Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.2: Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

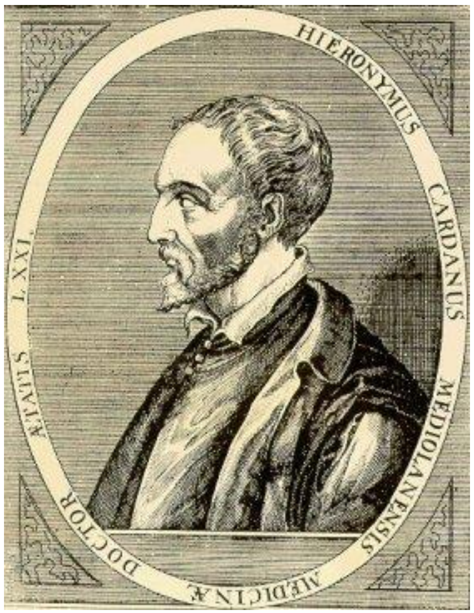
Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Girolamo Cardano (1501 – 1576) Μιλάνο (γιατρός-μαθηματικός)



Εικόνα 1

Ars Magna (1545)

Λύση τριτοβάθμιας (1)

$$x^3 + cx = d$$

«Κύβος και πρώτη δύναμη ισούνται αριθμό»

Λύση του Cardano

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

Η τιμή αυτή για το x είναι πάντα θετικός αριθμός.

Λύση τριτοβάθμιας (2)

$x^3 + cx = d$: Εφαρμογή όταν το $c = 6, d = 20$

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

O Cardano σημειώνει ότι η παραπάνω ποσότητα πρέπει να είναι ίση με 2.

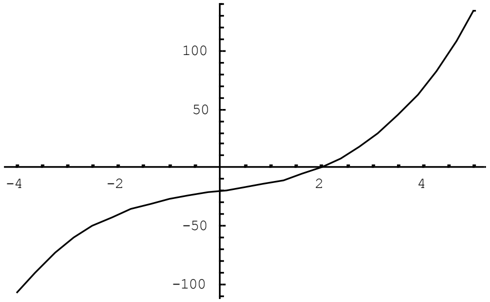
Λύση τριτοβάθμιας (3)

$$x^3 + 6x = 20 \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Οι τιμές του x που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3 + 6x = 20$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου →

$$x^3 + 6x - 20 = \\ = (x-2)(x^2 + 2x + 10)$$

Το γράφημα του $y = x^3 + 6x - 20$ με Mathematica →



Πως προκύπτει αλγεβρικά ο τύπος του Cardano

$$x^3 + cx = d$$

Έστω ότι u, v ώστε $u - v = d,\qquad uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$

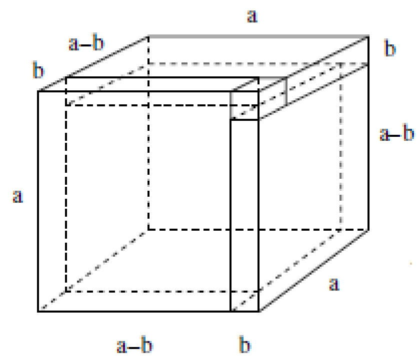
Τότε $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ είναι ρίζα για $x^3 + cx = d$

Πράγματι $c = 3\sqrt[3]{uv}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x^3 + cx &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + c(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= \left(u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v\right) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v = d \end{aligned}$$

Θα δούμε λοιπόν αν υπάρχουν τέτοια u, v.

Πως προκύπτει γεωμετρικά η ανάγκη αναζήτησης των u και v:



Από το σχήμα είναι φανερό ότι ο εξωτερικός κύβος (με ακμή α) προκύπτει από τον εσωτερικό κύβο (με ακμή a-b), τον μικρό κύβο (με ακμή b) στην επάνω δεξιά γωνία και άλλα τρία παραλληλεπίπεδα στις όψεις μπροστά, επάνω και δεξιά που φαίνονται στο σχήμα. Έτσι συγκρίνοντας τους όγκους προκύπτει

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab + b^3 = a^3 \quad \Rightarrow$$

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab = a^3 - b^3$$

Έτσι η αντιστοιχία είναι u=κύβος α ενώ v=κύβος β

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΟΜΩΣ ΤΕΤΟΙΑ u ΚΑΙ v ?

$$u - v = d, uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με v και αντικαταστήσουμε από τη δεύτερη τότε βρίσκουμε ότι

$$u^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = du$$

Βρίσκουμε τη (θετική) ρίζα u. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη σχέση $u - v = d$ και βρίσκουμε v.
Τέλος αφαιρούμε τις κυβικές ρίζες των u και v και προκύπτει ο τύπος του Cardano. (Γιατί υπάρχει θετική τέτοια ρίζα?)

Λύση τριτοβάθμιας (4)

$$x^3 + cx = d$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

Λύση τριτοβάθμιας (5)

Όταν $x^3 + cx = d$

ο Cardano έδωσε τον τύπο για ρίζα της εξίσωσης

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}}$$

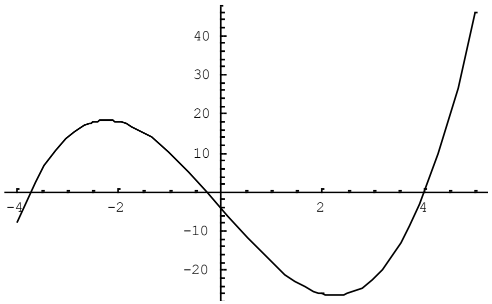
Τι γίνεται όταν $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 < 0$?

Η κυβική εξίσωση $x^3 = 15x + 4$ ανήκει στη παραπάνω κατηγορία.

Λύση τριτοβάθμιας με Mathematica

$$x^3 = 15x + 4 \qquad \rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Το γράφημα του $y = x^3 - 15x - 4$ με Mathematica είναι



Οι τρεις ρίζες του $x^3 = 15x + 4$ είναι πραγματικές! Η ρίζα που προκύπτει από τον τύπο του Cardano ποια από όλες είναι?

Cardano

- Ο Cardano δεν χρησιμοποίησε σύμβολα, και ο τύπος του δόθηκε ρητορικά (με λόγια).
- Ο προηγούμενος τύπος δίνει μόνο μία ρίζα του κυβικού πολυωνύμου. Τι γίνεται με τις υπόλοιπες?
- Υπάρχουν περιστάσεις στις οποίες βρίσκει αρνητικούς αριθμούς ως ρίζες: τους αποκαλεί «πλασματικούς».
- Παρατήρησε ότι το άθροισμα των ριζών είναι «το αντίθετο» του συντελεστή του x^2.
- Έδωσε γεωμετρική δικαιολόγηση για τη μεθοδολογία και τον τύπο.

Cardano και μιγαδικοί

Στο έργο του Cardano έχουμε την εμφάνιση μιγαδικών για την επίλυση ενός προβλήματος με δευτεροβάθμια εξίσωση:

Πρόβλημα: Να διαιρεθεί το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το γινόμενο να είναι 40:

Ο Cardano βρίσκει ότι τα μέρη πρέπει να είναι

$$5 + \sqrt{-15}\,, 5 - \sqrt{-15}$$

και σχολιάζει ότι η αριθμητική δεν οδηγεί πουθενά.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Jerôme Cardan**" by Unknown - this website. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg#mediaviewer/File:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης