



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.5: Ευκλείδης και τα Στοιχεία.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ☞ Τι είναι απόδειξη?
- ☞ Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- ☞ Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- ☞ Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- ☞ Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- ☞ Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.



Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρους αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.



Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), (Αλεξάνδρεια)



Εικόνα 1

Έργα

Στοιχεία

Δεδομένα

Φαινόμενα ή Σφαιρικά

Οπτικά

Κατοπτρικά

Στοιχεία Μουσικής

Βιβλίο περί διαιρέσεων

Πορίσματα

Κωνικά

Τόποι προς επιφάνειες

Ψευδάρια

Μηχανική

Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων



Στοιχεία βιβλίο 2, πρόταση 5



Εικόνα 2
(100 μ.Χ. Όξύρρυγχος)



Ραφαήλ (1483-1520)

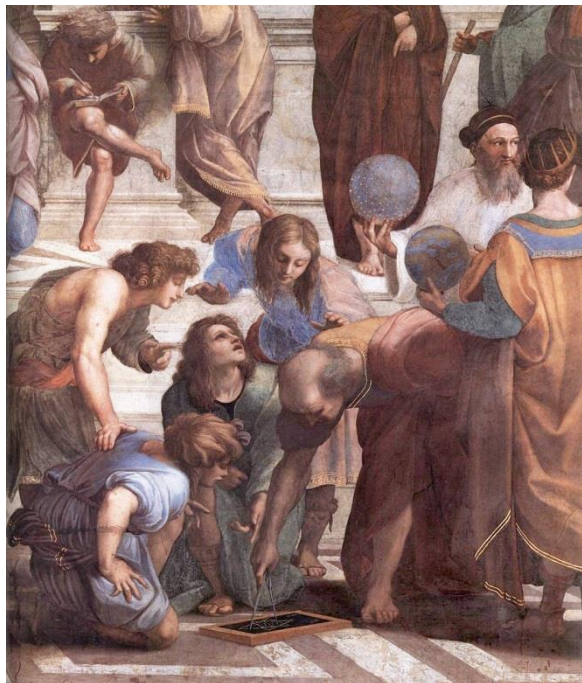


Εικόνα 3

«Η σχολή των Αθηνών» (~1510)



Έργα του Ευκλείδη



Εικόνα 4

Έργα

Στοιχεία

Δεδομένα

Φαινόμενα ή Σφαιρικά

Οπτικά

Κατοπτρικά

Στοιχεία Μουσικής

Βιβλίο περί διαιρέσεων

Πορίσματα

Κωνικά

Τόποι προς επιφάνειες

Ψευδάρια

Μηχανική

Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων



Στοιχεία του Ευκλείδη («εισαγωγή στα μαθηματικά»)



Συλλογή από 13 βιβλία-κεφάλαια:

Παρουσιάζονται με λογική σειρά οι βάσεις για τα στοιχειώδη μαθηματικά της εποχής:

- Οι βάσεις για την αριθμητική (θεωρία αριθμών).
- Για την γεωμετρία (σημεία, ευθείες, επίπεδα, κύκλοι, σφαίρες).
- για την γεωμετρική άλγεβρα.

Το περιεχόμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη στηρίχτηκε κατά ένα μεγάλο μέρος στο έργο προηγούμενων μαθηματικών.

Όμως η διάταξη (σειρά) των προτάσεων (φαίνεται να) οφείλεται στον Ευκλείδη όπως και πολλές από τις αποδείξεις.



Ύπαρξη άλλων «Στοιχείων»



Ο Ιπποκράτης της Χίου (~470 π.Χ-410 π.Χ.) είχε γράψει και αυτός (νωρίτερα) «Στοιχεία», όπως και άλλοι μαθηματικοί.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ξεχώρισαν από τις παλαιότερες εργασίες χάρις στη λογική δομή και μαθηματική αυστηρότητά τους. Έτσι τα παλαιότερα δεν αναπαράχθηκαν και σώζονται μόνο μέσα από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.



«Στοιχεία»



- ☞ Τα βιβλία 1-6 αναφέρονται στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου.
- ☞ Τα βιβλία 7-9 αναφέρονται στη θεωρία των αριθμών.
- ☞ Το βιβλίο 10 αναφέρεται στους άρρητους.
- ☞ Τα βιβλία 11-13 αναφέρονται στη στερεομετρία.



13 βιβλία των Στοιχείων

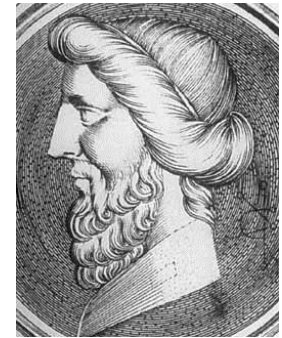


Κάποια από τα Μαθηματικά αποτελέσματα που περιέχονται στα 13 βιβλία των Στοιχείων αποδίδονται σε μαθηματικούς που έζησαν πριν τον Ευκλείδη.

∞ Στους Πυθαγόρειους και κυρίως στον Αρχύτα τον Ταραντίνο (428 - 347 π.Χ.) «περιστερά» βιβλία 1,2,6,7,8,9,11.

∞ Εύδοξος από την Κνίδα (408-355 π.Χ.) βιβλία 5, 12.

∞ Θεαίτητος ο Αθηναίος(417-369 π.Χ.) βιβλία 10,13.



Εικόνα 5



Βιβλίο 1 έως 3



- Βιβλίο 1: αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες, (δηλαδή τα αιτήματα και κοινές έννοιες αποτελούν αυτά που σήμερα θα λέγαμε στα αξιώματα). Ακολουθούν οι προτάσεις. Το βιβλίο τελειώνει με την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του.
- Βιβλίο 2: Θεωρήματα της Γεωμετρικής Άλγεβρας (αποδείξεις αλγεβρικών ταυτοτήτων όπως $a(b + c) = ab + ac$ με χρήση εμβαδών).
- Βιβλίο 3: Ιδιότητες κύκλων.



Βιβλίο 4 έως 9



- Βιβλίο 4: Κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη) κανονικών πολυγώνων, (3,4,5,6 πλευρές). Τελειώνει με τη κατασκευή του κανονικού 15-γωνου.
- Βιβλία 5 και 6: Θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και προτάσεις Γεωμετρικής Άλγεβρας και ομοιότητα τριγώνων.
- Βιβλία 7,8,9: Θεωρία Αριθμών.



Βιβλίο 10 έως 13



- Βιβλίο 10: (το μεγαλύτερο και το δυσκολότερο). Με τη σημερινή ορολογία: επεκτάσεις σωμάτων βαθμού 2 και 4 πάνω από τους ρητούς, (θέμα παρουσίασης).
- Βιβλίο 11: Βασικά Θεωρήματα στερεομετρίας.
- Βιβλίο 12: όγκους πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.
- Βιβλίο 13: πλατωνικά στερεά. Για κάθε ένα από αυτά υπολογίζει λόγο ακμής με ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας.



Παρατήρηση για τα κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα

Το επόμενο κανονικό πολύγωνο μετά τον Ευκλείδη κατασκευάσθηκε το 1796 από τον Gauss (1777-1855): το κανονικό 17-γωνο .

Υπάρχουν άλλα κατασκευάσιμα πολύγωνα?

(Θέμα παρουσίασης)



Εικόνα 6



Αιτήματα (Βιβλίο 1) (1)



- α'. Αιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.



Αίτημα 4, Αίτημα 5

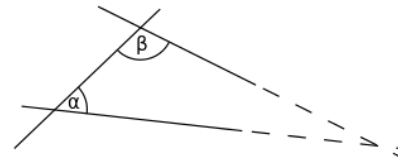


Ορισμός 10 (ορθών γωνιών): όταν μία ευθεία τέμνει μία άλλη έτσι ώστε οι εφεξής γωνίες να είναι ίσες, τότε οι γωνίες αυτές λέγονται ορθές και οι ευθείες κάθετες η μία προς την άλλη.

Αίτημα 4: όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες η μία προς την άλλη

Αίτημα 5: Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

Εικόνα 7

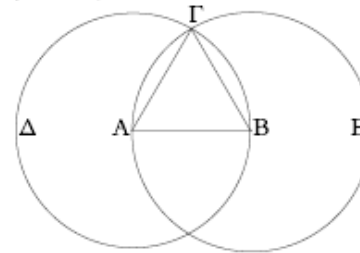


Πρόταση 1, βιβλίο 1



Επί της δοθείσης ευθείας
πεπερασμένης τρίγωνον
ισόπλευρον συστήσασθαι.

Πρόταση 1, βιβλίο 1 →



Έστω η δοθείσα ευθεία πεπερασμένη η
AB.

Δει δη επί της AB



Πρόταση 1 Με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο



Δίνεται το AB

Κατασκευή

- κύκλου με κέντρο το A.
- κύκλου με κέντρο το B.

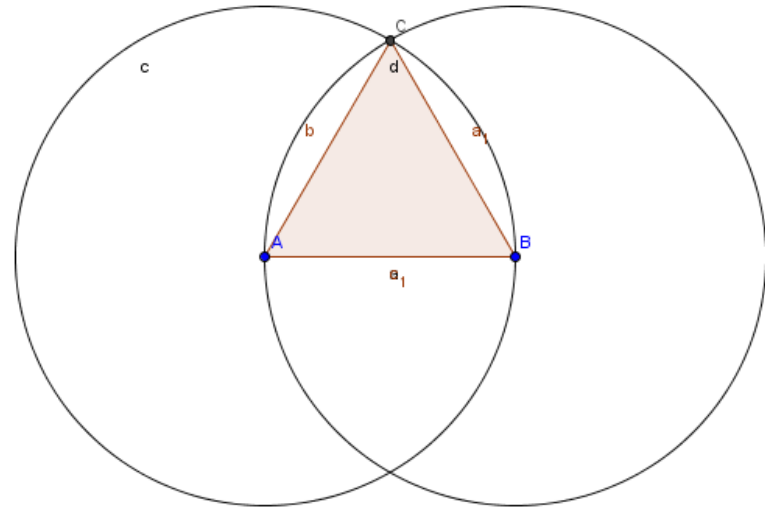
(ακτίνα AB)

Έστω C το σημείο τομής.

ABC είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Χρησιμοποιεί:

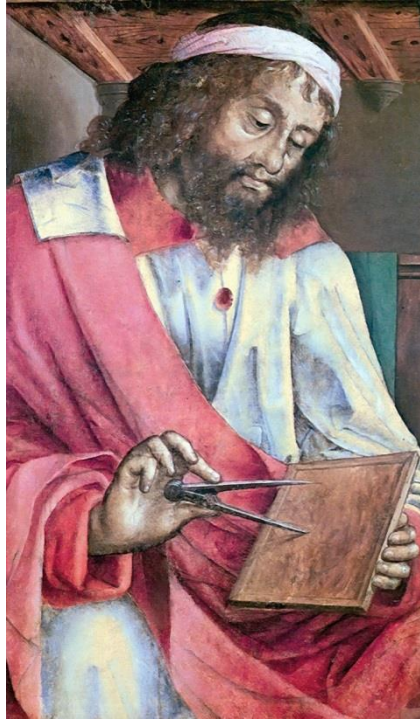
1. Αίτημα 3 (κατασκευή κύκλου).
2. Αίτημα 1 (κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος).
3. Κοινή έννοια 1 (ίσα προς τρίτο και μεταξύ τους ίσα).



Εικόνα 8



Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), (Αλεξάνδρεια)



Εικόνα 9

Έργα
Στοιχεία



Στοιχεία



- Βιβλίο 1: αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας του επιπέδου. (ξεκινά με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες,).
- Βιβλίο 2: Θεωρήματα της Γεωμετρικής Άλγεβρας.
- Βιβλίο 3: Ιδιότητες κύκλων.
- Βιβλίο 4: Κατασκευές κανονικών πολυγώνων.
- Βιβλία 5 και 6: Θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου.
- Βιβλία 7,8,9: Θεωρία Αριθμών.
- Βιβλίο 10: επεκτάσεις πάνω από τους ρητούς.
- Βιβλίο 11: Βασικά Θεωρήματα στερεομετρίας.
- Βιβλίο 12: όγκους πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.
- Βιβλίο 13: πλατωνικά στερεά.



Αιτήματα (Βιβλίο 1) (2)



- α'. Αιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

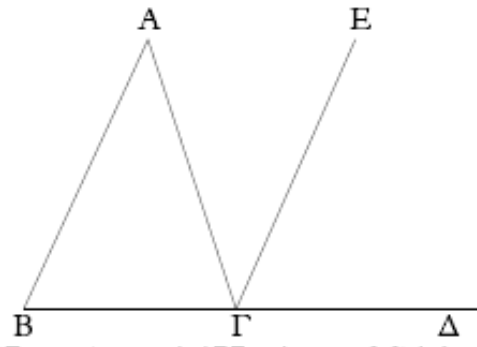


Πρόταση 32, βιβλίο 1



Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης η εκτός γωνία δυσί τοις εντός και απεναντίον ίση εστίν, και αι εντός του τριγώνου τρεις γωνίαι δυσίν ορθαίς ίσαι εισίν.

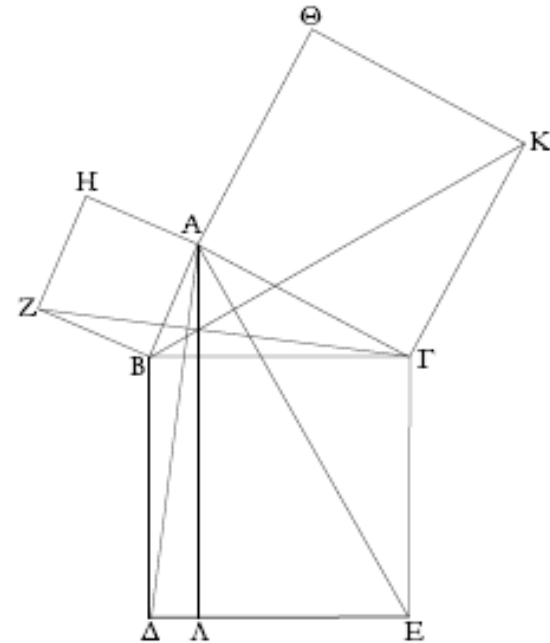
☞ Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.



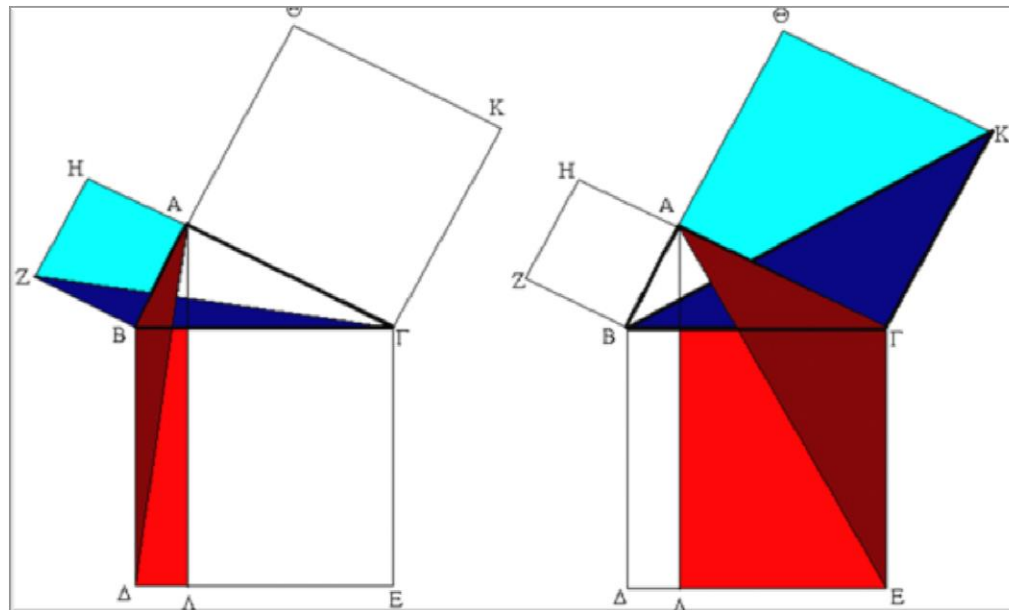
Πρόταση 47, (Πυθαγόρειο Θεώρημα)



Εν τοις ορθογωνίοις
τριγώνοις το από της την
ορθήν γωνίαν υποτεινούσης
πλευράς τετράγωνον ίσον
εστί τοις από των την ορθήν
γωνίαν περιχουσών
πλευρών τετραγώνοις.



Πυθαγόρειο Θεώρημα

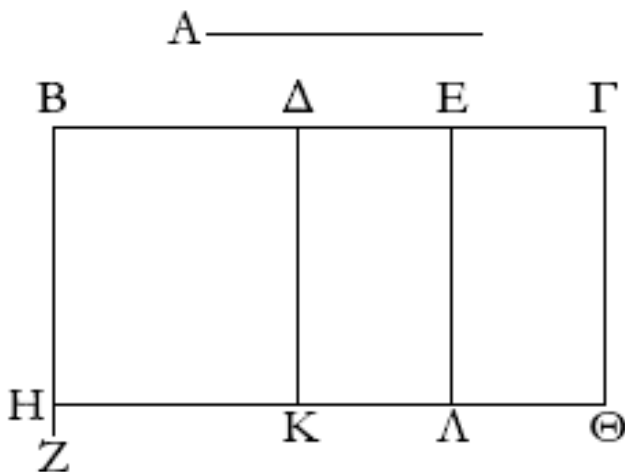


Στο παραπάνω σχήμα: $AB\Delta = B\Gamma Z$, $AB\Delta = 1/2$ κόκκινου $B\Delta\Lambda M$, $B\Gamma Z = 1/2$ $BZHA$.
 Άρα $BZHA = \text{κόκκινο } B\Delta\Lambda M$. ✓

$ΑΓΚΘ = \text{κόκκινο } \Lambda M\Gamma E \rightarrow BZHA + ΑΓΚΘ = B\Gamma E\Delta$



Γεωμετρική Άλγεβρα



Βιβλίο 2

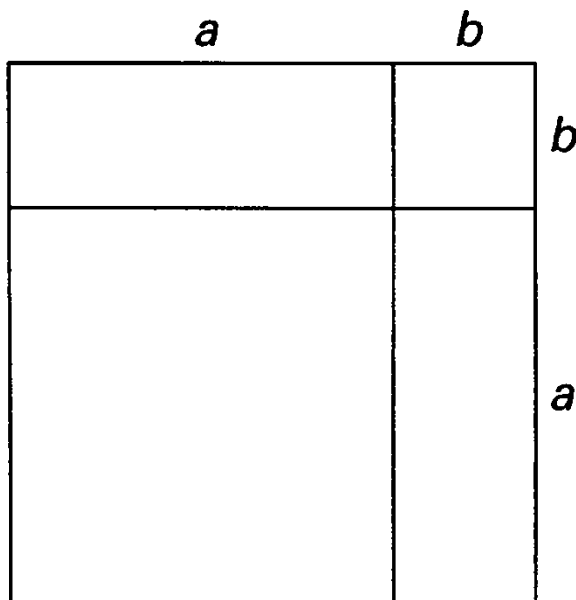
$$a(b + c + d + \dots) \\ = ab + ac + ad + \dots$$

(γενικευμένο παράδειγμα)

$$a(b + c + d) \\ = ab + ac + ad$$



Πρόταση 4, βιβλίο 2, Στοιχεία



Πρόταση 4, βιβλίο 2, Στοιχεία:

Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα.

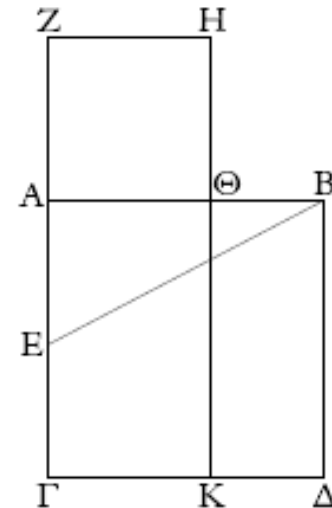
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Βιβλίο 2



☞ Την δοθείσαν ευθείαν
τεμείν ώστε το υπό της
όλης και του ετέρου των
τμημάτων περιεχόμενον
ορθογώνιον ίσον είναι τω
από του λοιπού τμήματος
τετραγώνω.

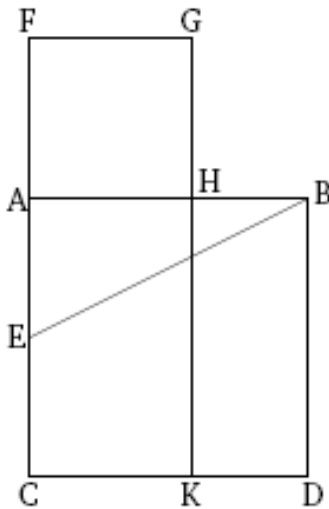


Πρόταση 11, βιβλίο 2, Στοιχεία



Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.

$$a(a - x) = x^2$$



Ερμηνεία:

τμήμα = $AB = a$,

$ABDC$ τετράγωνο,

χωρίζουμε AB σε AH και HB .

θέλουμε το $x = AH$ να είναι τέτοιο ώστε

$$HBDK = HGFA.$$

Λύση:

Έστω E το μισό του AC ,

$$EF = EB$$

$AFGH$ τετράγωνο

τότε $AH = x$



Η προηγούμενη Πρόταση



Η προηγούμενη Πρόταση δίνει

- Τη γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
- Ποια είναι η κατηγορία εξισώσεων δευτέρου βαθμού που μπορούν να επιλυθούν γεωμετρικά σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο?
- Υπάρχουν άλλα τέτοια παραδείγματα στα Στοιχεία του Ευκλείδη?



Βιβλίο 7, Βιβλίο 9



Βιβλίο 7 Θεωρία Αριθμών

Όροι

α' Μονάς εστίν, καθ'ην έκαστον των όντων εν λέγεται.

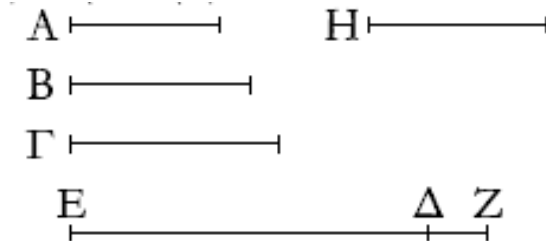
β'. Αριθμός δε το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος.

.....


Βιβλίο 9

κ'.

Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών.



Υπάρχει άπειρος αριθμός πρώτων, Βιβλίο 9, πρ. 20



«Αν δοθεί οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών τότε υπάρχουν πάντα περισσότεροι από αυτό το πλήθος»

- Ορισμός 12: πρώτος λέγεται ο αριθμός που μετριέται μόνο από τη μονάδα.
- Απόδειξη με γενικευμένο παράδειγμα (δίνονται 3 πρώτοι και αποδεικνύεται ότι υπάρχει τέταρτος) και με εις άτοπον απαγωγή.

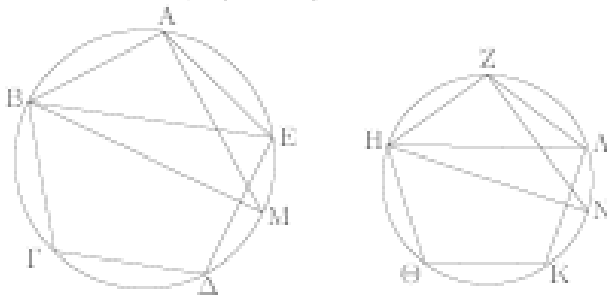


Βιβλίο 12



α΄.

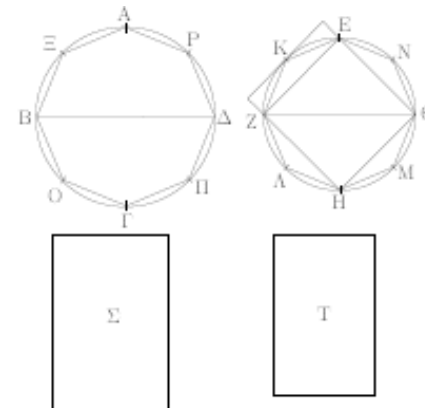
Τα εν τοις κύκλοις όμοια πολύγωνα προς αλληλά εστίν ως τά από των διαμέτρων τετράγωνα.



β΄.

Οι κύκλοι προς αλληλους εισίν ως τα από των διαμέτρων τετράγωνα

$$a:A = d^2:D^2$$

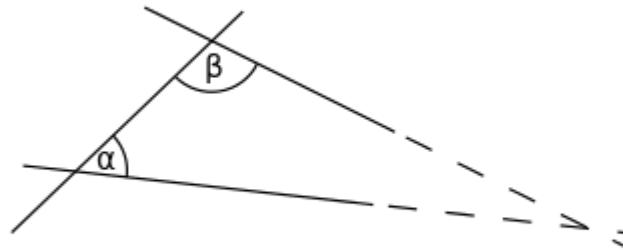


Αίτημα 5



- Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

Τι είναι ευθεία?



Το 5^ο αίτημα είναι ισοδύναμο με τα εξής:



Μήπως στη πραγματικότητα το 5^ο αίτημα προκύπτει από τα άλλα 4 αιτήματα και μπορεί να παραληφθεί?

Το 5^ο αίτημα είναι ισοδύναμο με τα εξής:

- **στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος, (μία ευθεία που δεν τέμνει την αρχική).**
- **οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.**
- **(και πολλές άλλες προτάσεις που αφορούν παράλληλες ευθείες).**



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1: "EuclidStatueOxford"** by Photograph taken by Mark A. Wilson (Wilson44691, Department of Geology, The College of Wooster). [1] - Own work.
- ☞ **Εικόνα 2: "P. Oxy. I 29"** by Euclid - <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/tha.jpg>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P. Oxy. I 29.jpg#mediaviewer/File:P. Oxy. I 29.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg#mediaviewer/File:P._Oxy._I_29.jpg)
- ☞ **Εικόνα 3: "Sanzio 01"** by Raphael - Stitched together from vatican.va. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sanzio_01.jpg#mediaviewer/File:Sanzio_01.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)



- ☞ **Εικόνα 4: "Sanzio 01 Euclid"** by Raphael-This file is lacking source information. Please edit this file's description and provide a source.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sanzio_01_Euclid.jpg#mediaviewer/File:Sanzio_01_Euclid.jpg
- ☞ **Εικόνα 5: "Archytas"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archytas.jpg#mediaviewer/File:Archytas.jpg>
- ☞ **Εικόνα 6: "Stamps of Germany (DDR) 1977, MiNr 2215"** by Hochgeladen von --Nightflyer (talk) 18:24, 21 November 2009 (UTC) - Eigener Scan und Bearbeitung. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stamps_of_Germany_\(DDR\)_1977,_MiNr_2215.jpg#mediaviewer/File:Stamps_of_Germany_\(DDR\)_1977,_MiNr_2215.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stamps_of_Germany_(DDR)_1977,_MiNr_2215.jpg#mediaviewer/File:Stamps_of_Germany_(DDR)_1977,_MiNr_2215.jpg)



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)



- ☞ **Εικόνα 7: "Parallel postulate en"** by 6054 - Edit of <http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika>:
Parallel_postulate.svg by User:Harkonnen2. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_postulate_en.svg#mediaviewer/File:Parallel_postulate_en.svg
- ☞ **Εικόνα 8: "Euclid I°t1"** by Fracqua - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid_I%C2%B0t1.png#mediaviewer/File:Euclid_I%C2%B0t1.png
- ☞ **Εικόνα 9: "Euklid"** by Justus van Gent (fl. 1460–1480) - <http://www.aiwaz.net/panopticon/euclid/gi881c129>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid.jpg#mediaviewer/File:Euklid.jpg>



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά
στην αρχαία Ελλάδα. Ενότητα 2.5: Ευκλείδης και τα Στοιχεία». Έκδοση:
1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

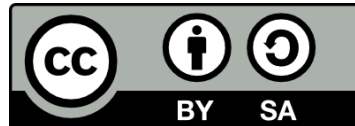
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

