



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

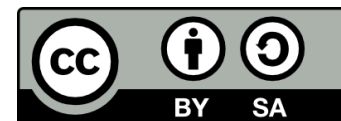


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.5: Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι: οι τετράδες του Hamilton.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ↻ Εισαγωγή.
- ↻ Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- ↻ Galois και Θεωρία Ομάδων.
- ↻ Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- ↻ Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- ↻ Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- ↻ Emily Noether.



Σκοποί Ενότητας



Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.



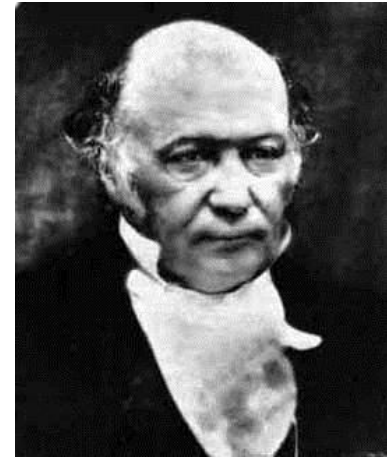
Η μετάλλαξη της Άλγεβρας η μεγάλη στροφή



Οι ακέραιοι του Gauss
(1829)
Εικόνα 1



Ομάδες (1832)
Εικόνα 2



Τετραδικοί αριθμοί (1843)
Εικόνα 3



Θεωρία Δακτυλίων



Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Ξεκίνημα: αλγεβρική θεωρία αριθμών, αλγεβρική γεωμετρία, θεωρία αναλλοιώτων.

Μη Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Ξεκίνημα: τετραδικοί αριθμοί του Hamilton (1843).



Τετραδικοί αριθμοί (1)



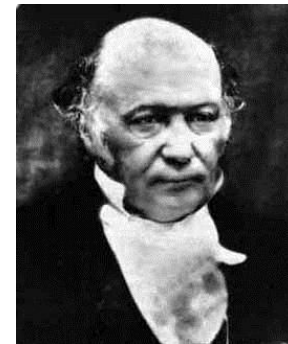
Οι τετραδικοί αριθμοί είναι στοιχεία της μορφής

$$a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Η πρόσθεση τους γίνεται ανα συνταταγμένη:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός τους ικανοποιεί τις σχέσεις:



Εικόνα 4



Τετραδικοί αριθμοί (2)



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

όπου

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιεί όλους τους κανόνες που έχουν οι πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί εκτός από την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.



Τετραδικοί αριθμοί (3)



Ένας άλλος τρόπος για να γράψει κανείς τους τετραδικούς αριθμούς είναι σαν τετράδες:

$$(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Έτσι ώστε η πρόσθεση να γίνεται ανά συντεταγμένη ενώ ο πολλαπλασιασμός προκύπτει ως

$$\begin{aligned} &(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 \\ &\quad - d_1c_2, \dots, \dots) \end{aligned}$$

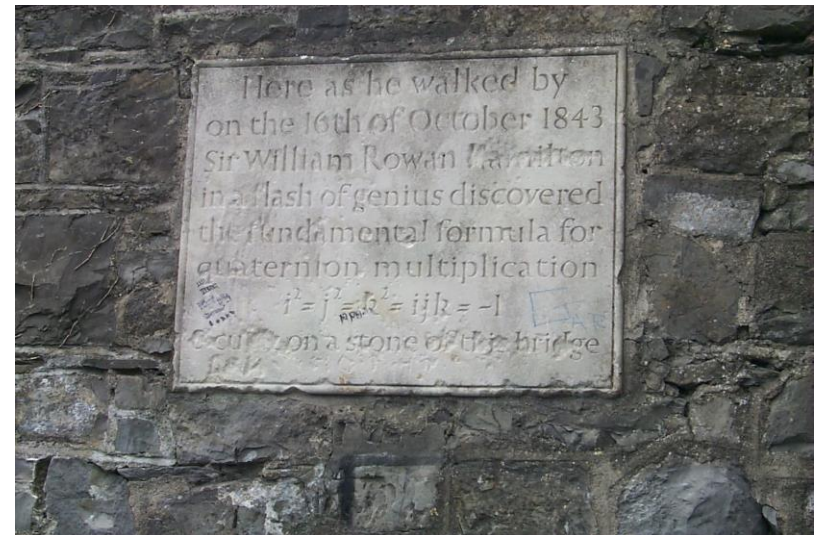


Τετραδικοί αριθμοί (4)



Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι τελευταίες δύο συντεταγμένες είναι μηδέν, τότε έχουμε τους μιγαδικούς αριθμούς.

Η αρχική προσπάθεια του Hamilton ήταν να επεκτείνει το σώμα των μιγαδικών σε τριάδες αλλά κατάλαβε ότι αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει.



Εικόνα 5



Τετραδικοί αριθμοί (5)



Ακολούθησαν πολλά καινούργια παραδείγματα όπου ο πολλαπλασιασμός δεν ικανοποιούσε την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό των τετραγωνικών πινάκων (Cayley 1855, 1858).



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1: "Carl Friedrich Gauss"** by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

☞ **Εικόνα 2: "Galois"**. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galois.jpg#mediaviewer/File:Galois.jpg>

☞ **Εικόνα 3: "WilliamRowanHamilton"** by Unknown - <http://mathematik-online.de/F77.htm>.

Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)



- ☞ **Εικόνα 4: "WilliamRowanHamilton"** by Unknown - <http://mathematik-online.de/F77.htm>.
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg>
- ☞ **Εικόνα 5: "Broom bridge plaque"** by Original uploader was Wisher at en.wikipedia - Transferred from en.wikipedia; transferred to Commons by User:Premeditated Chaos using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Broom_bridge_plaque.jpg#mediaviewer/File:Broom_bridge_plaque.jpg



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη
Άλγεβρα. Ενότητα 9.5: Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι: οι τετράδες του
Hamilton». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

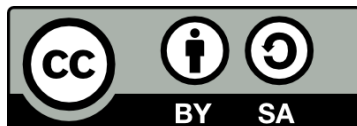
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

