



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.3: Τετραγωνισμός και εμβαδόν.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ☞ Σκέφτομαι άρα υπάρχω...Αναλυτική Γεωμετρία
- ☞ Μέθοδοι παραγωγίσης.
- ☞ Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- ☞ Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- ☞ Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- ☞ Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.



Σκοποί Ενότητας



∞ Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγωγίσης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.



Τετραγωνισμός και εμβαδόν (αδιαίρετα + απειροστά)



- ∞ Αρχιμήδης για το εμβαδόν παραβολικού τμήματος χρησιμοποίησε τρίγωνα.
- ∞ Cavalieri (1635), Fermat + Roberval (1636, αλληλογραφία)



1598-1647
Εικόνα 1



1601-1665
Εικόνα 2



1602-1675
Εικόνα 3



Μέθοδος των «αδιαιρέτων» Cavalieri

Με τη μέθοδο των «αδιαιρέτων» ο Cavalieri είχε οδηγηθεί στο παρακάτω γενικό συμπέρασμα για το παρακάτω εμβαδό (έχοντας αποδείξει τον τύπο μέχρι και για $n=9$).

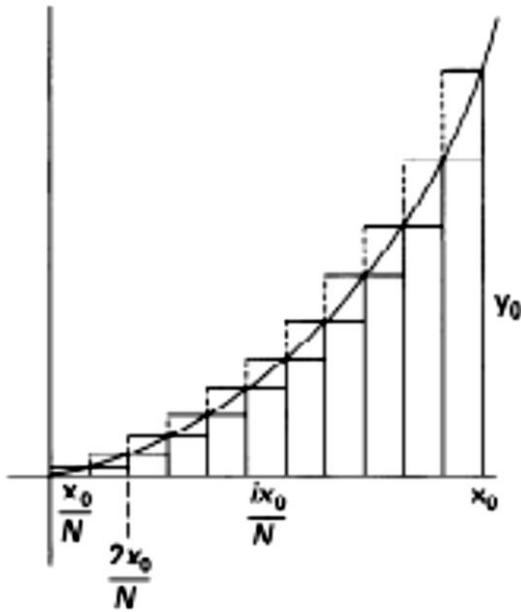
$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Οι Fermat και Roberval το απέδειξαν.



Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (1)

Η απόδειξη των Fermat+
Roberval (+ Pascal)



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από την παραβολή $y = x^k$, τον άξονα των x και δοθείσα κάθετη στο x_0 θα κατασκευάσουμε ορθογώνια όπως φαίνεται στην εικόνα.

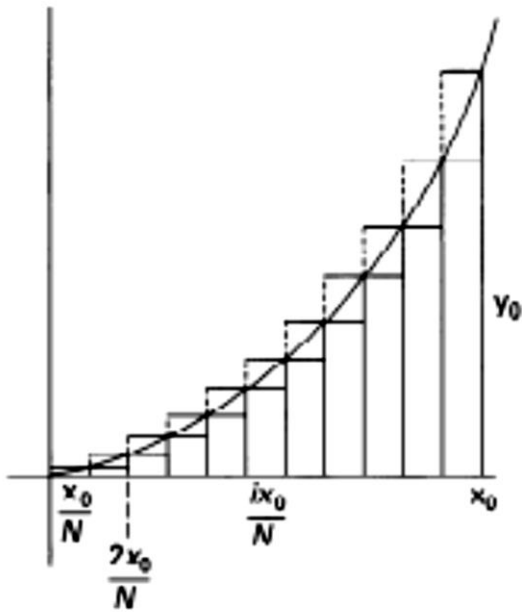
Το i -οστό ορθογώνιο με βάση x_0/N και ύψος $(ix_0/N)^k$ έχει εμβαδόν $\frac{(ix_0)^k x_0}{(N)^k N}$. Αθροίζοντας τα εμβαδά των ορθογώνιων έχουμε συνολικά

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}} (1^k + \dots + N^k)$$

Αντίστοιχα για τα ορθογώνια με βάση x_0/N και ύψος $((i-1)x_0/N)^k$ βρίσκουμε το άθροισμα ...



Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (2)



$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}} (1^k + \dots + (N-1)^k) =$$

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}} (1^k + \dots + N^k) - \frac{x_0^{k+1}}{N}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό A είναι ανάμεσα στις ποσότητες

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}} (1^k + \dots + N^k) - \frac{x_0^{k+1}}{N}$$

και

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}} (1^k + \dots + N^k)$$



Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (3)



Όμως οι Fermat, Roberval γνώριζαν ότι η έκφραση

$$\frac{(1^k + \dots + N^k)}{(N)^{k+1}} \sim \frac{1}{k+1}$$

οταν το N αυξανόταν.

Έτσι αφού η ποσότητα

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{N}$$

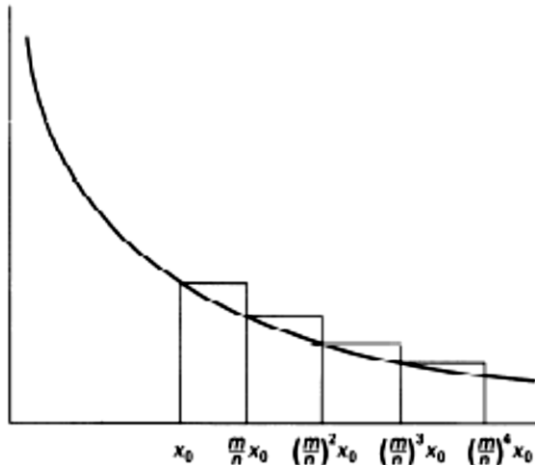
μπορούσε να γίνει όσο μικρή ήθελαν για κατάλληλο N

Κατέληξαν στο ότι όντως

$$\int_0^{x_0} x^k dx = A = \frac{x_0^{k+1}}{k+1}.$$



Fermat (1)



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από την καμπύλη $y = x^{-k}$, τον άξονα των x και στα δεξιά του x_0 θα κατασκευάσουμε ορθογώνια όπως φαίνεται στην εικόνα. Η βάση του i -οστου ορθογωνίου ορίζεται από $(m/n)^{i-1}x_0$ και $(m/n)^i x_0$ με $m > n$.

Το εμβαδόν R_1 του πρώτου ορθογωνίου είναι

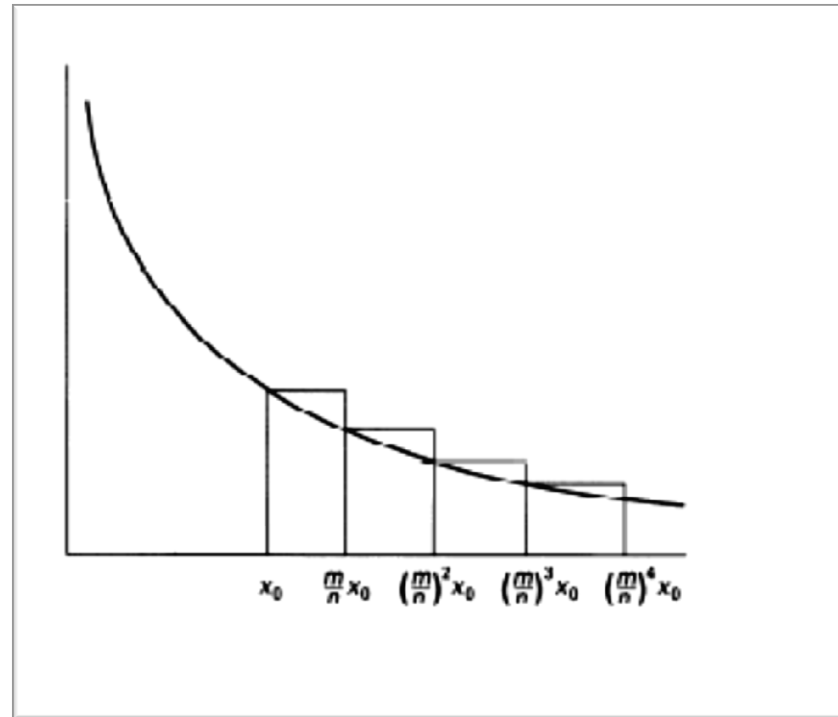
$$R_1 = x_0 \left(\frac{m}{n} - 1 \right) x_0^{-k} = \left(\frac{m}{n} - 1 \right) x_0^{-k+1}$$

Αν R_i είναι το εμβαδόν του i -ορθογωνίου τότε

$$R_i = \left(\frac{n}{m} \right)^{(i-1)(k-1)} R_1$$



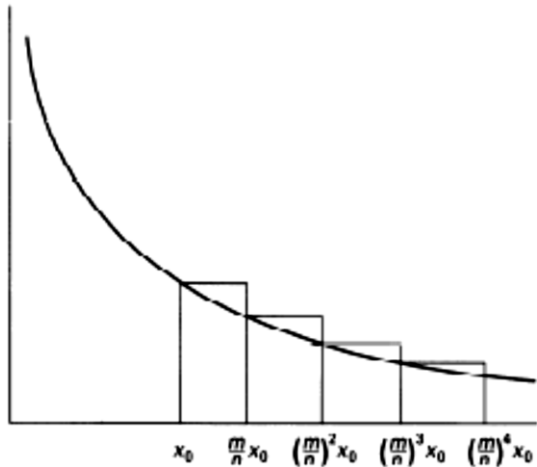
Fermat (2)



Αθροίζοντας άπειρα εμβαδά



Fermat (3)



$$R_1 \left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)} + \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k-1)} + \dots \right) \\ = \frac{1}{x_0^{k-1} \frac{n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)}}$$

Όταν το $\frac{m}{n}$ τείνει στην μονάδα τότε κάθε όρος $(m/n)^i$ στον παρονομαστή τείνει στην μονάδα και έτσι

$$A = \frac{1}{k-1} \frac{1}{x_0^{-k+1}}.$$



Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού



1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.
2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

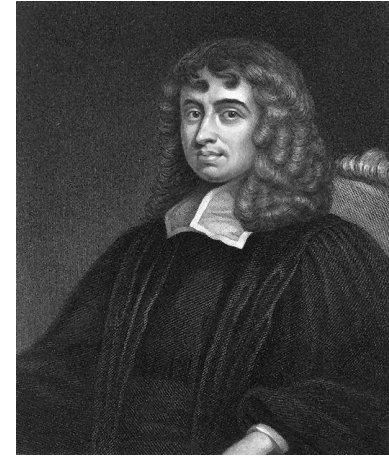


Barrow (1630-1677) (ιερέας)

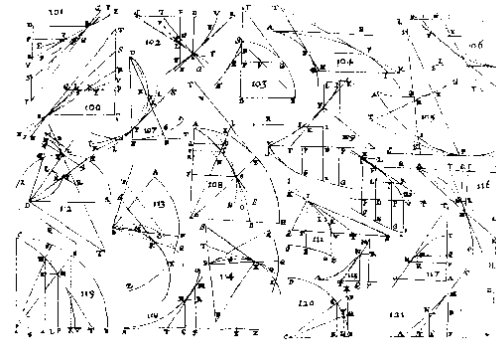


Καθηγητής αρχαίων Ελληνικών
και Μαθηματικών (1663-1669)
στο
πανεπιστήμιο του Cambridge
εκλέχτηκε: Fellow of Royal
Society (1663)

Υπονόησε αντίστροφη σχέση
ανάμεσα
στα προβλήματα των
εφαπτομένων
και αυτά του τετραγωνισμού
("Lectiones geometricae")



Εικόνα 4



Εικόνα 5



James Gregory (1638-1675)



Εικόνα 6

(παραγνωρισμένο το έργο του για το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, σειρές Taylor (δημοσιεύθηκαν από Taylor το 1716) και άλλα πολλά ...)



Christian Huygens Netherlands (1629-1695)



Εικόνα 7

Σημαντική Μαθηματική φυσιογνωμία της εποχής.
Διαμάχη με τον Gregory.



Βιβλιογραφία



- ∞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ∞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ∞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1:** "Bonaventura Cavalieri". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons – http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bonaventura_Cavalieri.jpeg#mediaviewer/File:Bonaventura_Cavalieri.jpeg
- ☞ **Εικόνα 2:** "Pierre de Fermat" by <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#/media/File:Pierre_de_Fermat.jpg
- ☞ **Εικόνα 3:** "Gilles personne de roberval" by TESTELIN Henri detail du tableau de TESTELIN Henri d'après LE BRUN Charles. Licensed under



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)



Public domain via Wikimedia Commons –

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gilles_personne_de_roberval.jpg#mediaviewer/File:Gilles_personne_de_roberval.jpg

☞ **Εικόνα 4:** "Isaac Barrow". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Barrow.jpg#mediaviewer/File:Isaac_Barrow.jpg

☞ **Εικόνα 5:** <http://www-history.mcs.stand.ac.uk/Bookpages/Barrow7a.gif>

☞ **Εικόνα 6:** "James Gregory" by Unknown - <http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/PictDisplay/Gregory.html>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_Gregory.jpeg#mediaviewer/File:James_Gregory.jpeg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)



- ☞ **Εικόνα 7: "Christiaan Huygens"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του
Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.3: Τετραγωνισμός και εμβαδόν.».
Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

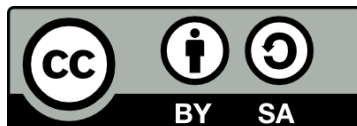
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

