



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
εκένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.2: Επιλύουσες και μεταθέσεις

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

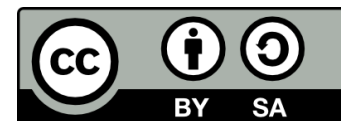


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



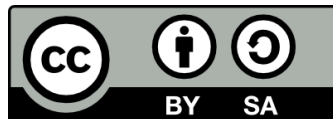
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ↬ Εισαγωγή.
- ↬ Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- ↬ Galois και Θεωρία Ομάδων.
- ↬ Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- ↬ Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- ↬ Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- ↬ Emily Noether.



Σκοποί Ενότητας



Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.



Κλασσική Άλγεβρα και Lagrange



Εύρεση μεθόδων για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων:

Περιπτώσεις ανάλογα με το βαθμό του πολυωνύμου.

Βαθμός **2**: μέθοδοι ήταν γνωστές από την εποχή των Βαβυλωνίων (1600 π.Χ.).

Βαθμός **3** και **4**: μέθοδοι δόθηκαν στα μισά του 16^{ου} αιώνα.

Βαθμός **5**: το επόμενο κύριο πρόβλημα για τους επόμενους δύο αιώνες.

Αυτό ήταν και το θέμα της εργασίας του Lagrange (1770)

«Reflexions sur la resolution algebriques des equations»



Joseph-Louis Lagrange



RÉFLEXIONS

sur la

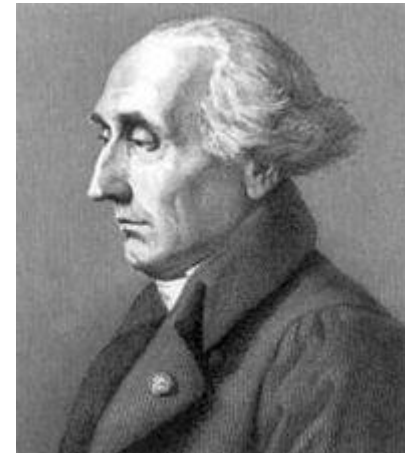
RÉSOLUTION ALGÈBRE DES ÉQUATIONS (*).

[Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1770 et 1771 (**).]

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en fait beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles un rapport donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc. On a aussi découvert des règles générales pour reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles ou non, et pour savoir dans le premier cas combien il doit y en avoir de positives et de négatives; mais on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour connaître

(*) Ce Mémoire a été lu à l'Académie dans le cours de l'année 1771.

(**) Les deux premières Sections de ce Mémoire ont été insérées dans le volume de 1770, les suivantes dans le volume de 1771. [Note de l'Éditeur.]



Joseph-Louis Lagrange

1736-1813

Εικόνα 2

Εικόνα 1



Lagrange και αλγεβρική επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων



Ο Lagrange ανέλυσε τις διάφορες μεθόδους για την αλγεβρική επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού 3 και 4 που είχαν δοθεί (πέρα από τους Ιταλούς) από τους Viète, Descartes, Euler, Bezout.

Αντιλήφθηκε ότι το κοινό στοιχείο αυτών των μεθόδων είναι η αναγωγή του προβλήματος σε ένα πρόβλημα εύρεσης ριζών μίας βοηθητικής πολυωνυμικής εξίσωσης:

- όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 3 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 2.
- όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 4 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 3.



Τύπος του Cardano



$$x^3 + cx = d$$

Αν u, v τέτοια ώστε

$$u - v = d, uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$$

τότε

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

είναι ρίζα της εξίσωσης.

Η βοηθητική επιλύουσα είναι

$$u^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = du$$



Επιλύουσα εξίσωση (1)



Έστω ότι η $f(x)$ έχει ρίζες a_1, \dots, a_n τις οποίες προσπαθούμε να βρούμε αλγεβρικά.

Βρίσκουμε την κατάλληλη συνάρτηση $R(x_1, \dots, x_n)$ και υπολογίζουμε τις διάφορες τιμές της, όταν στην θέση των x_i θέσουμε τα a_i με κάθε δυνατό τρόπο. (Εμφάνιση της ιδέας της μετάθεσης ριζών).

Έστω y_1, \dots, y_k οι διαφορετικές τιμές της $R(x_1, \dots, x_n)$. Τότε η επιλύουσα εξίσωση είναι

$$g(x) = (x - y_1) \dots (x - y_k)$$

Ο βαθμός της $g(x)$ είναι ίσος με k . Το ζητούμενο είναι να είναι το k μικρότερο από τον βαθμό της $f(x)$.



Επιλύουσα εξίσωση (2)



Οι συντελεστές του $g(x)$ εξαρτώνται από τα y_i , τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από τις ρίζες a_i και τελικά από τους συντελεστές του $f(x)$. Το να βρεθεί η επιλύουσα εξίσωση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία.

Έστω $\deg f(x) = 4$ και a_1, \dots, a_4 οι ρίζες του $f(x)$.

Διαλέγουμε

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$$

Υπάρχουν $4! = 24$ μεταθέσεις των 4 ριζών, δηλαδή πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$

για τις ρίζες 24 φορές. Για παράδειγμα



Επιλύουσα εξίσωση (3)



- $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 a_2 + a_3 a_4$
- $R(a_2, a_3, a_4, a_1) = a_2 a_3 + a_1 a_4$
- $R(a_3, a_4, a_1, a_2) = a_3 a_4 + a_1 a_2$
- $R(a_4, a_1, a_2, a_3) = a_1 a_4 + a_2 a_3$
- $R(a_1, a_3, a_2, a_4) = a_1 a_3 + a_2 a_4$
- κ.ο.κ.ε.

$$(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)$$

και μπορούμε να ελέγξουμε ότι τελικά υπάρχουν μόνο 3 διαφορετικές τιμές.
Έτσι ο βαθμός της επιλύουσας είναι 3.



Θεώρημα του Lagrange



Ο Lagrange απέδειξε ότι ο βαθμός k της επιλύουσας ενός πολυωνύμου βαθμού n διαιρεί το $n!$. (αντιστοιχεί στο Θεώρημα του Lagrange.)

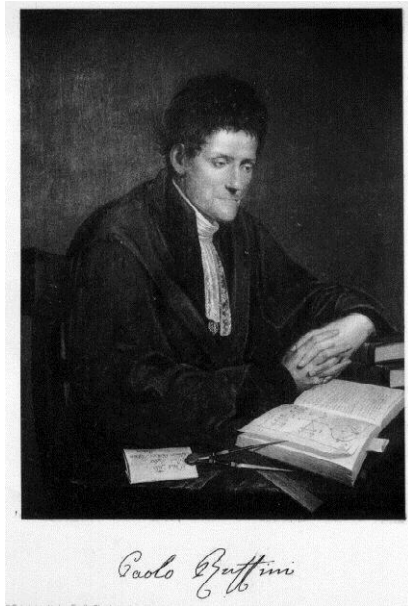
Επίσης απέδειξε ότι αναγκαία συνθήκη για την επίλυση της εξίσωσης βαθμού n είναι η ύπαρξη κάποιας επιλύουσας βαθμού $<n$.

Όταν επιχείρησε για την εξίσωση βαθμού 5 βρήκε μόνο επιλύουσες βαθμού 6.

Η συνέχεια με Ruffini, Abel και Galois...



Ruffini (1799) και Abel (1824)



Paolo Ruffini 1765-1822

Εικόνα 3



Niels Abel 1802-1829

Εικόνα 4



Ruffini και Abel



Ο Ruffini (1799) και ο Abel (1824) έδειξαν ότι δεν υπάρχουν επιλύουσες εξισώσεις βαθμού μικρότερου του n όταν ο βαθμός της αρχικής εξίσωσης n είναι >4 . Το έργο τους συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των μετασχηματισμών.

Η απόδειξη του Ruffini είχε λάθη.



Cauchy 1789 -1857



Εικόνα 5

Ο Cauchy μελέτησε το έργο του Ruffini και συνέβαλε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της θεωρίας των μεταθέσεων.



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1:** <http://www.history.mcs.stand.ac.uk/Bookpages/Lagrange9.gif>

☞ **Εικόνα 2:** "Lagrange portrait". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lagrange_portrait.jpg#mediaviewer/File:Lagrange_portrait.jpg

☞ **Εικόνα 3:** "Ruffini paolo" by This file is lacking author information. - <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates67/opciones/sabias/Ruffinni/Ruffinni.htm>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ruffini_paolo.jpg#mediaviewer/File:Ruffini_paolo.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)



- ☞ **Εικόνα 4:** "Niels Henrik Abel2" by Johan Gørbitz - English Wikipedia (en:Image:Niels Henrik Abel2.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niels_Henrik_Abel2.jpg#mediaviewer/File:Niels_Henrik_Abel2.jpg
- ☞ **Εικόνα 5:** "Augustine Cauchy" by Unknown - Taken from a book.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustine_Cauchy.jpg#mediaviewer/File:Augustine_Cauchy.jpg



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη
Άλγεβρα. Ενότητα 9.2: Επιλύουσες και μεταθέσεις». Έκδοση: 1.0.
Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

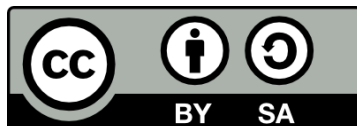
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

