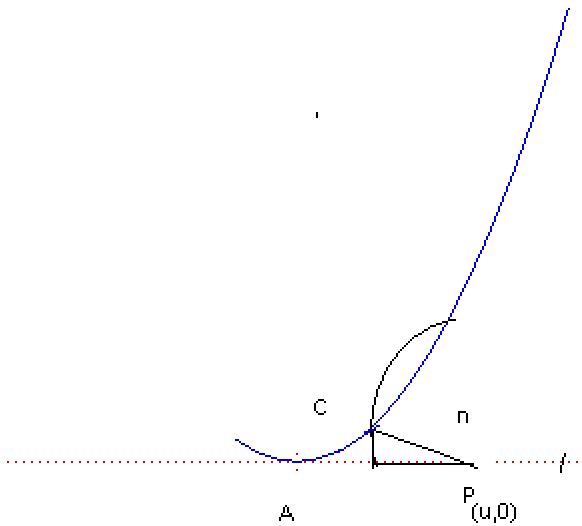
(μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό)

# Descartes και Λογισμός (1)

Το πρόβλημα της εφαπτομένης
(Descartes για την μέθοδό του)

leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie.

# Descartes και Λογισμός (2)




Θα βρούμε το κέντρο P του εφαπτόμενου κύκλου της καμπύλης ACE

$$y = x^2$$

Στο σημείο $C$: $(x_0, x_0^2)$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$n^2 = y^2 + (v - x)^2$$

Τα σημεία τομής του κύκλου και της παραβολής προκύπτουν από τηνα αντικατάσταση του , δηλαδή από την εξίσωση

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = 0$$

# Descartes και Λογισμός (3)

Η εξίσωση αυτή θα έχει διπλή ρίζα στο $x_0$ αν

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = (x - x_0)^2 q(x)$$

Άρα

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = (x - x_0)^2 (x^2 + ax + b)$$

Και επομένως

$$a - 2x_0 = 0$$

$$b - 2x_0 a + x_0^2 = 1$$

# Descartes και Λογισμός (4)

$$ax_0^2 - 2bx_0 = -2v$$
$$bx_0^2 = v^2 - n^2$$

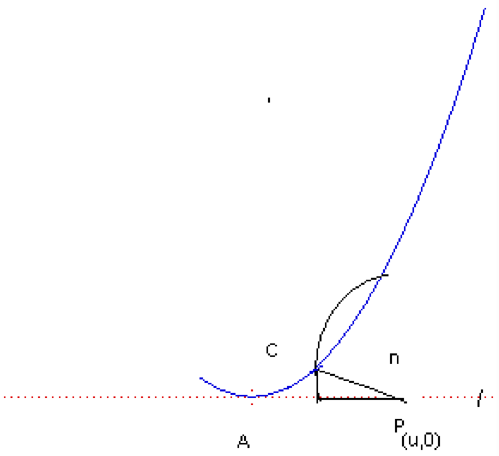
Άρα $$v = 2x_0^3 + x_0.$$

και η κλίση της ακτίνας του κύκλου είναι

$$\frac{-y_0}{v - x_0} = \frac{-x_0^2}{2x_0^3} = \frac{-1}{2x_0}$$

ενώ η κλίση της εφαπτομένης είναι $2x_0$.

Πράγματι η παράγωγος του $y = x^2$ στο $x_0$ είναι $2x_0$.

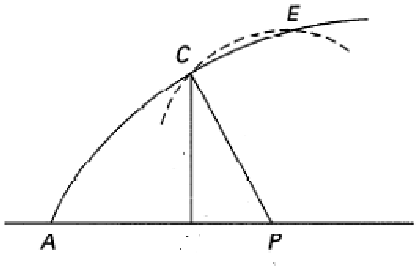


# Descartes και Λογισμός (5)

**Στη μέθοδό του ο Descartes βρισκει την  κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη της  καμπύλης**

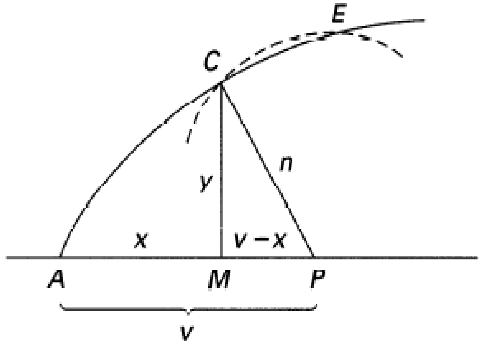
Βρίσκει τον κύκλο (δηλ. το κέντρο του κύκλου) που εφάπτεται της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο.

Η  ακτίνα του κύκλου είναι η ζητούμενη κάθετος.




Ο κύκλος έχει την ιδιότητα να τέμνει τη καμπύλη ακριβώς σε ένα σημείο. Τοποθετεί τον κύκλο σε άξονα συντεταγμένων.

# Descartes και Λογισμός (6)




Ο άξονας των $x$ είναι η ευθεία AP. $x$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα AM. Αν $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της καμπύλης τότε το σημείο C πάνω στη καμπύλη ACE απέχει $y$ από την ευθεία AP.

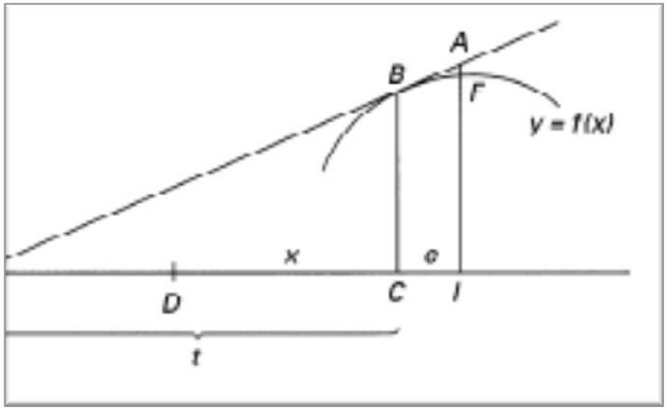
Ο κύκλος με κέντρο P: το ευθύγραμμο τμήμα AP έχει μήκος $v$ και το P απέχει απόσταση 0 από τον άξονα των $x$, δηλαδή $P$: $(v, 0)$. Η ακτίνα $n = PC$ δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το $n$ καθορίζεται από το $v$, αφού η μία πλευρά του τριγώνου είναι $v - x$, και η άλλη πλευρά είναι $y = f(x)$. Ψάχνουμε να βρούμε το $v$.

# Pierre de Fermat (Γαλλία) 1601-1665 δικηγόρος

Εικόνα 5

Ουσιαστική συμβολή στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας με τη μελέτη:
Ad locos planos et solidos isagoge
(1636, χειρόγραφο)
Ημερομηνία δημοσίευσης: 1679

# Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (1)



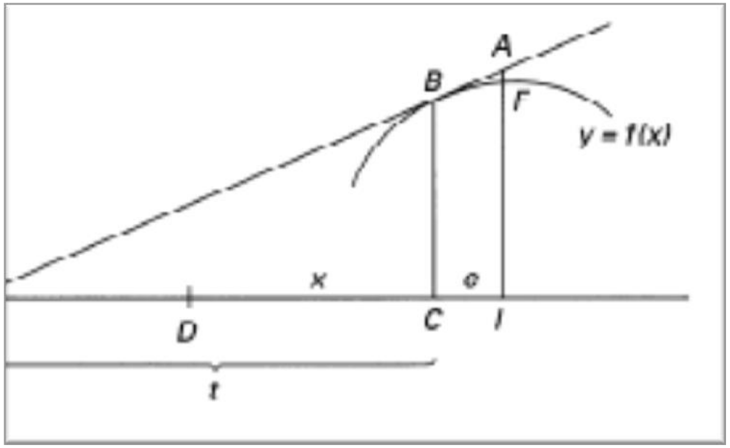

ΙΔΕΑ: Έστω B το σημείο της καμπύλης $y = f(x)$, και A πάνω στην εφαπτομένη. Αν το A είναι πολύ κοντά στο B και F είναι το σημείο τομής της καμπύλης και του ευθ. τμήματος AI (που είναι κάθετο στον άξονα των $x$) τότε AI είναι σχεδόν ίσο με το FI.

Θέλουμε να βρούμε την κλίση της EA, δηλ. το BC/EC.

Το τμήμα EC έχει μήκος $t$, (το $t$ είναι άγνωστο.)

Τονίζουμε ότι ο άξονας των $x$ είναι η ευθεία EC και ότι το τμήμα DC έχει μήκος $x$.
Το τμήμα BC έχει μήκος $f(x)$.

# Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (2)




Από τα όμοια τρίγωνα AEI και BEC προκύπτει ότι

FI/BC είναι σχεδόν ίσο με EI/EC.

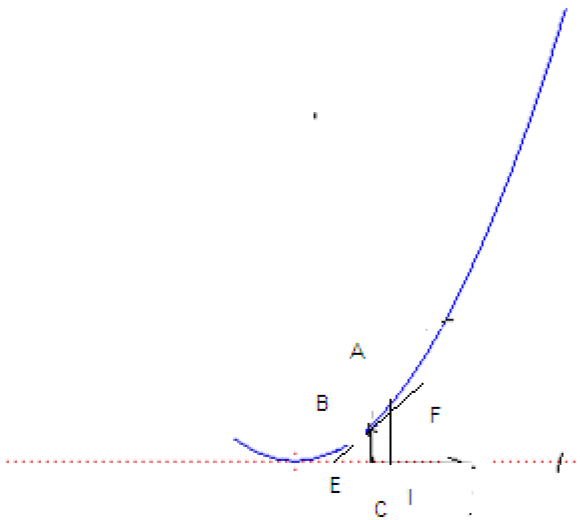
Όταν λοιπόν το e είναι πολύ μικρό τότε

$f(x+e)/f(x)$ **είναι σχεδόν ίσο με** $(t+e)/t$

και επομένως

$t\ f(x+e)$ **είναι σχεδόν ίσο με** $(t+e)\ f(x)$.

# Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (3)




Θα βρούμε την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $f(x) = x^2$ στο σημείο B: $(x_0, x_0^2)$

Αφού $\frac{f(x_0+e)}{f(x)} \approx \frac{t+e}{t}$

έπεται ότι

$$tf(x_0 + e) \approx (t + e)f(x_0)$$

και

$$tx_0^2 + 2tx_0e + te^2 \approx tx_0^2 + ex_0^2$$

Άρα $2tx_0e + te \approx x_0^2$

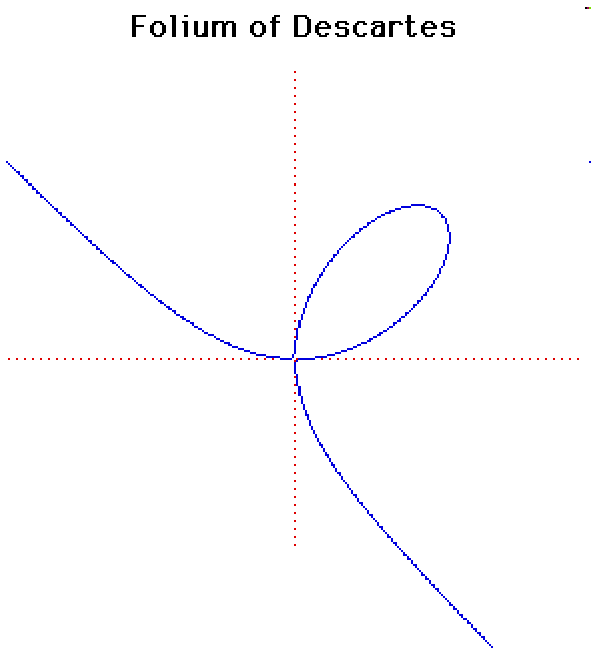
και αν θέσουμε $e = 0$ βρίσκουμε ότι $2t = x_0$. Άρα η κλίση της εφαπτομένης είναι $\frac{x_0^2}{t} = 2x_0$.

# Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (4)

Ισοδυναμεί η μέθοδος του Fermat με την εύρεση του ορίου

$$\lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$

# Η καμπύλη του Descartes (1638)




Η καμπύλη του Descartes (1638)
και η πρόκληση
στον Fermat να βρει την
εφαπτομένη.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

# Βιβλιογραφία


- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Marin mersenne**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Marin_mersenne.jpg#mediaviewer/File:Marin_mersenne.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Frans Hals - Portret van René Descartes**" by After Frans Hals (1582/1583–1666) - André Hatala [e.a.] (1997) De eeuw van Rembrandt, Bruxelles: Crédit communal de Belgique, ISBN 2-908388-32-4.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#mediaviewer/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3**: "**Descartes Discours de la Methode**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg#mediaviewer/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg
- **Εικόνα 4**: “La dioptrique”, “Les meteores”, “La geometrie” "GeometryDescartes" by Original uploader was User:Caton at [1] - Originally from fr.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeometryDescartes.JPG#mediaviewer/File:GeometryDescartes.JPG

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 5**: "**Pierre de Fermat**" by This file is lacking author information. - http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#mediaviewer/File:Pierre_de_Fermat.jpg

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.2: Μέθοδοι παραγώγισης. ». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης