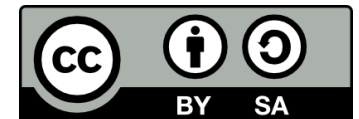




# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών





# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 4.2: Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ∞ Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- ∞ Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- ∞ Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.



# Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έργο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.



# Ερωτήματα



Τι είναι αριθμητική?

Τι είναι Άλγεβρα?

Είναι Άλγεβρα η «Γεωμετρική Άλγεβρα»?

Έκανε ο Διόφαντος Άλγεβρα?

Ασχολήθηκαν με Άλγεβρα οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι?



# Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (1)

Να βρεθεί το **μήκος** και το **πλάτος** έτσι ώστε η περίμετρος να είναι 13 και το εμβαδόν  $7 \frac{1}{2}$  :



Εικόνα 1

Διαδικασία:

βρες το μισό του 13:		$6 \frac{1}{2}$
βρες το μισό του $6 \frac{1}{2}$ :	$3 \frac{1}{4}$	
βρες $(3 \frac{1}{4}) (3 \frac{1}{4})$ :	$10 \frac{9}{16}$	
αφαίρεσε $7 \frac{1}{2}$ :	$3 \frac{1}{16}$	
πάρε τη (τετραγωνική) ρίζα:		$1 \frac{3}{4}$
μήκος:	$3 \frac{1}{4} + 1 \frac{3}{4} = 5$	
πλάτος:	$3 \frac{1}{4} - 1 \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{2}$	

<--19<sup>ος</sup> -17<sup>ος</sup> π.Χ.

YBC 4663





# Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (2)



Αν  $x, y$  είναι το μήκος και το πλάτος τότε  
θέλουμε να λύσουμε τις εξισώσεις:

$$x + y = 6\frac{1}{2}, xy = 7\frac{1}{2}$$

$$y = 6\frac{1}{2} - x, x\left(6\frac{1}{2} - x\right) = 7\frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 6\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 6\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$$
$$= 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(6\frac{1}{2}\right)^2 - 4 * 7\frac{1}{2}}}{2}$$
$$= \frac{6\frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6\frac{1}{2}}{2}\right)^2 - 7\frac{1}{2}}$$

**Οδηγίες:**

το μισό του  $6\frac{1}{2}$  :  $3\frac{1}{4}$

$(3\frac{1}{4})(3\frac{1}{4})$ :  $10\frac{9}{16}$

μείον  $\frac{1}{2}$ :  $3\frac{1}{16}$

(τετραγωνική) ρίζα:  $1\frac{3}{4}$

μήκος:  $3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = 5$

πλάτος:  $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$



# Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (3)

---



Το πρόβλημα με την περίμετρο και εμβαδό αντιστοιχεί στην εύρεση λύσης μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

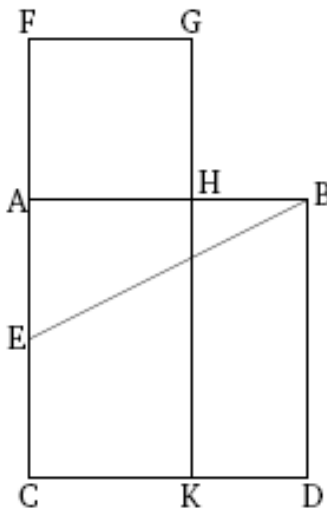
$$x^2 = bx + c, b > 0, c > 0$$

Σε άλλη πλάκα υπάρχει παράδειγμα εύρεσης λύσης της εξίσωσης

$$7x + 11x^2 = 6\frac{1}{4}$$



# Ευκλείδης, βιβλίο 2. 1, Στοιχεία



Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα  
ώστε το ορθογώνιο που ορίζει  
το τμήμα και το ένα μέρος του  
να είναι ισοδύναμο με το  
τετράγωνο που έχει πλευρά το  
άλλο μέρος.

$$a(a - x) = x^2$$

$$AB = a$$

Λύση:  $x = AF$  όπου  $AE$  είναι  
ίσο  $\frac{1}{2} AB$  και  $EF = EB$ .



# Διόφαντος ~ τρίτος αιώνας μ.Χ.



DIOPHANTI  
ALEXANDRINI  
ARITHMETICORVM  
LIBRI SEX.

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS  
LIBER VNVS.

*Nunc primò in Græcè et Latinè editi, atque absolutissimis  
Commentariis illustrati.*

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO  
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.



LVTETIAE PARISIORVM,  
Sumpçibus SEBASTIANI CRAMOISY, viâ  
Iacobæ, sub Ciconiis.

M. DC. XXI.  
CVM PRIVILEGIO REGIÆ

Εικόνα 2



# 3 τύποι δευτεροβάθμιων εξισώσεων

---

Ο Διόφαντος εξέτασε και τους 3 τύπους δευτεροβάθμιων  
εξισώσεων όπου  $a, b, c > 0$ :

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 = bx + c$$

$$ax^2 + c = bx$$



# Πρόβλημα I-28



Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

Συνθήκη του Διόφαντου για να έχει λύση το πρόβλημα:

«πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»



# Διόφαντος II



## Arithmeticon Liber II.

61

interuallam numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 3. adicitis unitatibus 10. quadratur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quaestioni.

### IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appropie eadem ratio est quae & appropie praecedenti quaestioni, nil enim aliud requiritur quam ut quadratos interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Caesones idem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

### QVAESTIO VIII.

PROPOSITUM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit ut 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. & quales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quod continet latera ipsius 16. effo 2 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. - 16 N. hoc & equalibunt unitatibus 16 - 1 Q. Communis adiciatur utriusque defectus, & a similibus auferantur similia, fiet 5 Q. & equalis 16 N. & fit 1 N. ¶ Erit igitur alter quadratorum ¶ alter uero ¶ & utriusque summa est 16 seu 16. & uterque quadratus est.

### OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

¶ Vnum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & cetera, licet nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fieri possit diuidere, cuius rei demonstratio mirabilis sane deest.

### QVAESTIO IX.

RESERVA oportet quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi lateris 1 N. alterius uero quotquotque numerorum cum defectu tot unitatum, quos coulat latera diuidendi. Effo itaque 2 N. - 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille uero 4 Q. + 16. - 16 N. Ceterum uolo utriusque simul & quadrari unitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. - 16 N. quadratur unitatibus 16. & fit 1 N. ¶ erit

## Εικόνα 3



# Γενικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.



Εικόνα 4

**Γενικό πρόβλημα:** Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.

**Ειδικό πρόβλημα:** Να διαιρέσεις το 16 σε δύο τετράγωνα.





# Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (1)

---

Πίσω στον Διόφαντο και στο πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα.

Ο Διόφαντος δίνει τις παρακάτω οδηγίες:

Έστω  $x^2$  το πρώτο τετράγωνο.

Αυτό που απομένει είναι  $16 - x^2$ .

Πρέπει να είναι τετράγωνο και αυτό.

Παίρνω το τετράγωνο της διαφοράς ενός οποιοδήποτε πολλαπλασίου του  $x$  μείον 4.



# Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (2)

---

Για παράδειγμα έστω το τετράγωνο του  $2x - 4$ :

$$\text{Τότε } (2x - 4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x.$$

και

$$(2x - 4)^2 = 16 - x^2$$

Τελικά

$$5x^2 = 16x \text{ άρα } x = 16/5.$$

Το ένα τετράγωνο είναι  $256/25$  και το άλλο είναι  $144/25$ .



# Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (3)

---



Γιατί ο Διόφαντος διαλέγει το δεύτερο τετράγωνο να είναι της μορφής  $(mx - 4)^2$

Αν  $m = 2$  τότε η λύση είναι  $x = 256/25$  ,  $y = 144/25$

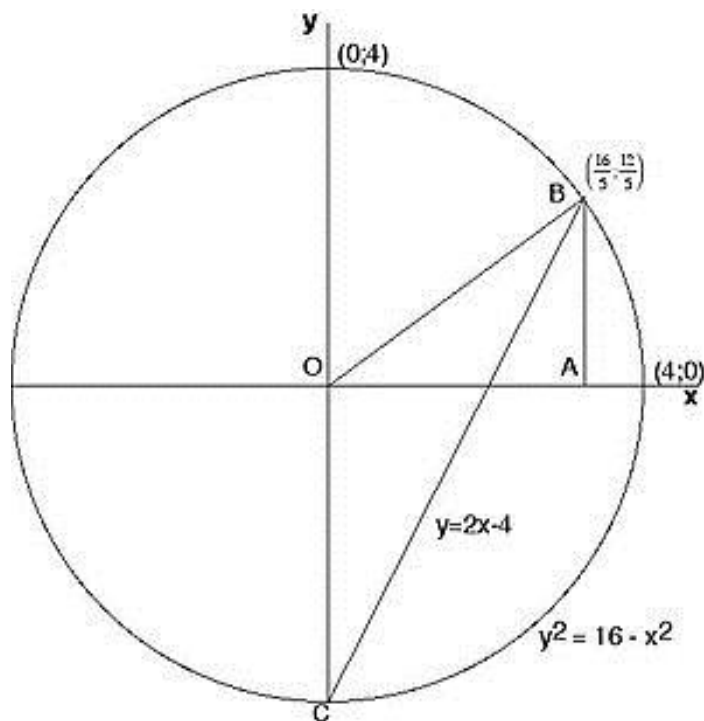
Αν  $m = 4$  τότε η λύση είναι  $x = 1024/289$  ,  $y = 3600/289$  --

Ο Διόφαντος στην ουσία λέει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις (και δίνει τρόπο εύρεσης Πυθαγορείων τριάδων).

Ποια είναι η γενική μέθοδος? Αν το αρχικό τετράγωνο ήταν  $c^2$  πως θα βρίσκαμε τα δύο τετράγωνα?



# Σημερινή Γεωμετρική ερμηνεία:



Ο κύκλος

$$y^2 = 16 - x^2$$

και η ευθεία

$$y = 2x - 4$$

τέμνονται σε δύο σημεία.

Το ένα σημείο τομής βρίσκεται στον άξονα των  $y$  ( $x = 0$ ). Το άλλο σημείο τομής έχει για  $x$ -συντεταγμένη την τιμή που ψάχνουμε.



# «Αριθμητική» Βιβλίο 4



«Αριθμητική» Βιβλίο 4: (Ο Διόφαντος αναφέρεται σε Πρόταση από το βιβλίο Πορίσματα, όπου εννοείται ότι είναι η απόδειξη)

Αριθμοί της μορφής  $4n + 3$  δεν μπορεί να είναι άθροισμα τετραγώνων (έχει η πρόταση αυτή απόδειξη με τα εργαλεία του Διόφαντου?)



# Μετάφραση της «Αριθμητικής»



Μέρος της «Αριθμητικής» αντιγράφηκε από τους Βυζαντινούς λόγιους,

(σχόλιο από Ιωάννη τον Χορτασμένο τον 14<sup>ο</sup> αιώνα)

Μεταφράστηκε στα Αραβικά τον 10<sup>ο</sup> αιώνα.

Το 1463 ο Regiomontanus αναφέρει ότι δυστυχώς η «Αριθμητική» δεν έχει ακόμα μεταφραστεί στα Λατινικά.

Μετάφραση του Bombelli 1570, (χρησιμοποίησε προβλήματα στο βιβλίο του Άλγεβρα).

Πιο γνωστή μετάφραση του Bachet 1621 (Fermat).



# Βιβλιογραφία



- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1:** <http://isaw.nyu.edu//exhibitions/before-pythagoras/>

☞ **Εικόνα 2: "Diophantus-cover"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-cover.jpg>

☞ **Εικόνα 3 και 4: "Diophantus-II-8-Fermat"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg>





# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 4: Διόφαντος και  
Αραβικά Μαθηματικά. Ενότητα 4.2: Δευτεροβάθμια εξίσωση και  
Πυθαγόρειες τριάδες». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

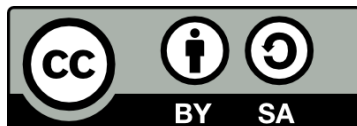
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

