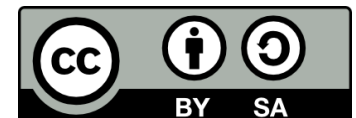




# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών





# Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4.3: Αράβικα Μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.

**Χαρά Χαραλάμπους**  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

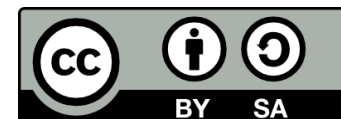


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ∞ Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- ∞ Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- ∞ Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.



# Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έργο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.



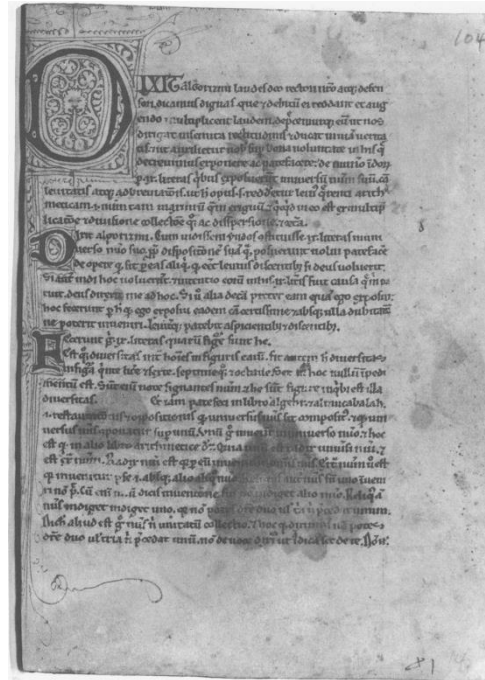
# al-Khwārizmī (780-850) Ιράκ



Εικόνα 1



# Kitāb al-Jam wa-l-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind (λατινικά *Dixit algorizm*)~825



Εικόνα 2





# *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala*



Εικόνα 3

*al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr  
wa'l-muqabala*

الكتاب

~830 المختصر في حساب الجبر والمقابل

al-jabr: αποκατάσταση—συμπλήρωση

Muqabala: ελάττωση---εξισορρόπηση



# Χάρτης του al-Kwarizmi



Εικόνα 4

Χάρτης του al-Kwarizmi (και γεωγράφος)



# Αλλαγή έμφασης (στην επίλυση δευτεροβάθμιων)



Αλλαγή έμφασης (στην επίλυση δευτεροβάθμιων):

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί αριθμός (οί) που να ικανοποιεί (ούν) κάποιες συνθήκες και όχι ακμές τετραγώνων.

Σε κάποιες περιπτώσεις ο **al-Khwārizmī** δέχεται δύο (θετικές) λύσεις σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Συγκρίνοντας το γραπτό του με του Διόφαντου παρατηρούμε ότι δίνει γεωμετρικού τύπου αποδείξεις.



Παράδειγμα: Ποιό πρέπει να είναι το τετράγωνο που όταν το προσθέσεις σε 10 από τις ρίζες του θα γίνει 39?



Διαιρείς τον αριθμό των ριζών και παίρνεις 5.

Αυτό το πολλαπλασιάζεις με τον εαυτό του και το γινόμενο είναι 25.

Προσθέτεις σε αυτό 39.

Το αποτέλεσμα είναι 64.

Παίρνεις της ρίζα του που είναι 8.

Αφαιρείς το μισό του αριθμού των ριζών που είναι 5, το υπόλοιπο είναι 3.

Αυτή είναι η ρίζα που ζητούσες.

$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + bx = c, b, c > 0$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

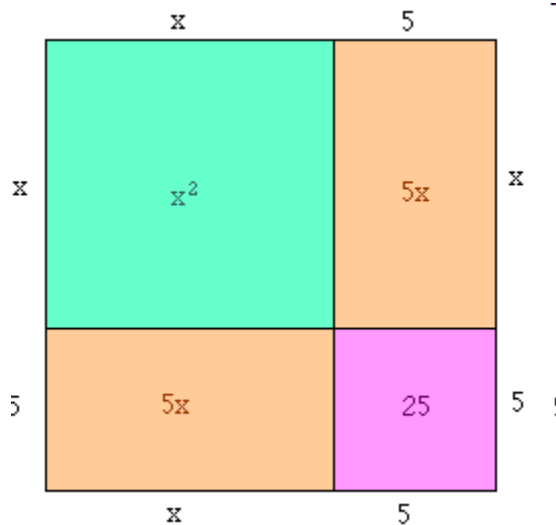
$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$



# Ρητορική προσέγγιση (1)



Πλήρωση του τετραγώνου: (απόδειξη για  $x^2 + 10x = 39$ )



$$x^2 + 10x = 39$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$$



# Ρητορική προσέγγιση (2)



Για κάθε μορφή πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού 2 δίνεται διαφορετική λύση και απόδειξη.

Στις μορφές αυτές ο al-Kwarizmi δεν δέχεται αρνητικούς συντελεστές.

Οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές, ενώ το 0 δεν είναι λύση.

Για τη λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

$$x^2 + c = bx$$

χρησιμοποιεί την παρακάτω γεωμετρική κατασκευή.



# Γεωμετρική κατασκευή



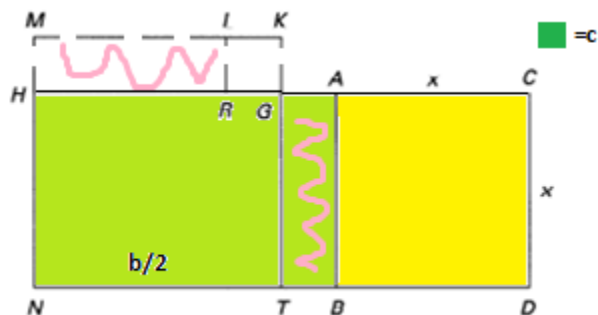
$$ND = b, BD = x, NT = b/2$$

Άρα

KIRG είναι τετράγωνο με  
ακμή

$$b/2 - x$$

και εμβαδόν  $(b/2)^2 - c$ .



# Ερωτήματα



Έμπνευση του al-Kwarizmi από αρχαίους Βαβυλώνιους, Διόφαντο και Ευκλείδη.

Είναι όμως οι αποδείξεις του al-Kwarizmi, του ιδίου «τύπου» όπως του Ευκλείδη?

Ο al-Kwarizmi δεν έγραφε εξισώσεις.

Χρησιμοποιούσε ο al-Kwarizmi το ΙνδοΑραβικό σύστημα?





# Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (1/2)



Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil.

(Αίγυπτος: ~850-930 μ.Χ.)

Σε ένα πρόβλημα υπολογίζει πως να χωρίσει κανείς το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε όταν το ένα μέρος πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, το άλλο με τη ρίζα του 8, και αφαιρείται από το πρώτο γινόμενο το δεύτερο, το αποτέλεσμα είναι 40.



# Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (2/2)



Μετά από πράξεις δίνει την απάντηση: Το μέρος είναι 10 και ρίζα 2 αφαιρώντας ρίζα του αθροίσματος του 42 και της ρίζας του 800, ενώ το άλλο μέρος είναι ...

\*\* ο Kamil χρησιμοποιεί με άνεση ριζικά μη ρητών\*\*

$$10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}}$$



# Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (Αίγυπτος: ~850-930 μ.Χ.)



Σε ένα πρόβλημα υπολογίζει πως να χωρίσει κανείς το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε όταν το ένα μέρος πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, το άλλο με τη ρίζα του 8, και αφαιρείται από το πρώτο γινόμενο το δεύτερο, το αποτέλεσμα είναι 40.

Μετά από πράξεις δίνει την απάντηση: Το μέρος είναι 10 και ρίζα 2 αφαιρώντας ρίζα του αθροίσματος του 42 και της ρίζας του 800, ενώ το άλλο μέρος είναι...

\*\* ο Kamil χρησιμοποιεί με άνεση ριζικά μη ρητών\*\*

$$10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}}$$

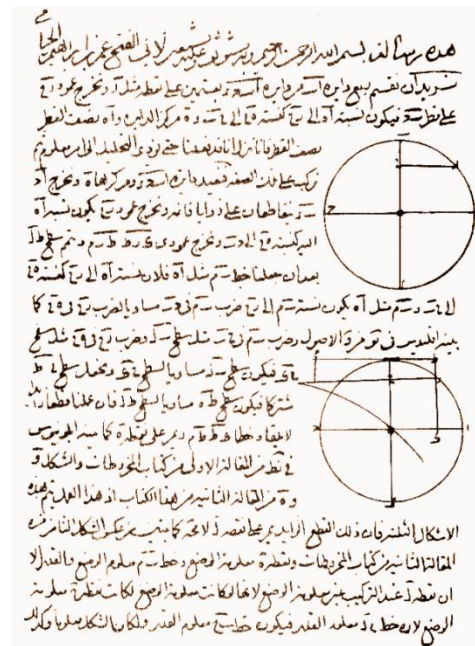


# Omar Khayyam (Περσία)

## (1048-1131)



Εικόνα 5



Εικόνα 6



# Παρένθεση: παραβολές



Ο Ιπποκράτης ο Χίος (περ. 430 π.Χ.).

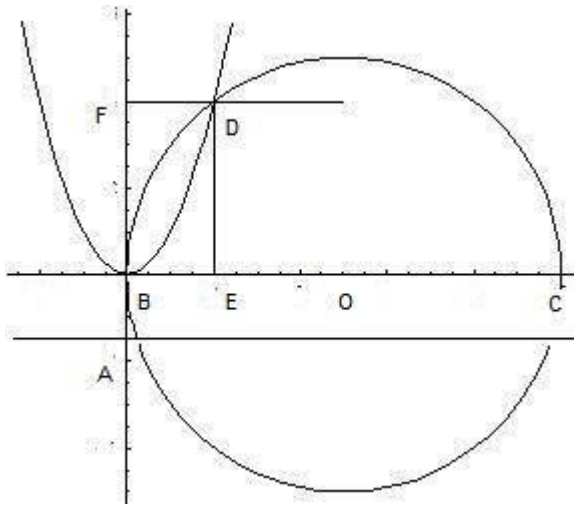
Μέναιχος (περ. 350 π.Χ.) για τον διπλασιασμό του κύβου.

Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) (κωνικές τομές---εμβαδό παραβολικού τμήματος).

«Κωνικά» του Απολλώνιου (περ. 250 π.Χ.)(όροι παραβολή, έλλειψη, υπερβολή).



# Κθαγμα: λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης



Κύβος και  $c$  ρίζες να είναι  $d$ .  
Έστω ο κύκλος με κέντρο  $O$   
και διάμετρο  $d/c$ .

Έστω η παραβολή με κορυφή  
 $B$ , άξονα κάθετο στο  $CB$  και  
διευθετούσα στο  $A$

όπου  $AB = (\text{τετραγωνική})$  ρίζα  
 $c/4$ .

Αν  $D$  είναι το σημείο τομής  
του ημικυκλίου και της  
παραβολής τότε  $BE$  είναι η  
λύση.



$$x^3 + cx = d$$



Σημερινή ερμηνεία: αναλυτικές εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής που περιγράφονται στη λύση του Khayyam (ο κύκλος με κέντρο στο  $(d/2c, 0)$ ).

$$\left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \quad x^2 = \sqrt{c}y$$

Έστω  $(x_0, y_0)$  οι συντεταγμένες του σημείου τομής. Τότε αντικαθιστώντας στις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$\left(x_0 - \frac{d}{2c}\right)^2 + y_0^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \Rightarrow x_0 \left(\frac{d}{c} - x_0\right) = y_0^2$$

$$x_0^2 = \sqrt{c}y_0 \Rightarrow x_0^4 = cy_0^2, x_0^4 = cx_0 \left(\frac{d}{c} - x_0\right) \Rightarrow x_0^3 = d - cx_0$$



# Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα



## Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	φ	?	ς	?

Εικόνα 7

Modern Devanagari	Hindu-Arabic
०	0
१	1
२	2
३	3
४	4
५	5
६	6
७	7
८	8
९	9

Εικόνα 8





# Aryabhata (476–550 μ.Χ.) (Ινδία)

---

*Το βιβλίο του «Aryabhatiya» είναι σε μαθηματικά (αριθμητική, άλγεβρα, τριγωνομετρία, σφαιρική τριγωνομετρία, δευτεροβάθμιες εξισώσεις, συνεχή κλάσματα, αριθμητικές σειρές, πίνακες ημιτόνων) και αστρονομία.*



Εικόνα 9



# Το μηδέν και η ιστορία του



Το μηδέν ως ψηφίο και ως αριθμός:

Κεντρική Αμερική ~ 36 π.Χ. (ψηφίο)

Πτολεμαίος ~130 μ.Χ. (ψηφίο +αριθμός)

Ινδία ~ 460 μ.Χ. (δεκαδική βάση+ σύστημα

θέσης+κωδικοποιημένη μορφή 10 ψηφίων)

al-Kwarizmi ~825

Ευρώπη 12<sup>ο</sup> αιώνα (όπως και τα άλλα Ινδο-αραβικά σύμβολα  
με το Liber abaci

(δεν υπάρχει χρόνος 0)



# Κλαύδιος Πτολεμαίος (85-165) Αλεξάνδρεια



Εικόνα 10

«Η μεγάλη σύνταξις της  
Αστρονομίας γνωστή ως η  
«Μεγίστη» και από τα  
Αραβικά ως «almagest».

(τριγωνομετρικοί  
πίνακες+ίππαρχος)

360° μοίρες για τον κύκλο

«Γεωγραφία» (μήκος και πλάτος)  
και ο Κολόμβος.



# Leonardo Fibonacci 1170-1250



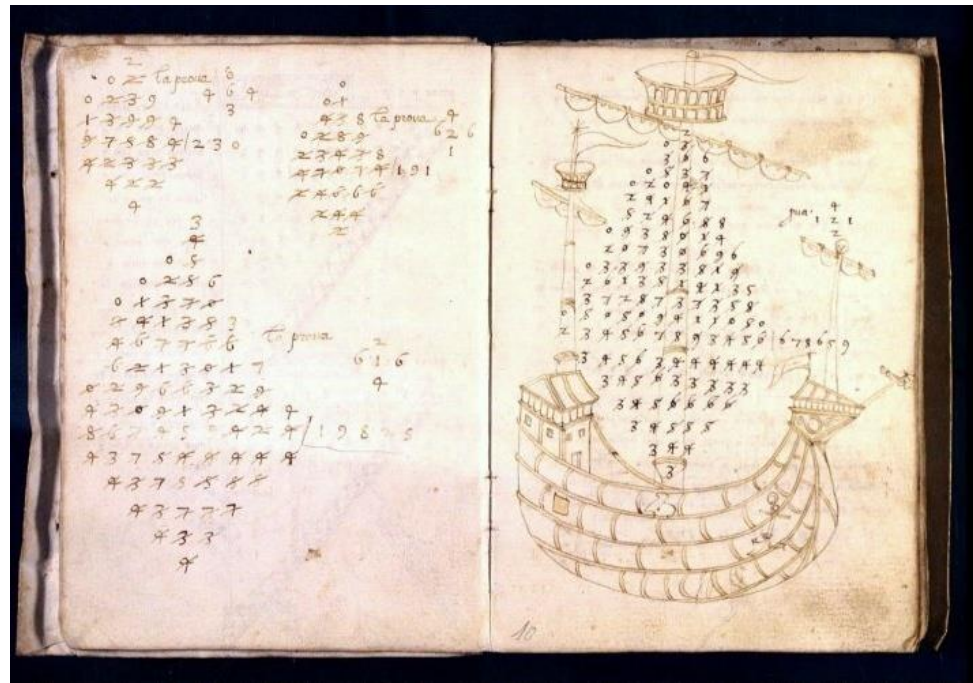
Εικόνα 11

Γιός του Bonaccio

Ινδοαραβικά ψηφία και  
Δύση



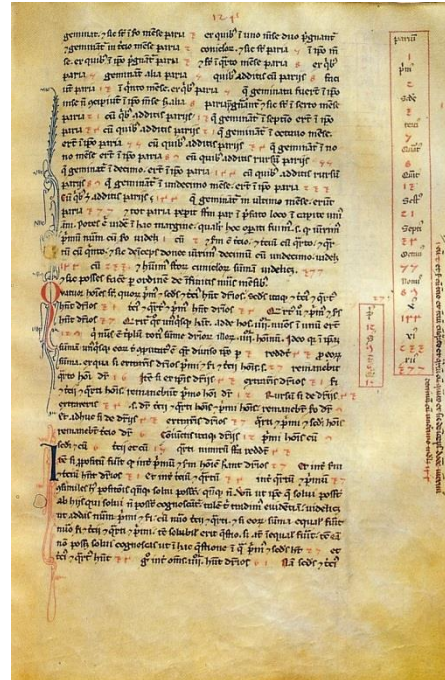
# Liber abaci (1202)



Εικόνα 12α



# Λiber abaci (το βιβλίο των υπολογισμών) (0-9 + σύστημα θέσης)

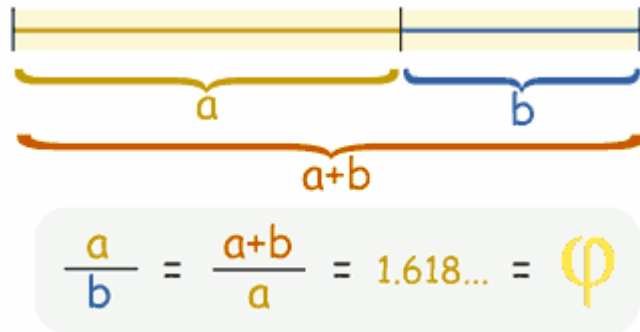


Εικόνα 12b





# Ακολουθία του Fibonacci και η χρυσή τομή

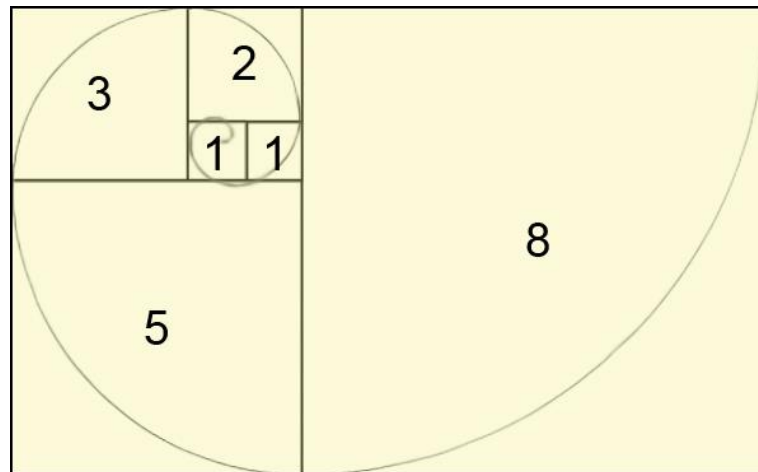


$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$
$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$$





# Η ακολουθία του Fibonacci (2)



Εικόνα 13



# Ηλιοτρόπιο + ακολουθίες Fibonacci



Εικόνα 14



# Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/6)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1:** "1983 CPA 5426 (1)" by Unknown -

<http://www.muslimheritage.com/topics/default.cfm?ArticleID=631>,  
[1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:1983\\_CPA\\_5426\\_\(1\).png#mediaviewer/File:1983\\_CPA\\_5426\\_\(1\).png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:1983_CPA_5426_(1).png#mediaviewer/File:1983_CPA_5426_(1).png)

☞ **Εικόνα 2:** "**Dixit algorizmi**" by Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi -  
scanned from facsimile (1963). Licensed under Public domain via  
Wikimedia Commons -

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dixit\\_algorizmi.png#mediaviewer/File:Dixit\\_algorizmi.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dixit_algorizmi.png#mediaviewer/File:Dixit_algorizmi.png)



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/6)



- ☞ **Εικόνα 3: Image-Al-Kitāb al-muḥtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala"** by Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi - John L. Esposito. The Oxford History of Islam. Oxford University Press. ISBN 0195107993.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Al-Kit%27s\\_map.png#mediaviewer/File:Image-Al-Kit%27s\\_map.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Al-Kit%27s_map.png#mediaviewer/File:Image-Al-Kit%27s_map.png)
- ☞ **Εικόνα 4: "Al-Khwarizmi's map"**. Via Wikipedia - [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Al-Khwarizmi%27s\\_map.png#mediaviewer/File:Al-Khwarizmi%27s\\_map.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Al-Khwarizmi%27s_map.png#mediaviewer/File:Al-Khwarizmi%27s_map.png)



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/6)



- ☞ **Εικόνα 5:** "Ömer Hayyam" by Unknown -  
<http://www.kentedair.com/2012/11/26/matrakci-nasuh-kimdir/>.  
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%96mer\\_Hayyam.jpg#mediaviewer/File:%C3%96mer\\_Hayyam.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%96mer_Hayyam.jpg#mediaviewer/File:%C3%96mer_Hayyam.jpg)
- ☞ **Εικόνα 6:** "Khayyam-paper-1stpage". Via Wikipedia -  
<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Khayyam-paper-1stpage.png#mediaviewer/File:Khayyam-paper-1stpage.png>
- ☞ **Εικόνα 7:** "Indian numerals 100AD". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indian\\_numerals\\_100AD.svg#mediaviewer/File:Indian\\_numerals\\_100AD.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indian_numerals_100AD.svg#mediaviewer/File:Indian_numerals_100AD.svg)
- ☞ **Εικόνα 8:** [http://en.wikipedia.org/wiki/Indian\\_numerals](http://en.wikipedia.org/wiki/Indian_numerals)



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/6)



- ☞ **Εικόνα 9:** "2064 aryabhata-crp" by This file is lacking author information. - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2064\\_aryabhata-crp.jpg#mediaviewer/File:2064\\_aryabhata-crp.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2064_aryabhata-crp.jpg#mediaviewer/File:2064_aryabhata-crp.jpg)
- ☞ **Εικόνα 10:** "Ptolemy 16century" by User:Stahlkocher - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ptolemy\\_16century.jpg#mediaviewer/File:Ptolemy\\_16century.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ptolemy_16century.jpg#mediaviewer/File:Ptolemy_16century.jpg)
- ☞ **Εικόνα 11:** "Fibonacci" by unknown medieval artist - Scan from "Mathematical Circus" by Martin Gardner, published 1981. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fibonacci.jpg#mediaviewer/File:Fibonacci.jpg>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/6)



- ☞ **Εικόνα 12a:** <http://imgarcade.com/1/liber-abaci/>
- ☞ **Εικόνα 12b:** "**Liber abbaci magliab f124r**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Liber\\_abbaci\\_magliab\\_f124r.jpg#mediaviewer/File:Liber\\_abbaci\\_magliab\\_f124r.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg#mediaviewer/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg)
- ☞ **Εικόνα 13:** "**AureaFibonacci**" di Original uploader was Valerio.b at it.wikipedia - Transferred from it.wikipedia. Con licenza Creative Commons Attribution 3.0 tramite Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AureaFibonacci.jpg#mediaviewer/File:AureaFibonacci.jpg>





# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/6)



- ☞ **Εικόνα 14:** "Helianthus whorl" di L. Shyamal - Opera propria. Con licenza Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 tramite Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helianthus whorl.jpg#mediaviewer/File:Helianthus whorl.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helianthus_whorl.jpg#mediaviewer/File:Helianthus_whorl.jpg)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 4: Διόφαντος και  
Αραβικά Μαθηματικά. Ενότητα 4.3: Αράβικα Μαθηματικά  
(δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci». Έκδοση: 1.0.  
Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

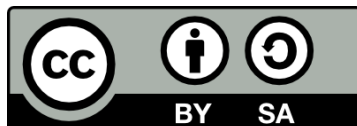
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

