



# Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 2.1: Τι είναι απόδειξη;

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



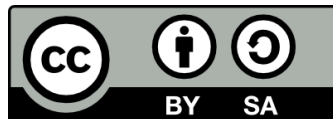
ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ☞ Τι είναι απόδειξη?
- ☞ Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- ☞ Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- ☞ Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- ☞ Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- ☞ Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.



# Σκοποί Ενότητας



☞ Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρους αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.



# Πυθαγόρειο Θεώρημα



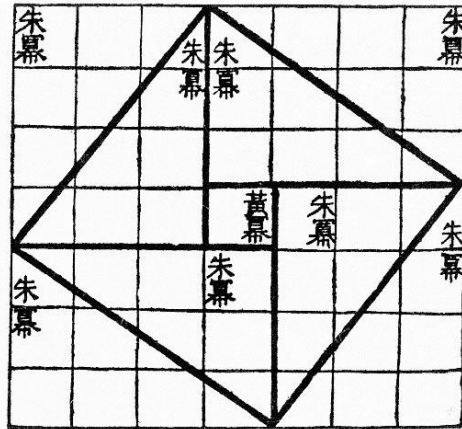
- ☞ Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεينوῦσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.
- ☞ Πυθαγόρειο Θεώρημα, ὅπως εμφανίζεται στα «Στοιχεῖα» του Ευκλείδη, (πρόταση 47, βιβλίο 1, ~300 π.Χ.).



# Αποδείξεις για το Πυθαγόρειο Θεώρημα



句股容合以成弦容



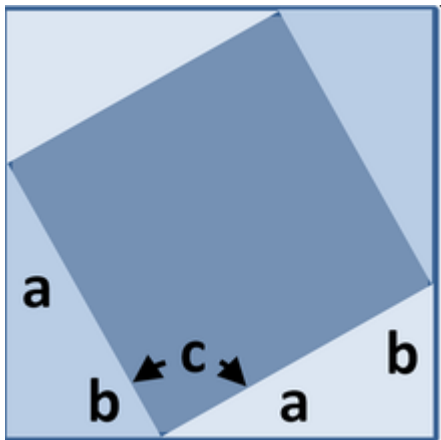
Chou Pei Suan Ching  
4<sup>ος</sup> π.Χ. – 2<sup>ος</sup> μ.Χ.

Εικόνα 1





# Σχήμα



- ❧ Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος  $(a + b)$  όπου  $a$  η μία πλευρά του ορθού τριγώνου και  $b$  η άλλη. Έστω  $c$  η υποτείνουσα.
- ❧ Το εσωτερικό σχήμα είναι και αυτό τετράγωνο.
- ❧ Αφού τα εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ισούται το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθών τριγώνων και του εσωτερικού τετραγώνου το ζητούμενο προκύπτει.



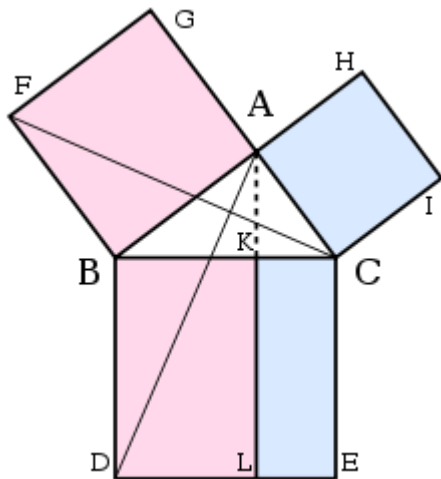
# Ερωτήσεις



- ↻ Πως γνωρίζουμε το εσωτερικό σχήμα είναι τετράγωνο?
- ↻ Πως προκύπτει ο τύπος για το εμβαδόν του τριγώνου?  
(τον χρειαστήκαμε πραγματικά?)
- ↻ Πως προκύπτει ο τύπος για το ανάπτυγμα τετραγώνων?
- ↻ Πως ορίζουμε το εμβαδόν?



# Πυθαγόρειο Θεώρημα, βιβλίο «Στοιχεία» του Ευκλείδη



βιβλίο1  
Πρόταση 47

∞ Ροζ=Ροζ,

∞ Γαλάζιο=Γαλάζιο

$ABFG = KBDL$  αφού

Ροζ:→

$$\left\{ \begin{array}{l} ABFG = 2 CBF \text{ (γιατί?)} \\ \text{και} \\ KBDL = 2 ABD \text{ (γιατί?)} \\ \text{και } CBF = ABD \end{array} \right.$$

Γιατί ο Ευκλείδης διαλέγει  
αυτή την απόδειξη?



# Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά



Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά  
7ο αιώνα π.Χ ---4ο αιώνα μ.Χ.

Πρώτη περίοδος:



Εικόνα 2

- ∞ Θαλής ο Μιλήσιος (630-550π.Χ.)
- ∞ Πυθαγόρας ο Σάμιος (570-490)
- ∞ Ζήνωνας ο Ελεάτης (490- 430)
- ∞ Δημόκριτος ο Αβδηρίτης (c. 460-370)
- ∞ Πλάτων (427-347 π.Χ.)



# Πηγές για τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά

---

Ιστορικές πηγές, όπως

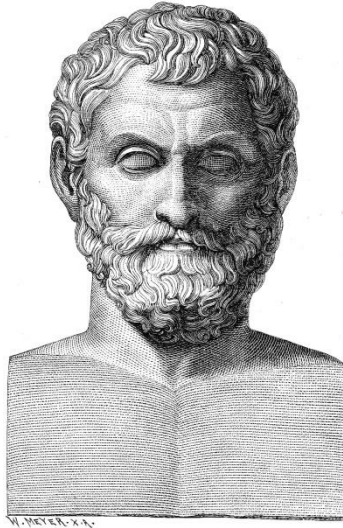
- ☞ Ηρόδοτος (5ος αιώνας π.Χ.) και άλλοι,
- ☞ (αποσπασματικές πληροφορίες),
- ☞ Ο Εύδημος (4ος αιώνας π.Χ.) ο πρώτος ιστορικός των επιστημών!
- ☞ Βιβλία του: Άριθμητική ιστορία, Γεωμετρική ιστορία, Άστρολογική ιστορία, μαθήματα του Αριστοτέλη
- ☞ Πλούταρχος (1ος αιώνας μ.Χ.)
- ☞ Πρόκλος (5ο αιώνα μ.Χ.) (περίληψη από βιβλίο ιστορίας του Εύδημου από τη Ρόδο (4ο αιώνα π.Χ.). )



# Θαλής ο Μιλήσιος (630-550 π.Χ.)

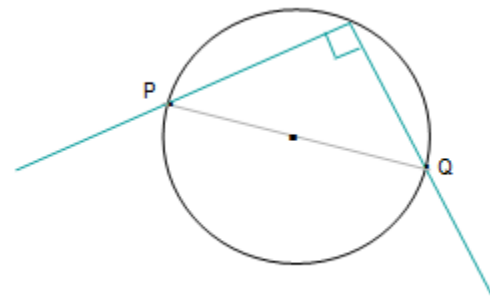
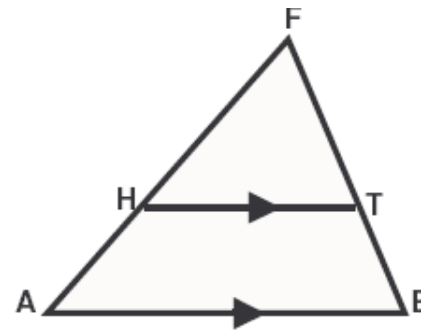


Ένας από τους 7 Σοφούς της Αρχαιότητας



Εικόνα 3

$$FH/HA=FT/TB$$



# Αποδείξεις: Με τι εργαλεία;



Τι δεχόμαστε ως γνώση? Ποια είναι τα προαπαιτούμενα?

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων του Θαλή δεν είναι δύσκολες (να τα αποδείξετε) αν δεχτούμε ως αληθή ότι το

☞ Άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο είναι δύο ορθές γωνίες.

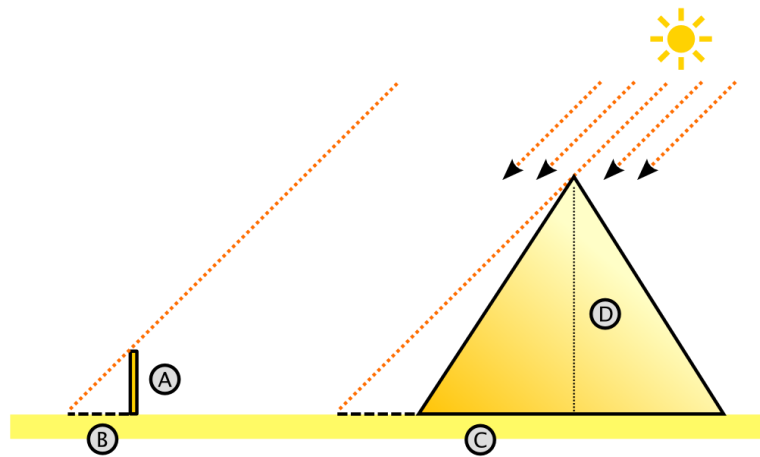
☞ Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι βάση επί ύψος δια 2.

Υπάρχουν όμως αποδείξεις για τα παραπάνω? Είναι θεωρήματα ή αξιώματα;

(Ισχύουν οι αντίστροφες προτάσεις?)



# Πυραμίδα του Χέωπα



☞ Ύψος: 147 μέτρα (σήμερα είναι 138 μέτρα).

Βάρος ογκολίθων:  
6.000.000 τόνοι .

☞ Μέτρηση του Θαλή:  
145,3.

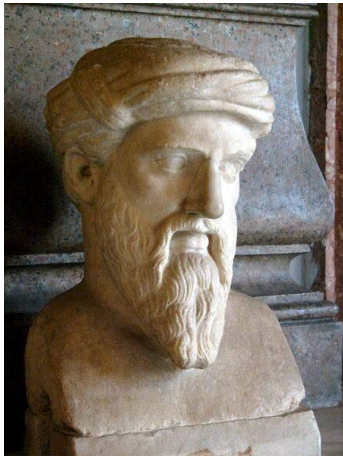
Εικόνα 4





# Πυθαγόρας (570-490) και οι Πυθαγόρειοι

Οι αριθμοί αποτελούν τη βάση του κόσμου. Πυθαγόρεια Σχολή  
«Το παν είναι αριθμός»



Εικόνα 5

- ❧ Μυστική οργάνωση στον Κρότωνα της Ιταλίας, μία θρησκευτική κίνηση με έντονη πολιτική δραστηριότητα. Είχε κοινοβιακή μορφή για τους μνημένους.
- ❧ Η ιδιοκτησία και η γνώση θεωρούνταν κοινές.
- ❧ Πρωταρχικός ρόλος στην καθιέρωση της μαθηματικής επιστήμης ως επιστήμης βασισμένη στη λογική και απομάκρυνση από λογιστικούς υπολογισμούς.
- ❧ Μαθηματικά συγγενικά προς την αγάπη της σοφίας.
- ❧ Φιλοσοφία: αγάπη της σοφίας.
- ❧ Μαθηματικά: αυτό που μαθαίνεται.



# Ιδιότητες των φυσικών αριθμών



Ας αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς με αντίστοιχο αριθμό από βότσαλα (τελείες):

☞ Άρτιοι και Περιττοί αριθμοί: άρτιοι αν τα βότσαλα χωρίζονται σε δύο ομάδες με τον ίδιο αριθμό από βότσαλα, περιττοί αν όχι.

Παραδείγματα προτάσεων που αποδεικνύονται «εύκολα»

☞ Άθροισμα αρτίων είναι άρτιος (πως?).

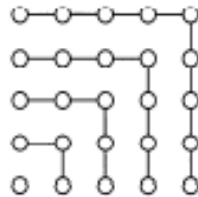
☞ Τετράγωνο αρτίου είναι άρτιος (και πολλαπλάσιο του τέσσερα), τετράγωνο περιττού είναι περιττός (πως?).

☞ Τετραγωνικοί αριθμοί («σχηματίζουν» τετράγωνο)  $n^2$ .

☞ Τριγωνικοί αριθμοί («σχηματίζουν» τρίγωνο).



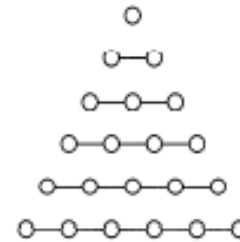
# Τετραγωνικός-Τριγωνικός αριθμός



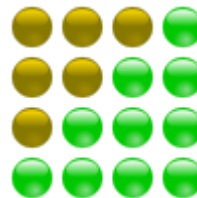
Το 25 είναι τετραγωνικός αριθμός,  
 $25=1+3+5+7+9$

Ισχύει γενικά ότι

Τετραγωνικός= άθροισμα περιττών?



Το 21 είναι τριγωνικός αριθμός,  
 $1+2+3+4+5+6=21=(6*7)/2$



Ποιό θεώρημα αντιστοιχεί  
στο παραπάνω σχήμα?



# Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1: "Chinese pythagoras"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese\\_pythagoras.jpg#mediaviewer/File:Chinese\\_pythagoras.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_pythagoras.jpg#mediaviewer/File:Chinese_pythagoras.jpg)
- ☞ **Εικόνα 2: "Greek Colonization Archaic Period"** by Regaliorum - [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Greek\\_Colonization.png](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Greek_Colonization.png). Licensed under Creative Commons Zero, Public Domain Dedication via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Greek\\_Colonization\\_Archaic\\_Period.png#mediaviewer/File:Greek\\_Colonization\\_Archaic\\_Period.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Greek_Colonization_Archaic_Period.png#mediaviewer/File:Greek_Colonization_Archaic_Period.png)



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)



- ☞ **Εικόνα 3:** "Illustrerad Verldshistoria band I Ill 107" by Ernst Wallis et al - own scan. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustrerad\\_Verldshistoria\\_band\\_I\\_Ill\\_107.jpg#mediaviewer/File:Illustrerad\\_Verldshistoria\\_band\\_I\\_Ill\\_107.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg#mediaviewer/File:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg)
- ☞ **Εικόνα 4:** "Thales theorem 6" by Dake - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales\\_theorem\\_6.png#mediaviewer/File:Thales\\_theorem\\_6.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales_theorem_6.png#mediaviewer/File:Thales_theorem_6.png)
- ☞ **Εικόνα 5:** "Kapitolinischer **Pythagoras** adjusted" by Original uploader was Galilea at de.wikipedia - First upload to Wikipedia: de.wikipedia; description page is/was here.(Original text : Fotografiert am 30.03.2005) Second upload to Commons:



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)



[http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Kapitolinischer\\_Pythagoras.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg) and this is an adjusted version of the second one. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer\\_Pythagoras\\_adjusted.jpg#mediaviewer/File:Kapitolinischer\\_Pythagoras\\_adjusted.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg#mediaviewer/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά  
στην αρχαία Ελλάδα. Ενότητα 2.1: Τι είναι απόδειξη;». Έκδοση: 1.0.  
Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>

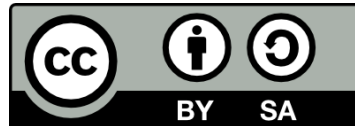




# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

