



# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.4: Οι ομάδες στο έργο του Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ↬ Εισαγωγή.
- ↬ Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- ↬ Galois και Θεωρία Ομάδων.
- ↬ Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- ↬ Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- ↬ Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- ↬ Emily Noether.



# Σκοποί Ενότητας



☞ Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.



# Πίσω στο ξεκίνημα της Θεωρίας Ομάδων

---



Gauss  
1777-1855

Εικόνα 1



# Θεωρία Αριθμών και Gauss



Στο έργο του «Disquisitiones...» (1801) βρίσκονται οι απαρχές της θεωρίας των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Οι ομάδες εμφανίζονται σε 4 μορφές:

1. ακέραιοι modulo  $m$ ,
2. ακέραιοι που είναι πρώτοι προς το  $m$ , modulo  $m$ ,
3. κλάσεις ισοδυναμίας διγραμμικών συναρτήσεων βαθμού 2,
4. το σύνολο των  $n$ -στών ριζών της μονάδας.





# Gauss και ιδιότητες των ομάδων



Ο Gauss απέδειξε σημαντικές ιδιότητες των ομάδων (χωρίς όμως να χρησιμοποιήσει την ορολογία της θεωρίας ομάδων).

Παραδείγματος χάριν έδειξε ότι οι μη μηδενικοί ακέραιοι *modulo*  $p$  είναι δυνάμεις ενός στοιχείου, δηλαδή ότι

$$\mathbb{Z}_p^* = \langle a \rangle$$

Και ότι ο αριθμός των στοιχείων *modulo*  $p$  που μπορούν να παράγουν όλα τα υπόλοιπα είναι ίσος με  $\varphi(p - 1)$ .



# Gauss και διγραμμική μορφή



Μια διγραμμική μορφή βαθμού 2 είναι μία έκφραση  $f(x, y)$  έτσι ώστε

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Το κύριο ερώτημα εκείνης της εποχής ήταν να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι  $m$  που να είναι δυνατόν να γραφούν με τον εξής τρόπο

$$f(x, y) = m$$

για κατάλληλα  $x, y$ . Ο Gauss απέδειξε ότι μπορεί να οριστεί σύνθεση τέτοιων μορφών και ότι αυτή η σύνθεση αντιστοιχεί σε «πράξη στοιχείων μίας αντιμεταθετικής ομάδας».



# Gauss και αφηρημένη ομάδα



Ο Gauss δεν φαίνεται να είχε την έννοια της αφηρημένης ομάδας.

Παρόλο που οι τεχνικές του ήταν γενικές, αντιμετώπισε την κάθε περίπτωση ομάδας (από τις 4 που εμφανίζονται στη δουλειά του) χωριστά.

Δεν είχε μία μέθοδο που να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις.



# Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1:** "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl\\_Friedrich\\_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl\\_Friedrich\\_Gauss.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη  
Άλγεβρα. Ενότητα 9.4: Οι ομάδες στο έργο του Gauss». Έκδοση: 1.0.  
Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

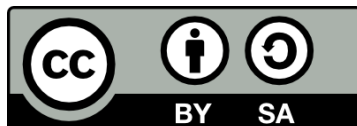
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.







# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

