



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 10: Γραμμική Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 10.1: Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής
άλγεβρας

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



☞ Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής άλγεβρας.



Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή γίνεται μία σύντομη ιστορική επισκόπηση των βασικών εννοιών της γραμμικής άλγεβρας, ξεκινώντας από την επίλυση γραμμικών συστημάτων στην αρχαιότητα, έως την εμφάνιση του όρου «γραμμική άλγεβρα» (όπως χρησιμοποιείται σήμερα) στα μέσα του περασμένου αιώνα.



Βασικές Έννοιες τη Γραμμικής Άλγεβρας



- ∞ Πίνακες
- ∞ Γραμμικές εξισώσεις
- ∞ Ορίζουσες
- ∞ Διανυσματικοί χώροι
- ∞ Γραμμική ανεξαρτησία
- ∞ Διάσταση
- ∞ Διγραμμικές μορφές
- ∞



Γραμμικά συστήματα και πίνακες: η αρχή



- ∞ Περίπου το 300 π.Χ. οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι έλυναν προβλήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
- ∞ Οι Κινέζοι ανάμεσα στο 200 π.Χ. με 100 π.Χ. χρησιμοποίησαν πίνακες, π.χ. στα «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (Δυναστείας Han). (Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν είναι ουσιαστικά η μέθοδος του Gauss).



Cardano



☞ Ο Cardano στο βιβλίο του *Ars Magna* (το Μεγάλο Έργο) το 1545 δίνει έναν κανόνα που είναι ουσιαστικά ο κανόνας του Cramer για την επίλυση 2 εξισώσεων, προσεγγίζοντας την έννοια της ορίζουσας.

Εικόνα 1



Seki



Στην Ιαπωνία ο Seki το 1683 έγραψε την «μέθοδος επίλυσης των απόκρυφων προβλημάτων» όπου εισήγαγε τις ορίζουσες και έδωσε μεθόδους για τον υπολογισμό τους (χωρίς όμως να τις ορίσει ως αυτόνομη έννοια).

1642 – 1708
Ιαπωνία
Εικόνα 2

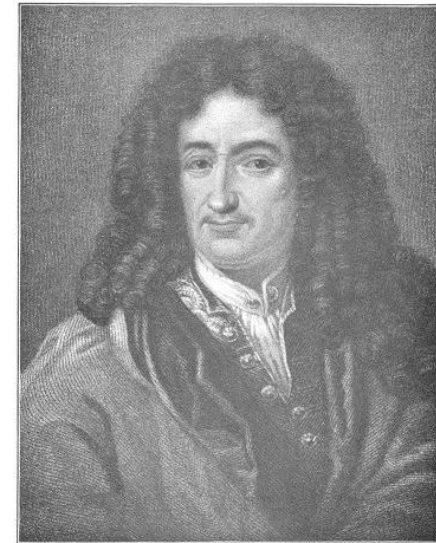


Leibniz



☞ Την ίδια ακριβώς ημερομηνία (1683) στην Ευρώπη ο Leibniz σε ένα γράμμα του στον de L'Hospital εξηγούσε τη συνθήκη στην ορίζουσα (χωρίς να την ονομάζει έτσι) για να είναι συμβατό ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Δούλεψε σε αυτά από το 1678 και μετά, ως το τέλος της ζωής του. Στα κείμενά του έδειχνε διάφορους τρόπους για τον υπολογισμό της ορίζουσας.

1646 – 1716
Γερμανία
Εικόνα 3



Cramer



☞ Ο Cramer το 1750 δίνει τον γενικό κανόνα που είναι σήμερα γνωστός με το όνομά του για τη λύση ενός $n \times n$ συστήματος. Η προσπάθειά του ήταν να βρει την εξίσωση μίας καμπύλης που περνάει από δεδομένο αριθμό σημείων.

1704-1752
Ελβετία
Εικόνα 4



Ορίζουσες



Bezout (1764)
1730-1783 Γαλλία
Εικόνα 5



Laplace (1772)
(διακρίνουσα=ορίζουσα)
Εικόνα 6



Vandermonde
(1771)
1735 - 1796

1749 – 1827
Γαλλία



Maclaurin



☞ Ο Maclaurin έγραψε το 1730 την «πραγματεία της άλεβρας». Αυτή εκδόθηκε το 1748 και περιέχει τα πρώτα δημοσιευμένα αποτελέσματα πάνω στις ορίζουσες.

1698 - 1746
Σκωτία
Εικόνα 7



Gauss (1)



☞ Το 1801 στην εργασία του *Disquisitiones arithmeticae* εξετάζει τετραγωνικές μορφές και εισάγει τον όρο «ορίζουσα». Γράφει τους συντελεστές μίας τετραγωνικής μορφής σε τετράγωνους πίνακες, περιγράφει τον πολλαπλασιασμό πινάκων ως σύνθεση συναρτήσεων-μορφών, και αντιστρόφους.



1777-1855
Γερμανία
Εικόνα 8



Gauss (2)



☞ Χρησιμοποιεί τη μέθοδο απαλοιφής για τη μελέτη της τροχιάς του αστεροειδούς Αθηνά, σε ένα σύστημα με 6 εξισώσεις και 6 αγνώστους.



Εικόνα 9



Cauchy



- ☞ ορίζουσα- θεώρημα πολλαπλασιασμού (1812)
- ☞ όρο «πίνακα» (array) (1826)
- ☞ ιδιοτιμές
- ☞ διαγωνιοποίηση πινάκων.
- ☞ ιδιότητες ομοίων πινάκων.



Εικόνα 10



Jacobi - Kronecker - Weierstrass



Jacobi (1841)
1804-1851
Εικόνα 11



Kronecker (1850)
1823 – 1891
Εικόνα 12



Weierstrass (1860)
1815-1897
Εικόνα 13



Cayley και Sylvester

Μαθηματικοί και Δικηγόροι



- ↻ Ο όρος «matrix» (μητρώο) πρωτοεισήχθηκε από τον Sylvester το 1850.
- ↻ Cayley είχε δημοσιεύσει στο θέμα των οριζουσών από το 1841. Το 1858 αφού συνάντησε τον Sylvester δημοσίευσε το «Μνημόνιο στη θεωρία των πινάκων»



Sylvester - Cayley



Sylvester

1814-1897

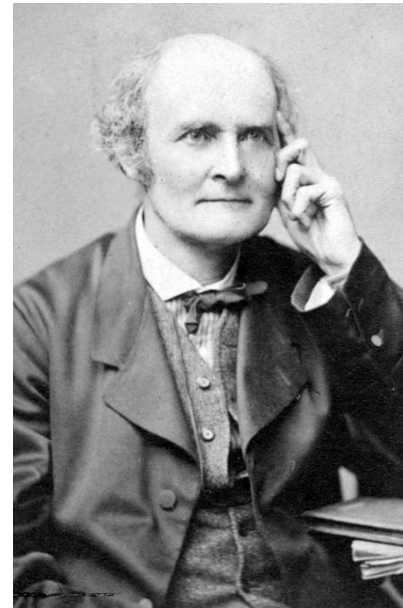
Εικόνα 14



Cayley

1821-1895

Εικόνα 15



Cayley



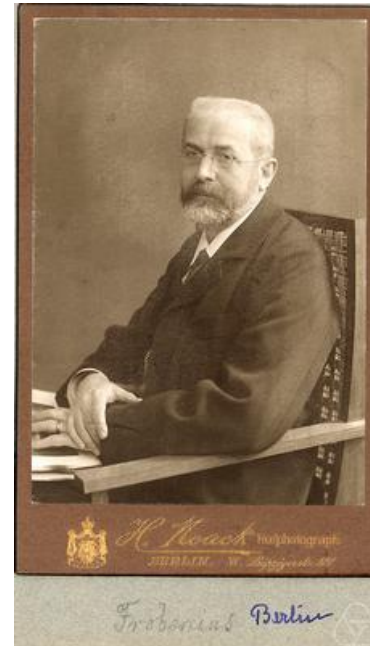
- ↻ Ο Cayley εισήγαγε τον συμβολισμό $|A|$ για την ορίζουσα του A .
- ↻ Συνένωσε τα προηγούμενα αποτελέσματα.
- ↻ Όρισε την άλγεβρα των πινάκων ορίζοντας την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό και τα αντίστροφους πινάκων.
- ↻ Απέδειξε ότι οι 2×2 πίνακες ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση και το έλεγξε για 3×3 .



Frobenius



- ↻ Βαθμίδα πίνακα (1878)
1849-1817 Γερμανία
- ↻ Κάθε πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση (1878)
- ↻ Το μετονόμασε Θεώρημα των Cayley-Hamilton αφού διάβασε το βιβλίο του Cayley (1896)



Εικόνα 16



Θεωρία των οριζουσών σε αξιωματική βάση



☞ Το 1903 μετά τον θάνατό τους δημοσιεύτηκαν δύο εργασίες, των Weierstrass και Kronecker που έθεταν την θεωρία των οριζουσών σε αξιωματική βάση.



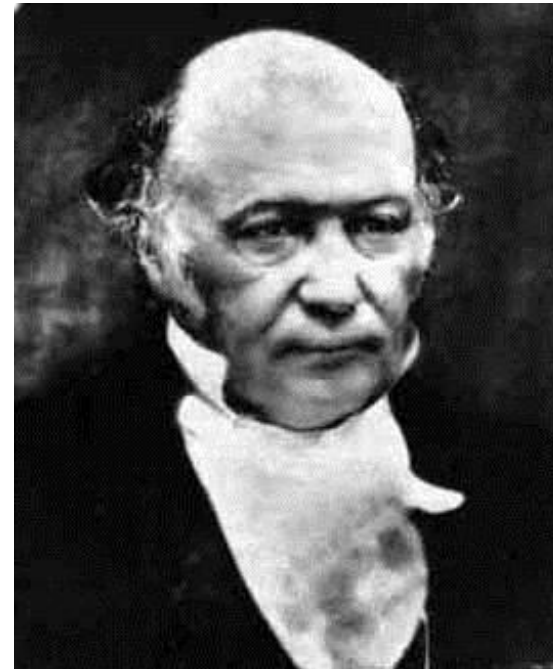
Διάνυσμα



1805-1865

Εικόνα 17

- ∞ Cayley (1843 διάσταση)
- ∞ Hamilton (1843: τετράδες του Hamilton---όρο διάνυσμα)



Grassman



℞ (1844)

℞ Εννοιες n -διάστατου
διανυσματικού χώρου

℞ Υποχώρου

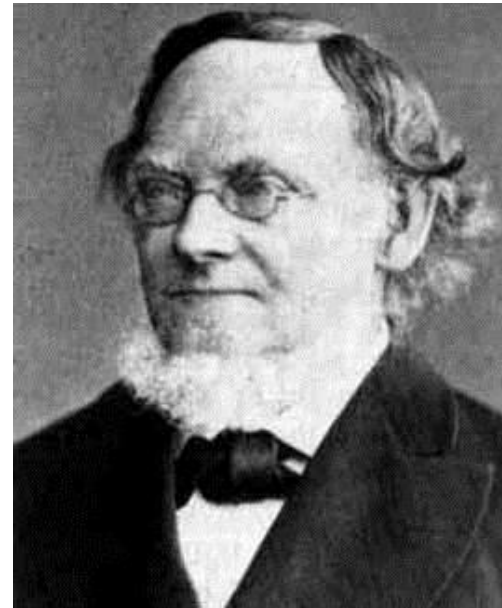
℞ Βάσης

℞ Διάστασης

℞ Γραμμικού
μετασχηματισμού

1809-1877

Εικόνα 18



Peano



☞ Ο Peano το 1888 επηρεάστηκε από τον Grassman και έδωσε τον αξιωματικό ορισμό διανυσματικού χώρου πάνω από τους πραγματικούς και απέδειξε διάφορα θεωρήματα για τη διάσταση. Όμως οι ιδέες του δεν έγιναν άμεσα αποδεκτές.

1858-1932

Ιταλία

Εικόνα 19



Διανυσματικοί Χώροι (1)



Weyl (1918) Θεωρία της σχετικότητας,
(γεωμετρία)
1885-1955 Γερμανία
Εικόνα 20



Banach (1920) μοντέρνα μορφή,
(ανάλυση)
1892-1945 Αυστρία
Εικόνα 21



Διανυσματικοί Χώροι (2)



☞ Emmy Noether 1921

(άλγεβρα)

1882-1935



Εικόνα 22



Διανυσματικοί Χώροι (3)



☞ Van der Waerden στο κλασσικό του βιβλίο *Modern Algebra* (1930), έχει κεφάλαιο με τίτλο *Linear Algebra*, όπου ο όρος χρησιμοποιείται όπως και σήμερα.



1903-1996
Ολλανδία
Εικόνα 23



Το πρώτο διδακτικό βιβλίο προπτυχιακής μοντέρνας γραμμικής άλγεβρας (?)



1955 Mirsky

«An introduction to linear
algebra»

1918-1983



Εικόνα 24



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1:** "Cardano" by Gerolamo Cardano (1501-1576) - <http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Cardano.jpg> (de:Benutzer:ChristianGruchow). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cardano.jpg#mediaviewer/File:Cardano.jpg>
- ☞ **Εικόνα 2:** "Seki" by upload by F. Lembrez - <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history>. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Seki.jpeg#mediaviewer/File:Seki.jpeg>
- ☞ **Εικόνα 3:** "Wag gottfried wilhelm leibnitz" by William Anthony Granville, Ph.D., LL.D. - Elements of the Differential and Integral Calculus (revised), The Athenæum Press, Ginn and Company, Boston, U.S.A., 1911.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons -



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg#mediaviewer/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg

- ☞ **Εικόνα 4:** "Gabriel Cramer" by Original uploader was Bobbyfossil at en.wikipedia - Transferred from en.wikipedia; transfer was stated to be made by User:Calle.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gabriel_Cramer.jpg#mediaviewer/File:Gabriel_Cramer.jpg
- ☞ **Εικόνα 5:** "Etienne Bezout2" by Unknown - <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Bezout.html>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Etienne_Bezout2.jpg#mediaviewer/File:Etienne_Bezout2.jpg
- ☞ **Εικόνα 6:** "Pierre-Simon-Laplace (1749-1827)". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon-Laplace_\(1749-1827\).jpg#mediaviewer/File:Pierre-Simon-Laplace_\(1749-1827\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg#mediaviewer/File:Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg)



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)



- ☞ **Εικόνα 7:** "Colin Maclaurin (Buchan-Ferguson)". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Colin_Maclaurin_\(Buchan-Ferguson\).jpg#mediaviewer/File:Colin_Maclaurin_\(Buchan-Ferguson\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Colin_Maclaurin_(Buchan-Ferguson).jpg#mediaviewer/File:Colin_Maclaurin_(Buchan-Ferguson).jpg)
- ☞ **Εικόνα 8:** "Bendixen - Carl Friedrich Gauß, 1828" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen -
_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen -
_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg)
- ☞ **Εικόνα 9:** "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)



- ☞ **Εικόνα 10:** "Augustin-Louis Cauchy 1901" by Public domain - Library of Congress Prints and Photographs Division. From an illustration in: Das neunzehnte Jahrhundert in Bildnissen / Karl Werckmeister, ed. Berlin : Kunstverlag der photographische gesellschaft, 1901, vol. V, no. 581.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg#mediaviewer/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg
- ☞ **Εικόνα 11:** "Carl Jacobi" by Unknown -<http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/explore.htm> (reworked). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Jacobi.jpg#mediaviewer/File:Carl_Jacobi.jpg
- ☞ **Εικόνα 12:** "Leopold Kronecker 1865" by Unknown - <http://www.britannica.com/EBchecked/media/28346/Kronecker-1865>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leopold_Kronecker_1865.jpg#mediaviewer/File:Leopold_Kronecker_1865.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)



- ☞ **Εικόνα 13:** "Karl Weierstrass". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass.jpg#mediaviewer/File:Karl_Weierstrass.jpg
- ☞ **Εικόνα 14:** "James Joseph Sylvester" by from:<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Untitled04.jpg>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_Joseph_Sylvester.jpg#mediaviewer/File:James_Joseph_Sylvester.jpg
- ☞ **Εικόνα 15:** "Arthur Cayley" by <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cayley.html>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthur_Cayley.jpg#mediaviewer/File:Arthur_Cayley.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)



- ☞ **Εικόνα 16:** "GeorgFrobenius" by Furfur - (de): Oberwolfach Photo Collection, aus einem Fotoalbum der Mathematischen Gesellschaft (Hamburg)(en): Oberwolfach Photo Collection, from a photo album of the Mathematische Gesellschaft (Hamburg). Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons-
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeorgFrobenius.jpg#mediaviewer/File:GeorgFrobenius.jpg>
- ☞ **Εικόνα 17:** "WilliamRowanHamilton" by Unknown - <http://mathematik-online.de/F77.htm>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons -
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg>
- ☞ **Εικόνα 18:** "Hermann Graßmann" by Unknown - <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Grassmann.jpeg>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons -
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Gra%C3%9Fmann.jpg#mediaviewer/File:Hermann_Gra%C3%9Fmann.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)



- ☞ **Εικόνα 19:** "Giuseppe Peano" by Unknown - School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland [1]. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg#mediaviewer/File:Giuseppe_Peano.jpg
- ☞ **Εικόνα 20:** "Hermann Weyl ETH-Bib Portr 00890" by ETH Zürich - ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg#mediaviewer/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg
- ☞ **Εικόνα 21:** "عالم الرياضيات البولندي ستيفان بناخ" by Hussein abdulhakim - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%D8%B9%D8%A7%D9%84%D9%85_%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA_%D8%A7%D9%84%D8%A8%D9%88%D9%84%D9%86%D8%AF%D9%89_%



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)



D8%B3%D8%AA%D9%8A%D9%81%D8%A7%D9%86_%D8%A8%D9%86%D8%A7%D8%AE.jpg#mediaviewer/File:%D8%B9%D8%A7%D9%84%D9%85_%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA_%D8%A7%D9%84%D8%A8%D9%88%D9%84%D9%86%D8%AF%D9%89_%D8%B3%D8%AA%D9%8A%D9%81%D8%A7%D9%86_%D8%A8%D9%86%D8%A7%D8%AE.jpg

- ☞ **Εικόνα 22:** "Noether" by Unknown - Emmy Noether (1882-1935). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether.jpg#mediaviewer/File:Noether.jpg>
- ☞ **Εικόνα 23:** <https://www.library.ethz.ch/Ressourcen/Digitale-Bibliothek/Kurzportraits/Bartel-Leendert-van-der-Waerden-1903-bis-1996>
- ☞ **Εικόνα 24:** <http://www.nndb.com/people/194/000022128/>



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 10: Γραμμική
Άλγεβρα. Ενότητα 10.1: Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής άλγεβρας».
Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

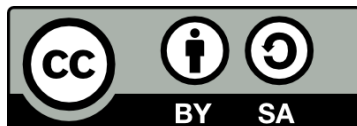
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

