ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3: Αρχιμήδης.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3.2: Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

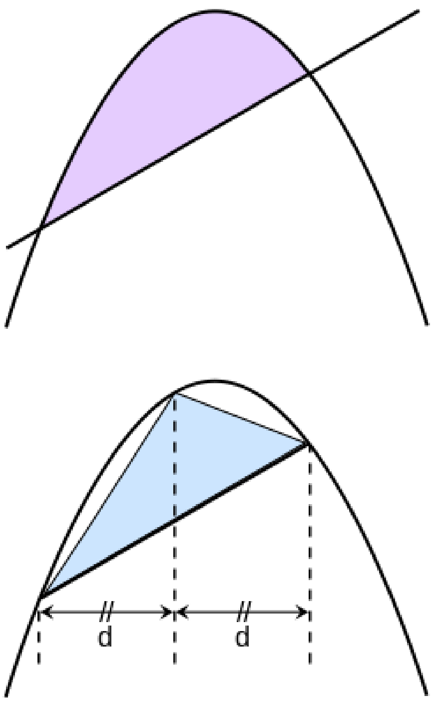
Περιεχόμενα Ενότητας

- Αρχιμήδης.
- Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτη παρουσιάζεται η συμβολή του Αρχιμήδη στην εξέλιξη των μαθηματικών και η «μέθοδος» του Αρχιμήδη για την ανακάλυψη θεωρημάτων.

"Τετραγωνισμός της παραβολής"



Εικόνα 1

Υπολογίζεται ότι το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του τριγώνου με τρίτη κορυφή το μακρύτερο (από την τέμνουσα) σημείο του παραβολικού τμήματος.
Ο Αρχιμήδης δίνει δύο αποδείξεις: μία βασισμένη στις αρχές της μηχανικής και μία γεωμετρική.

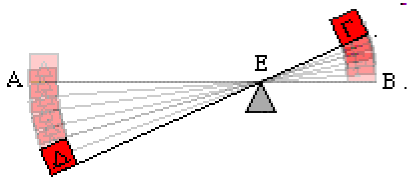
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (1)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

Προσέγγιση για το π (Αρχιμήδης)

"Κύκλου μέτρησις"

Το θεώρημα εκφράζει τον λόγο της περιφέρειας του κύκλου ως προς τη διάμετρο του κύκλου , δηλ. το π.

$3\ {}^{10}/_{71} < \pi < 3\ 1/7$

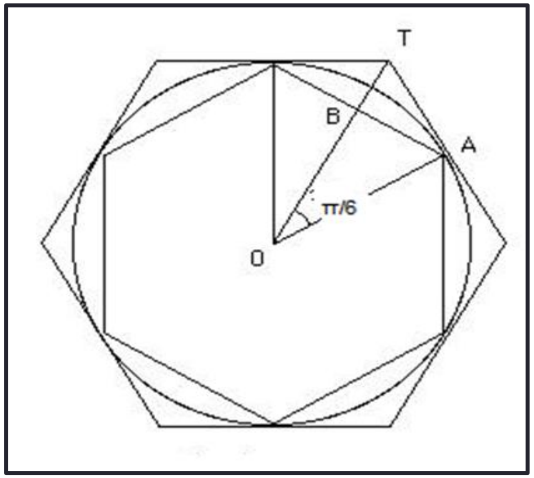
(3.14085…< π < 3.14286)

Κανονικά 96-γωνα

Ο Αρχιμήδης κατασκευάζει δύο κανονικά 96-γωνα (ένα εγγεγραμένο και ένα περιγεγραμένο του κύκλου), διχοτομώντας διαδοχικά τις γωνίες.

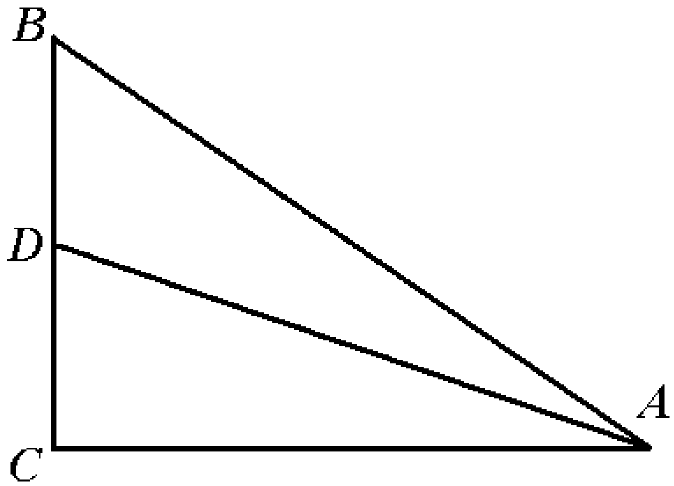
Η ΟΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Έτσι οι γωνίες είναι

π/ 6, π/12,…



Προσέγγιση για το π

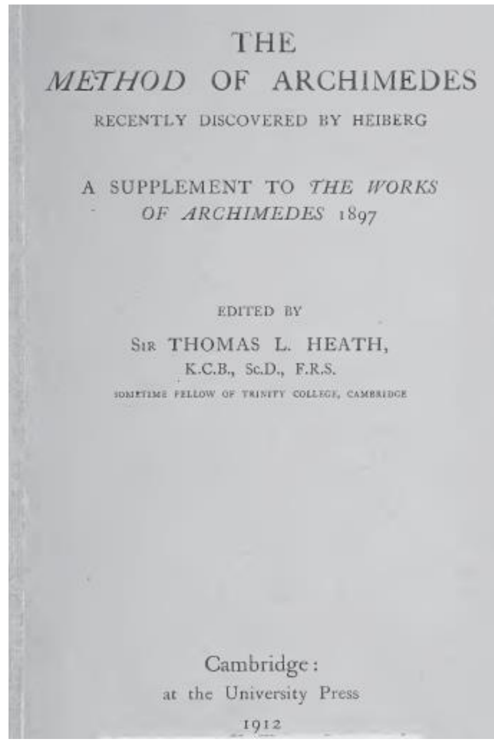
Χρησιμοποιεί την Πρόταση 3, βιβλίο 6, «Στοιχεία», Ευκλείδης



AD διχοτομεί την γωνία BAC
Τότε BD: DC= AB: AC

Μαζί με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, συγκρίνει το λόγο της διαμέτρου του κύκλου με τις περιφέρειες των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων 96-γώνων και παίρνει άνω και κάτω όρια .

The method of Archimedes



THE

METHOD OF ARCHIMEDES

RECENTLY DISCOVERED BY HEIBERG

A SUPPLEMENT TO *THE WORKS OF ARCHIMEDES* 1897

EDITED BY

SIR THOMAS L. HEATH,

K.C.B., Sc.D., F.R.S.

SOMETIME FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

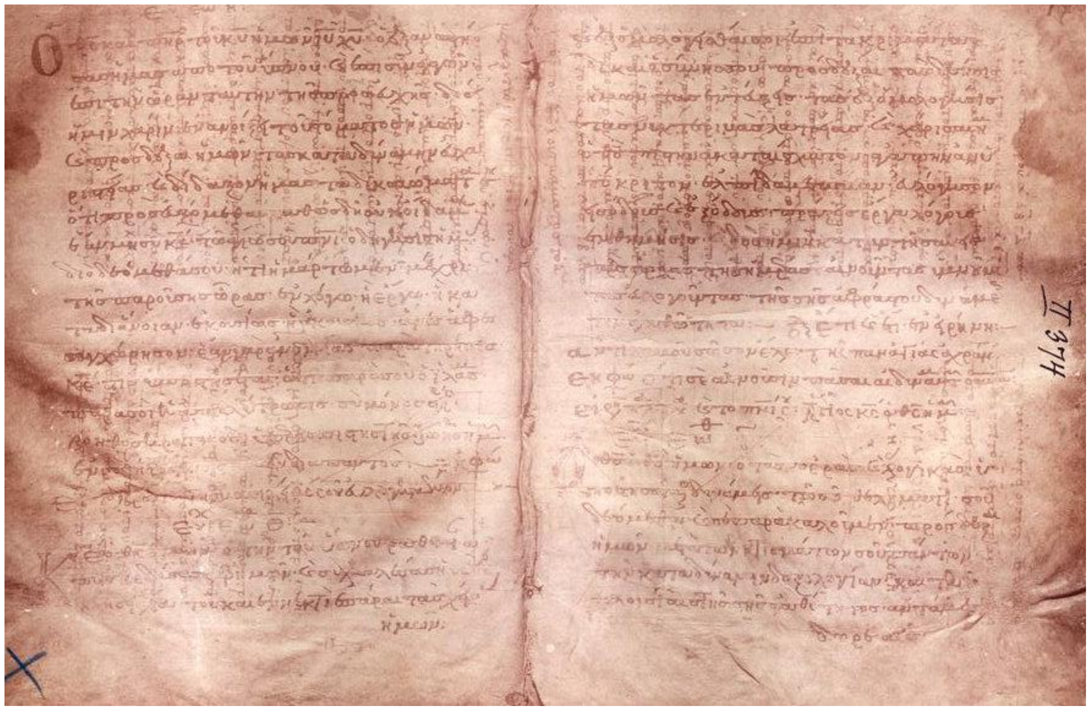
Cambridge:

at the University Press

1912

Εικόνα 2

Παλίμψηστος



Εικόνα 3

Παλίμψηστα

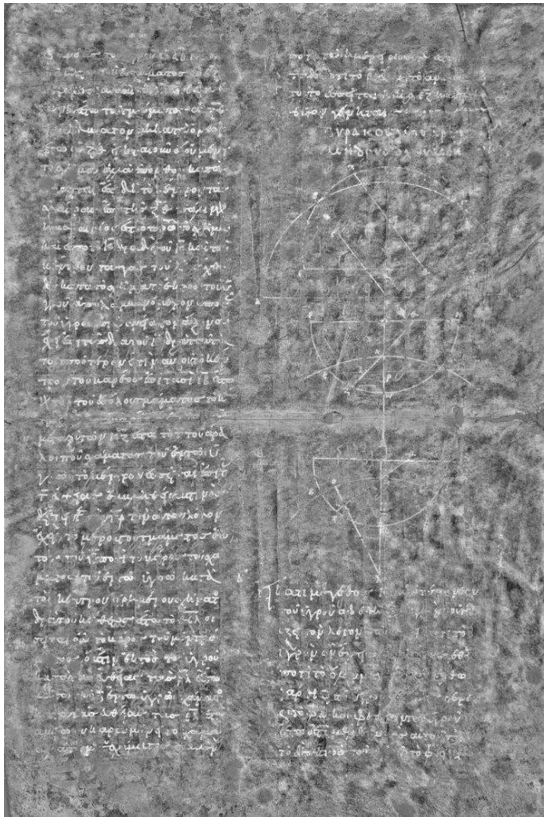
- Παλίμψηστα: αρχαίοι πάπυροι και περγαμηνές πολλαπλής χρήσης.
- Το παλίμψηστο (συλλογή προσευχών) εξετάστηκε το 1906 στη Κωνσταντινούπολη από τον Heiberg που αντιλήφθηκε τη σημασία του. Διάβασε 80% και βρήκε 7 κείμενα του Αρχιμήδη.
- Χάθηκε 1922-1998. Βρέθηκε σε πολύ χειρότερη κατάσταση…
- Το 1998 πουλήθηκε σε πλειστηριασμό του Christie’s στην Νέα Υόρκη για 2,2 εκατομμύρια δολάρια. Αγοραστής: άγνωστος.
- Σήμερα βρίσκεται στο Walters Art Museum.

7 έργα του Αρχιμήδη

Στο Παλίμψηστο βρίσκονται 7 έργα του Αρχιμήδη:

- **«Περί επιπέδων ισορροπιών».**
- **«Κύκλου μέτρησις».**
- **«Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένη έφοδος».**
- **«Περί ελίκων**».
- **«Στομάχιον».**
- **«Περί των επιπλεόντων σωμάτων».**
- **«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»**.

Παλίμψηστος--ευχολόγιον



Εικόνα 4

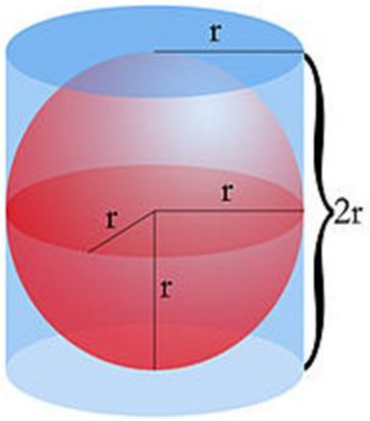
Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος

- Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἤ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν.
- Άλλωστε κάποιες ιδιότητες που στην αρχή μου αποκαλύφθηκαν με τη μηχανική στη συνέχεια αποδείχθηκαν με τη γεωμετρία, διότι η προσέγγιση που γίνεται με τη μέθοδο αυτή δεν επιδέχεται απόδειξης. Είναι ευκολότερο να οδηγηθείς στην απόδειξη, εάν έχεις αποκτήσει εκ των προτέρων κάποια γνώση του πράγματος, παρά αν ψάχνεις κάτι για το οποίο δεν έχεις την παραμικρή ιδέα.

Ο Αρχιμήδης στην Έφοδο για την μέθοδό του

Για να βρούμε ένα ζητούμενο εμβαδόν ή όγκο κόβουμε την επιφάνεια ή το σώμα σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό λεπτές, παράλληλες και επίπεδες λωρίδες ή λεπτές παράλληλες φέτες και (νοητά) κρεμάμε αυτά τα κομμάτια στο ένα άκρο δεδομένου μοχλού με τέτοιον τρόπο, ώστε αυτά να βρίσκονται σε ισορροπία με ένα σχήμα του οποίου η περιεκτικότητα και το κέντρο βάρους είναι γνωστά.

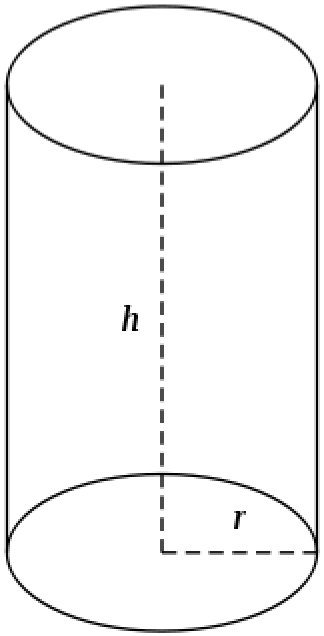
Το Θεώρημα του Αρχιμήδη



Εικόνα 5

Ο όγκος του κυλίνδρου (με ακτίνα r και ύψος 2r) είναι ίσος με τα 3/2 του όγκου της σφαίρας (με ακτίνα r)!

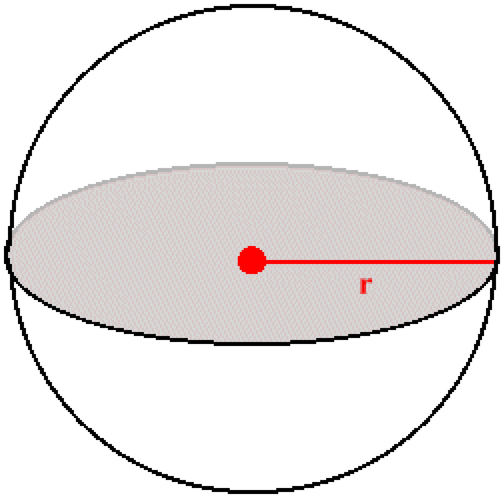
Όγκος κυλίνδρου



Σήμερα ο όγκος του κυλίνδου υπολογίζεται εύκολα ως το τριπλό ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r s ds d\varphi dz = \pi r^2 h$$

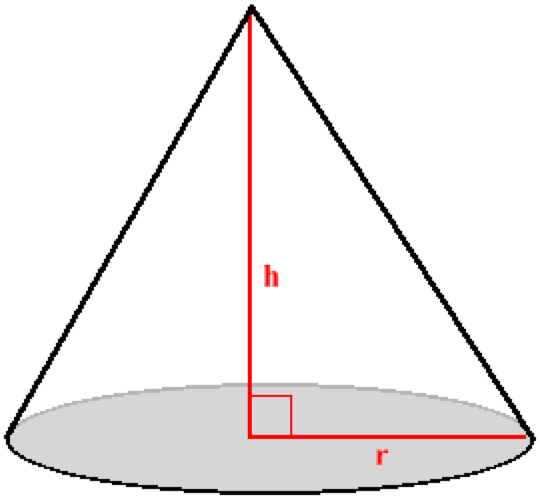
Όγκος σφαίρας



Ο όγκος της σφαίρας επίσης προκύπτει από κατάλληλο τριπλό ολοκλήρωμα (ποιο?)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Όγκος κώνου



Ο κώνος χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι (αν θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε από τη βάση, με ύψος 0 και προχωράμε προς τη κορυφή) τότε η εγκάρσια τομή στο ύψος z είναι κύκλος ακτίνα r(h-z)/h.

Έτσι ο όγκος του κώνου προκύπτει από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \pi r^2 \frac{(h-z)^2}{h^2} dz = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Τι από όλα αυτά γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες πριν τον Αρχιμήδη? (1)

- Στο βιβλίο 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη, στην πρόταση 18 (την τελευταία του βιβλίου) ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι:

Αν S και T είναι δύο σφαιρες με ακτίνες r_1 και r_2 και όγκους V_1 και V_2 τότε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Άρα ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με κάποια σταθερά επί το κύβο της ακτίνας. (Ποια σταθερά όμως?)

Τι από όλα αυτά γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες πριν τον Αρχιμήδη? (2)

- Στο ίδιο βιβλίο ο Ευκλείδης δείχνει ότι ο όγκος του κώνου είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με το ίδιο ύψος.
- Το κάνει χρησιμοποιώντας την αρχή της εξάντλησης του Ευδόξου. Πρώτα κατασκευάζει δύο ακολουθίες πολυεδρικών στερεών εγγεγραμμένων στον κώνο και στον κύλινδρο αντίστοιχα και δείχνει ότι τα πολύεδρα ικανοποιούν την επιθυμητή σχέση.

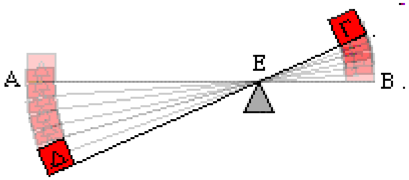
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (2)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



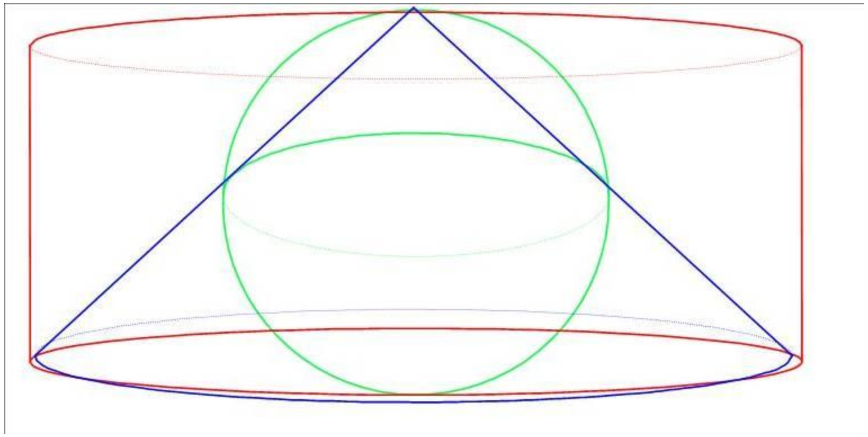
ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (1)

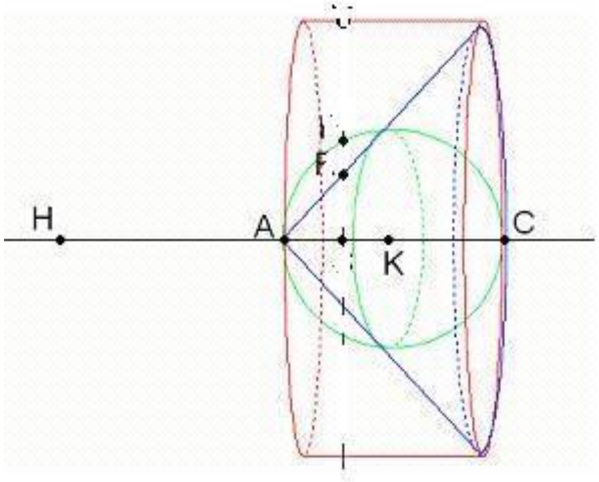
Κύλινδρος = 3 κώνος

[Στοιχεία, Πρόταση 13.10]

Θεωρούμε τον κύλινδρο και τον κώνο που οι βάσεις τους έχουν ακτίνα ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας.



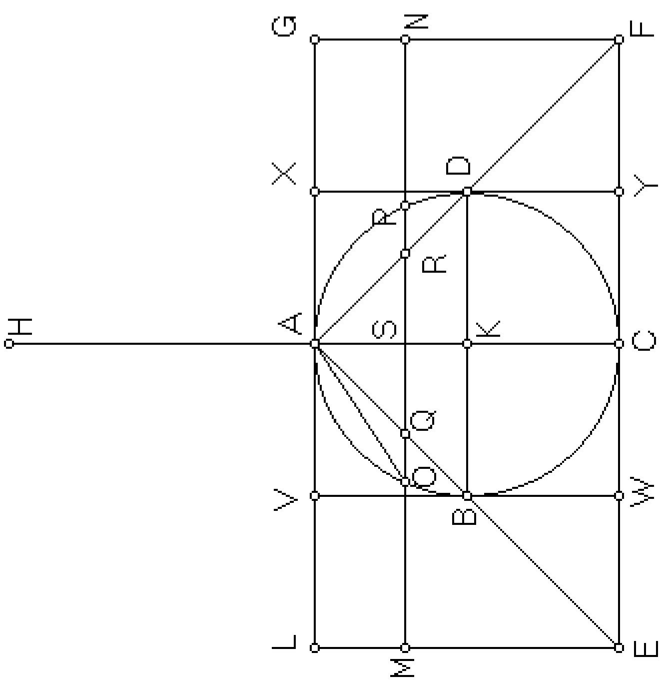
Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (2)



Θα ισορροπήσουμε το σύστημα σφαίρας,κώνου, κυλίνδρου ως προς A, την κορυφή του κώνου.

Έστω HA=AC=2r.

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (3)



Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!

Θεωρούμε την τομή MN.

Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

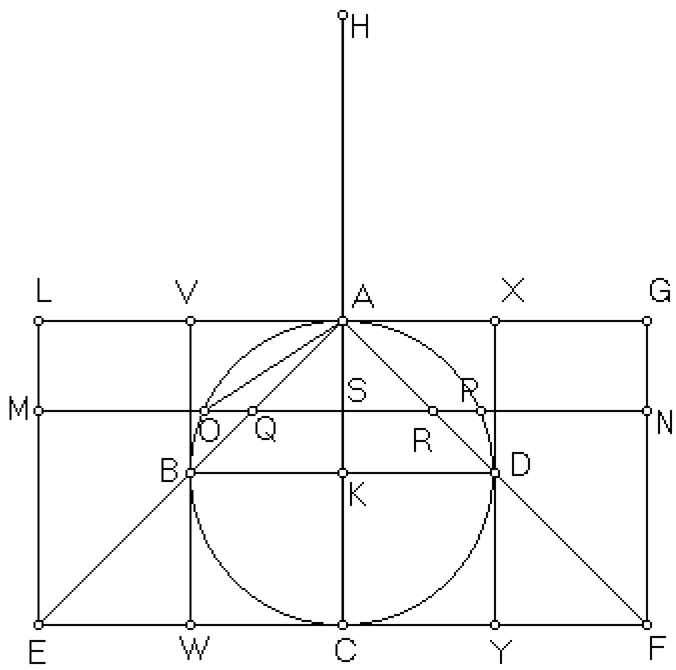
$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.

Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.

Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.

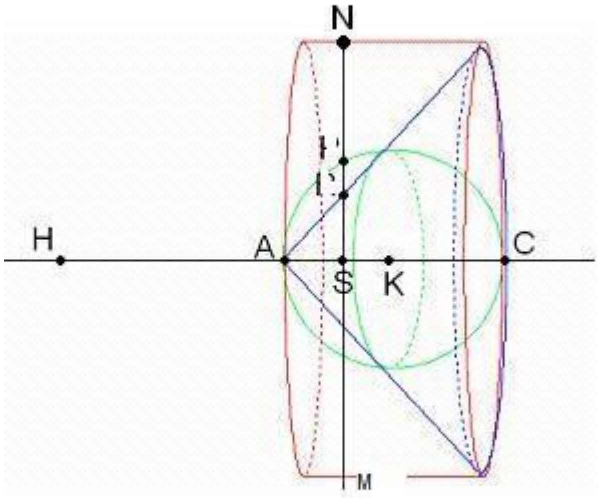
Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (4)



Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου ισορροπεί ως προς το A αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο H και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το A) είναι μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου.

Τι γίνεται αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (5)



Συμπέρασμα: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το Α αν θέσουμε στο Η την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο Κ (αφού Κ είναι το κέντρο βάρους του).

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

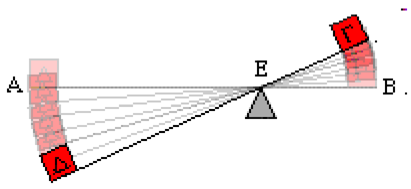
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (3)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

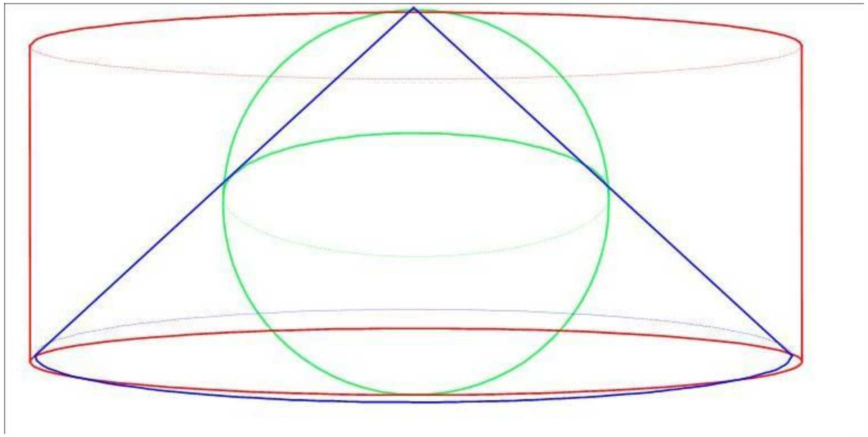
Σχέση μεταξύ όγκων (1)

Θα ισορροπήσουμε το σύστημα της σφαίρας, του κώνου και του κυλίνδρου που έχουν το ίδιο ύψος με της σφαίρα, αλλά με ακτίνα βάσης ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας.

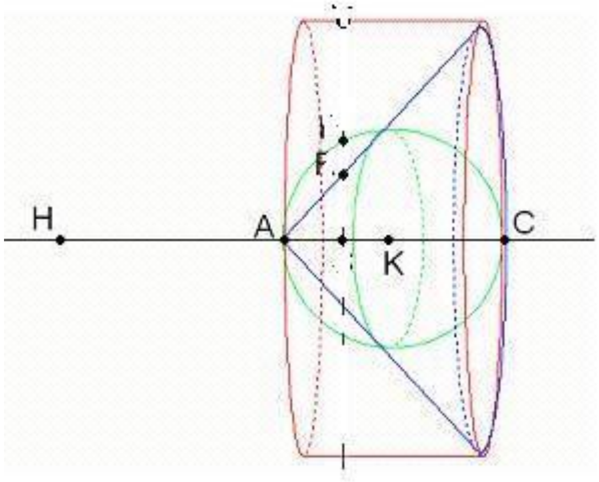
Αφού ο κύλινδρος είναι ο πιο ογκώδης από τους άλλους δύο, θα πρέπει να τοποθετήσουμε μαζί σφαίρα και κώνο από τη μεριά και τον κύλινδρο από την άλλη.

Κύλινδρος = 3 κώνος

[Στοιχεία, Πρόταση 13.10]

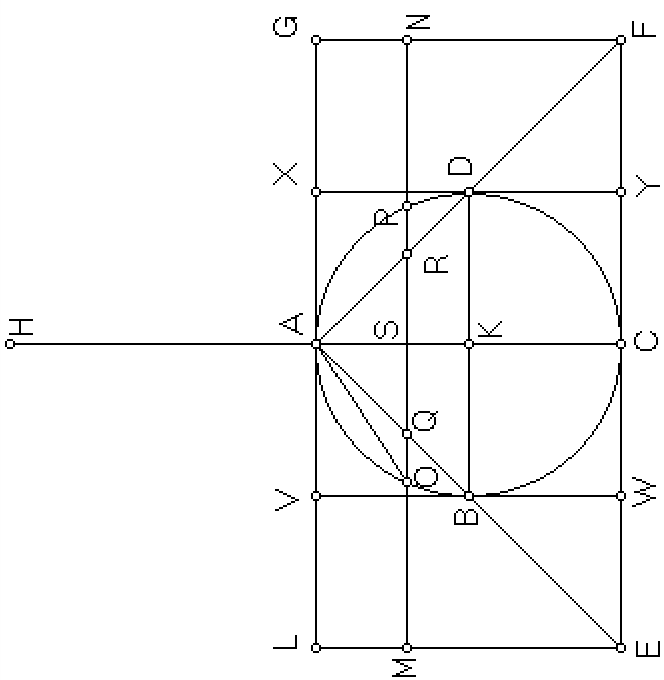


Σχέση μεταξύ όγκων (2)



- Επιλέγουμε ως A το σημείο που θα καθορίσει την ισορροπία.
- C είναι το σημείο έτσι ώστε AC=2r, όπου r η ακτίνα της σφαίρας.
- Θέτουμε H το σημείο που είναι αντιδιαμετρικά αντίθετο από το C.

Σχέση μεταξύ όγκων (3)

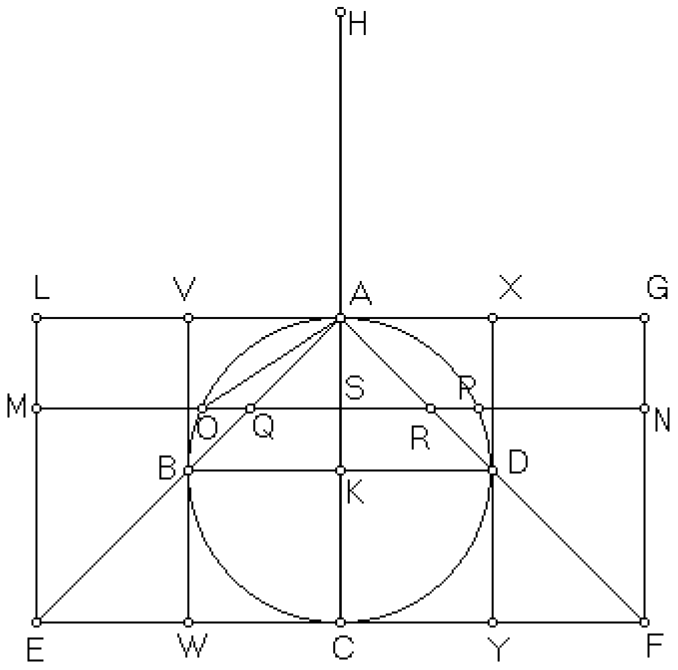


Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!
Θεωρούμε την τομή MN.
Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

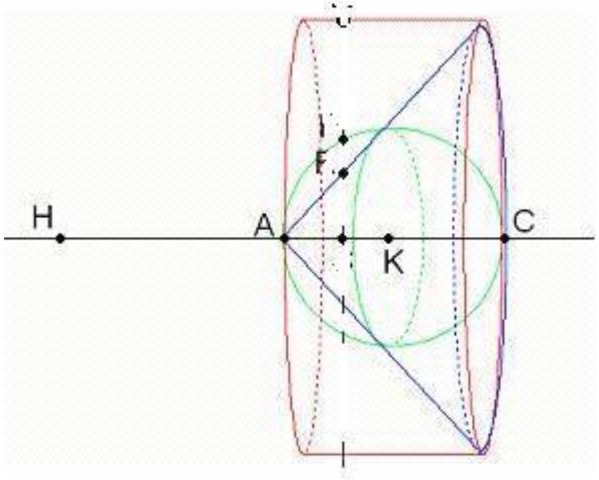
Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.
Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.
Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.

Σχέση μεταξύ όγκων (4)



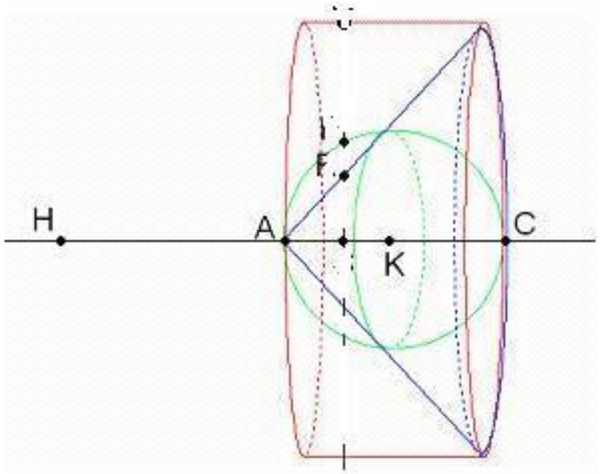
- Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου ισορροπεί ως προς το A αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο H και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το A) είναι μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου.
- Τι γίνεται αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Σχέση μεταξύ όγκων (5)



- **Συμπέρασμα**: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το A αν θέσουμε στο H την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο K (αφού K είναι το κέντρο βάρους του).

Σχέση μεταξύ όγκων (6)



Άρα

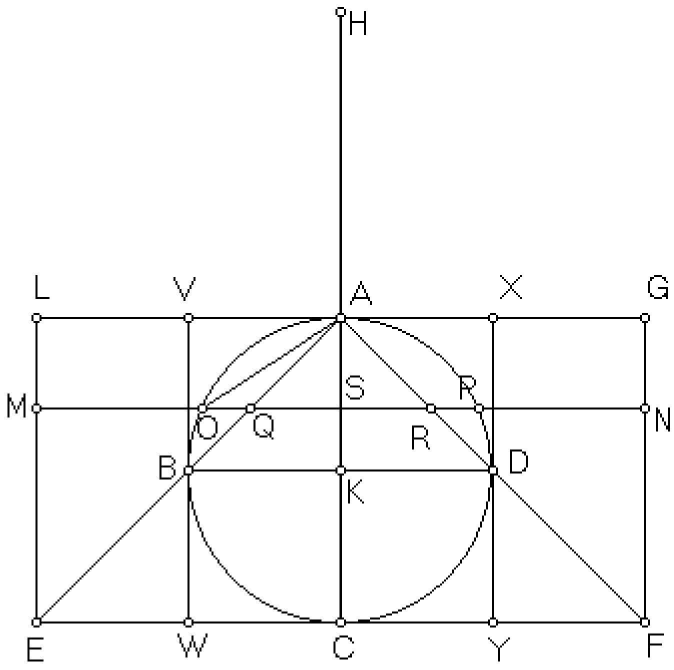
ΗΑ: ΑΚ=κύλινδρος : σφαίρα + κώνος

Αφού ΗΑ=2ΑΚ συμπεραίνουμε ότι

όγκος κόκκινου κυλίνδρου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των όγκων της σφαίρας και του μπλέ κώνου).

Όπως γνωρίζουμε από τον Ευκλείδη (12.13) ο όγκος του κόκκινου κυλίνδρου είναι ίσος με τρεις φορές τον όγκο του μπλέ κώνου. Τελικά ο όγκος του μπλε κώνου είναι δύο φορές ο όγκος της σφαίρας.

Σχέση μεταξύ όγκων (7)



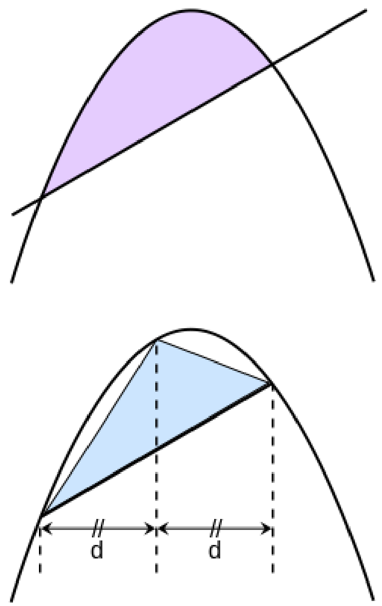
Τέλος συγκρίνουμε τον όγκου του μπλέ κώνου με τον όγκο του κώνου με βάση στο BD και ύψος KA.

Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (12.12) ο μπλε όγκος είναι οκταπλάσιος του μικρότερου. Άρα η σφαίρα μας έχει τετραπλάσιο όγκο από τον όγκου του μικρού κώνου.

Πάλι από τον Ευκλείδη ο όγκος του μικρού κώνου είναι το 1/3 του όγκου του αντίστοιχου κυλίνδρου, και άρα το 1/6 του όγκου του κυλίνδου που μας ενδιαφέρει.

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"



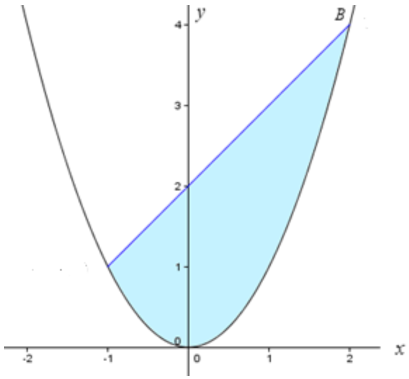
Εικόνα 6

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου (προσοχή στην κατασκευή του τριγώνου).

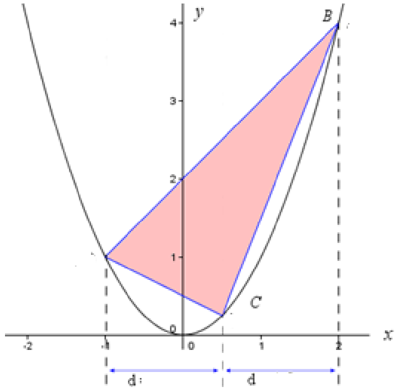
Το σημείο στην παραβολή που προσδιορίζει το τρίγωνο απέχει το μέγιστο από την τέμνουσα, και η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο είναι παράλληλη προς την τέμνουσα.

Ισορροπία και εμβαδά

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου.

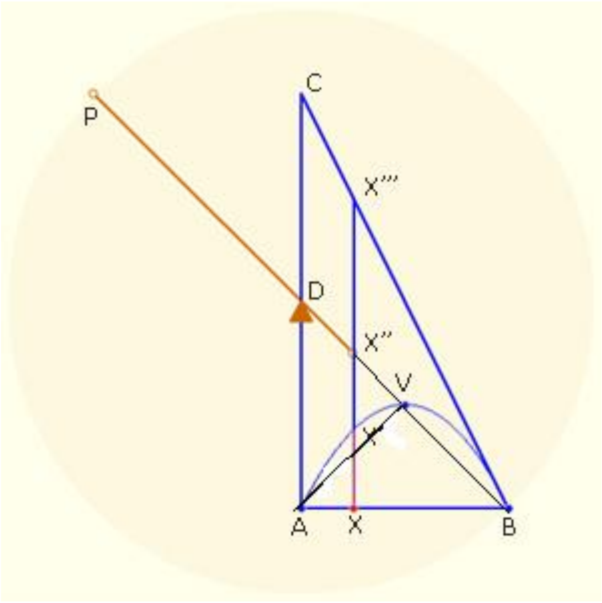


Ιδιότητα τριγώνου: τέμνουσα παράλληλη με εφαπτομένη στο C.



Μία απόδειξη ήταν Γεωμετρική. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης και υπολόγισε ένα άπειρο άθροισμα (όριο σειράς).

Απόδειξη βασισμένη στην έννοια της ισορροπίας



BC εφαπτομένη στο B,
BD=DP
Τρίγωνο ABC=4 τρίγωνο ABV
Ιδιότητες παραβολής

$$\frac{XX'''}{XX'} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$$

Βασική ιδέα: παίρνουμε τομές και θεωρούμε ότι το τρίγωνο ABC και το κομμάτι ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα AB αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που θα ισορροπήσουμε ως προς D.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** By User:Vladislav Pogorelov, derivative of works by Pbroks13 and Jim.belk (Parabola and inscribed triangle.svg) [Public domain], via Wikimedia Commons
- **Εικόνα 2:** The method of Archimedes.
- **Εικόνα 3:** "**ArPalimTypPage**" by The Walters Museum - http://www.archimedespalimpsest.net.. Licensed under Creative Commons Attribution 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArPalimTypPage.jpg#mediaviewer/File:ArPalimTypPage.jpg
- **Εικόνα 4:** "**ArPalimTyp2"** by The Walters Museum - archimedespalimpsest.net.. Licensed under CC BY 3.0 via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArPalimTyp2.jpg#/media/File:ArPalimTyp2.jpg

- **Εικόνα 5:** "**Esfera Arquímedes**" by Andertxuman - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esfera_Arqu%C3%ADmedes.jpg#mediaviewer/File:Esfera_Arqu%C3%ADmedes.jpg
- **Εικόνα 6:** By User:Vladislav Pogorelov, derivative of works by Pbroks13 and Jim.belk (Parabola and inscribed triangle.svg) [Public domain], via Wikimedia Commons

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 3: Αρχιμήδης. Ενότητα 3.2: Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης