



# Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # 1: Εισαγωγή στη Θεωρία Γράφων

Ιωάννης Μανωλόπουλος  
Τμήμα Πληροφορικής



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





# Εισαγωγή στη Θεωρία Γράφων

## Ο Γράφος



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Περιεχόμενα ενότητας

---

1. Η απαρχή της Θεωρίας Γράφων
  - i. Εισαγωγή
  - ii. Leonhard Euler (1707-1783)
  - iii. Οι 7 γέφυρες του Königsberg
2. Ο Γράφος



# Σκοποί ενότητας

---

- Πρώτη γνωριμία με τους γράφους
- Κατανόηση της εφαρμογής της Θεωρίας Γράφων





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Η απαρχή της Θεωρίας Γράφων

# Εισαγωγή

- Το **Königsberg** της Πρωσίας ιδρύθηκε το 1255 από Τεύτονες ιππότες και ήταν η πρωτεύουσα της Ανατολικής Πρωσίας μέχρι το 1945.
- Σήμερα είναι το Ρωσικό **Kaliningrad** (μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας στη Βαλτική)
- Ήταν μεγάλο κέντρο για αιώνες και πατρίδα των Goldbach, Hilbert, Kant και Wagner.





# Leonhard Euler (1707-1783) I

- Γεννήθηκε στη Βασιλεία και θα γίνονταν πάστορας, όπως ο πατέρας του.
- Σπούδασε Εβραϊκά και Θεολογία αλλά πήρε και μαθήματα από τον Bernoulli.
- Το 1727 έπιασε δουλειά στο Ιατρικό τμήμα του Πανεπιστήμιο της Αξίας Πετρούπολης αλλά μετά το θάνατο της Αικατερίνης I ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά.

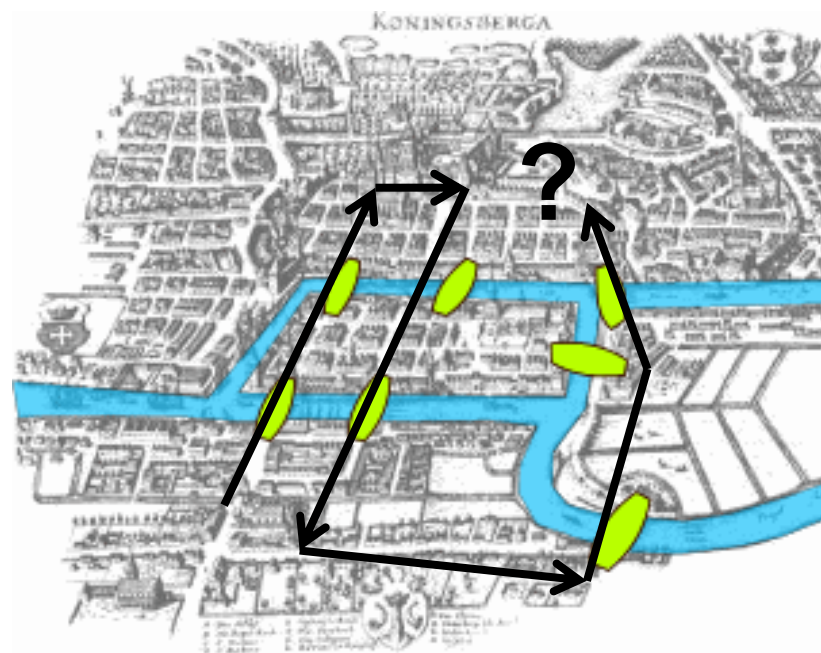
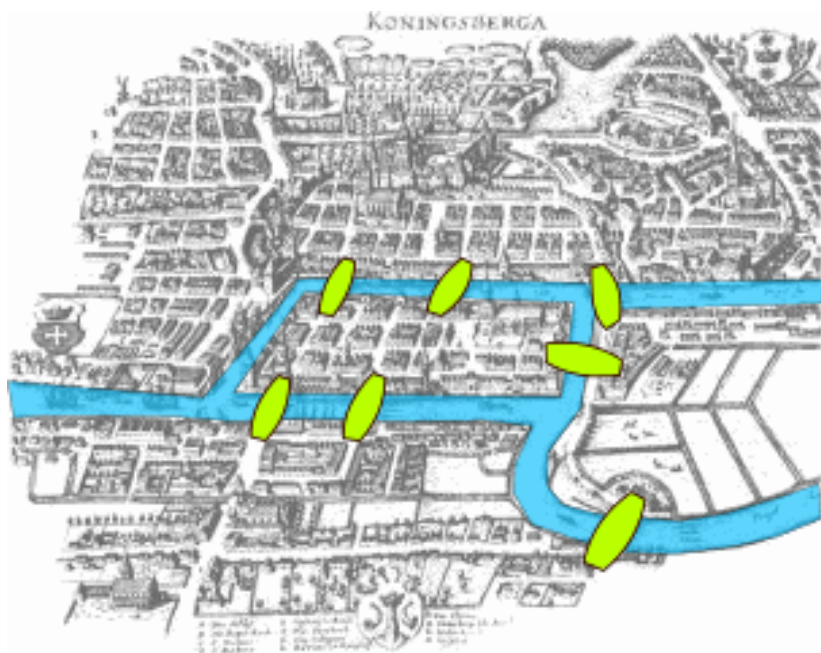


# Leonhard Euler (1707-1783) II

- Παντρεύτηκε το 1733, είχε 13 παιδιά, ενηλικιώθηκαν τα 5.
- Το 1741 μετακόμισε στο Βερολίνο και έμεινε 25 χρόνια.
- Δημοσίευσε >500 βιβλία και εργασίες εν ζωή και 400 μετά θάνατο.
- Εφηύρε τους συμβολισμούς  $i$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $f(x)$  και άλλους!
- Έχασε την όραση του αλλά έγινε παραγωγικότερος. Είπε: “now I have fewer distractions”



# Οι 7 γέφυρες του Königsberg



Εικόνα 1

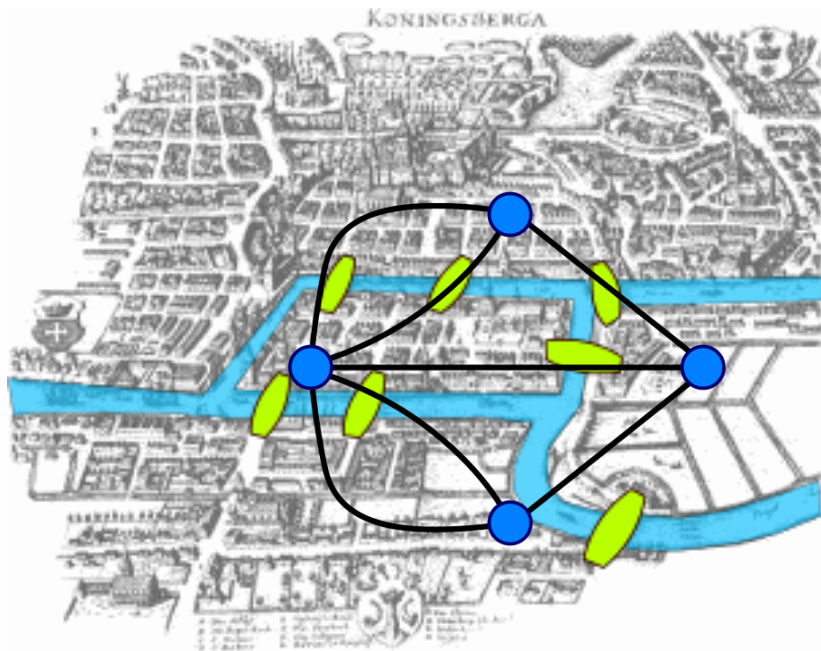


ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

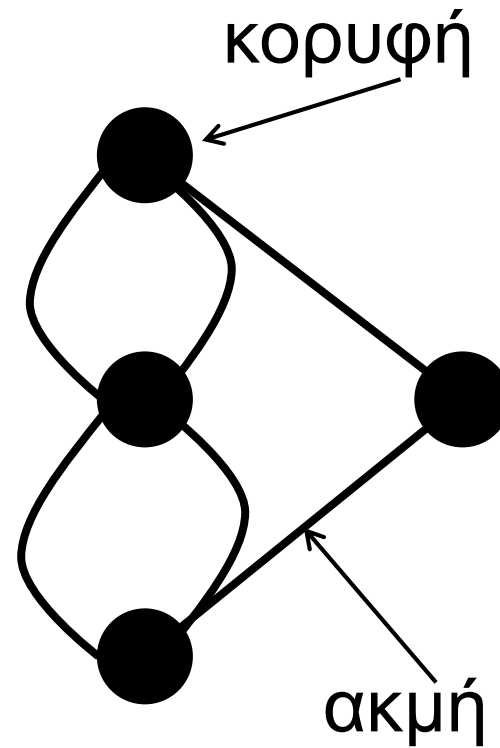
---

# Ο γράφος

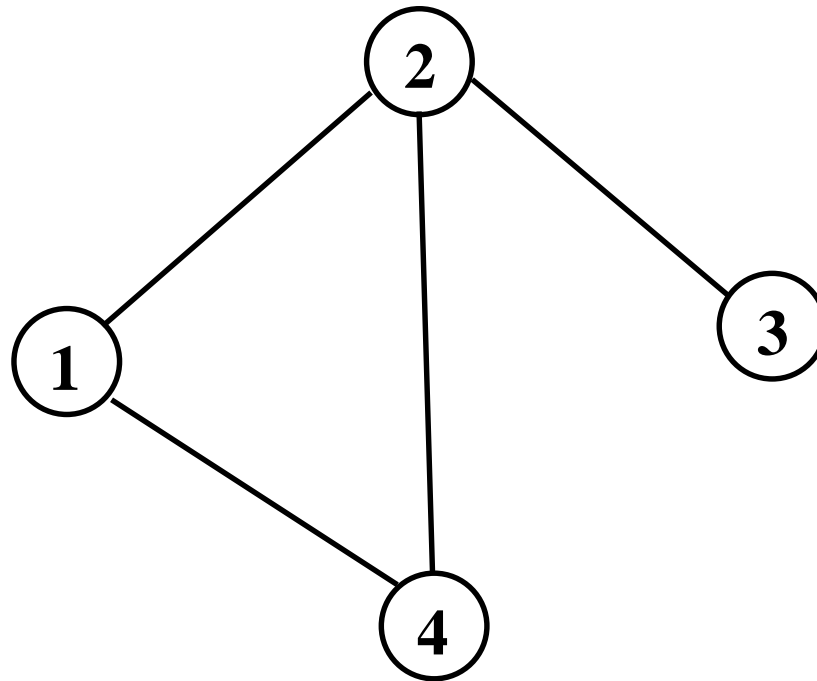
# Οι 7 γέφυρες του Königsberg σε γράφο



Εικόνα 2



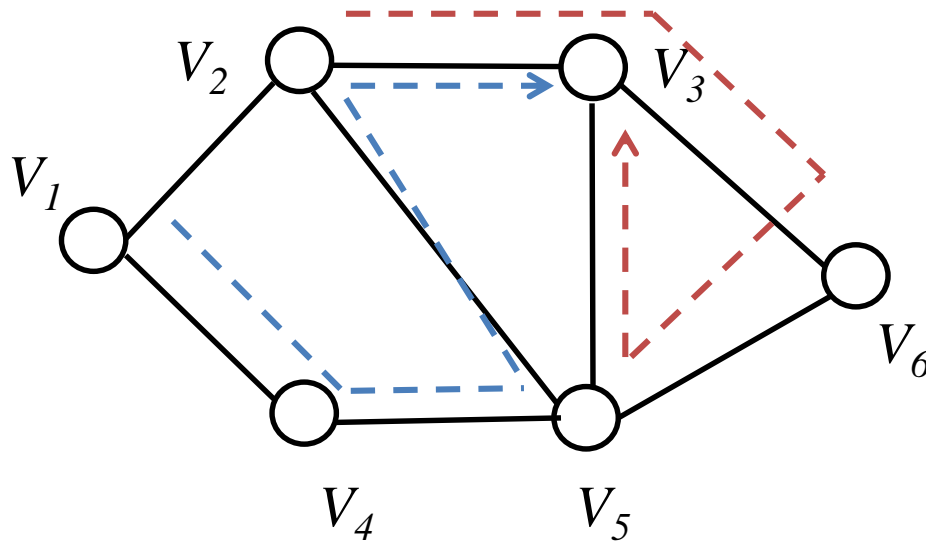
# Μη κατευθυνόμενος γράφος



Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου γράφου



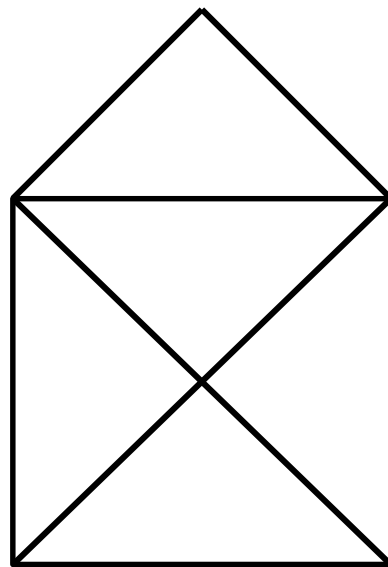
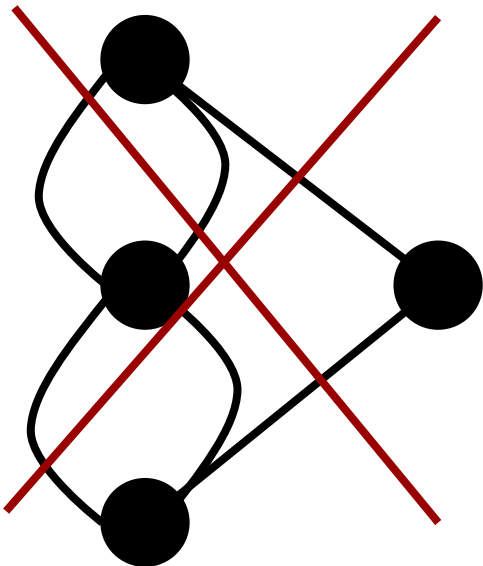
# Περίπατος και Μονοπάτι



- **Περίπατος:**  
ακολουθία  
συνδεδεμένων  
κορυφών
- **Μονοπάτι:**  
περίπατος χωρίς  
επανάληψη  
κορυφών.



# Λύση Euler



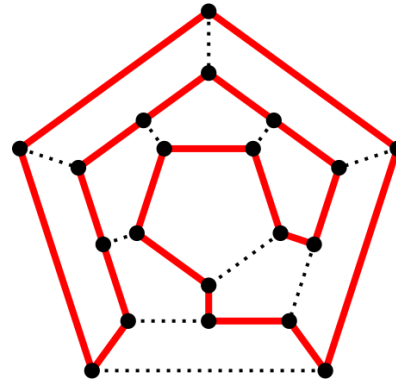
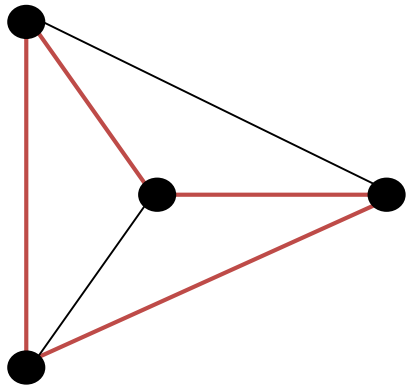
Μονοκοντυλιά  
traversability

- Συνθήκη για να υπάρχει μονοπάτι που περνά από όλες τις κορυφές: όλες οι κορυφές να έχουν άρτιο βαθμό





# Εύρεση κύκλων σε πολύεδρα

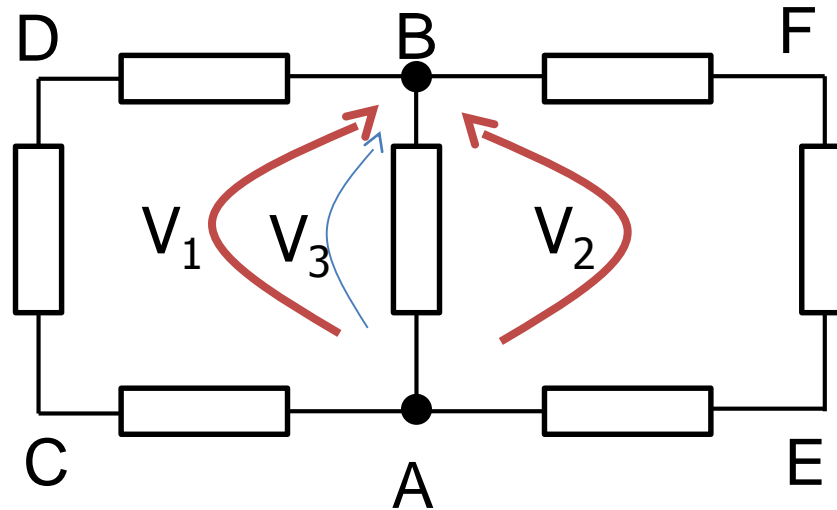


Εικόνα 2

Hamiltonian κύκλοι σε πλατωνικούς γράφους



# Δένδρα σε ηλεκτρικά κυκλώματα

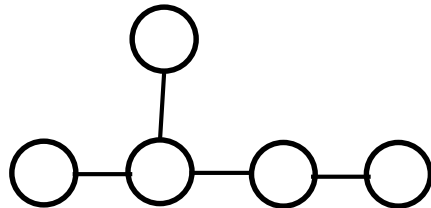
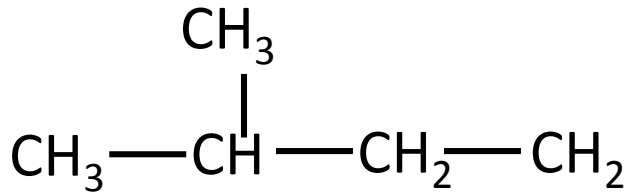


$$V_1 = V_2 = V_3$$

Gustav Kirchhoff



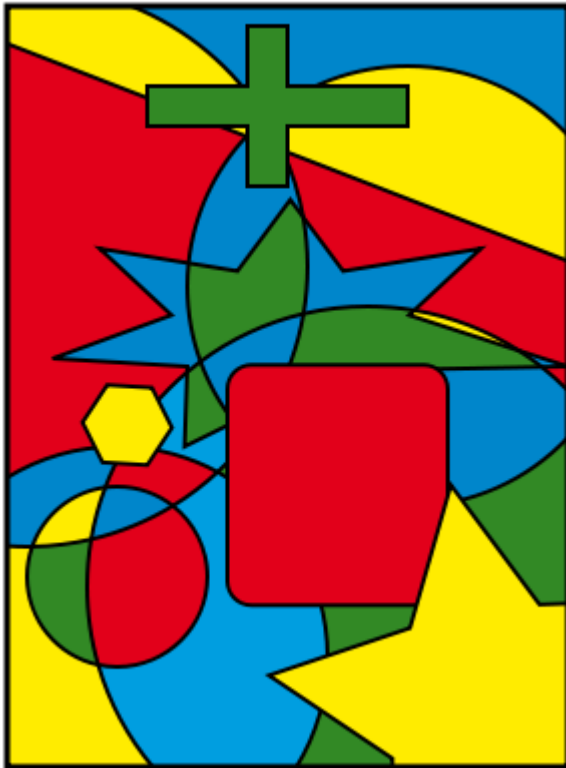
# Απαρίθμηση σε χημικά ισομερή



- Arthur Cayley
- James J. Sylvester
- George Polya



# Χρωματισμός χαρτών



Εικόνα 3

- Francis Guthrie
- Auguste DeMorgan



# Η Εικασία των 4 χρωμάτων

- Το 1976, οι Kenneth Appel και Wolfgang Haken ανακοίνωσαν την απόδειξη (με τη βοήθεια υπολογιστή) της Εικασίας των 4 χρωμάτων, ένα άλυτο πρόβλημα επί αιώνες.



# Εφαρμογές γράφων I

- Τηλεπικοινωνίες
  - Κορυφές: τηλεφωνικές συσκευές, υπολογιστές, δορυφόροι.
  - Ακμές: καλώδια, οπτικές ίνες, αναμεταδόσεις μικροκυμάτων
  - Ροή: Ήχος, βίντεο, πακέτα
- Κυκλώματα
  - Κορυφές: Πύλες, καταχωρητές, επεξεργαστές
  - Ακμές: Καλώδια
  - Ροή: Ρεύμα



# Εφαρμογές γράφων II

- Μηχανές
  - Κορυφές: συνδέσεις.
  - Ακμές: ράβδοι, ελατήρια
  - Ροή: Θερμότητα, ενέργεια
- Υδραυλικά συστήματα
  - Κορυφές: Πύλες, καταχωρητές, επεξεργαστές
  - Ακμές: Δεξαμενές, αντλιοστάσια, λίμνες
  - Ροή: Υγρό, πετρέλαιο



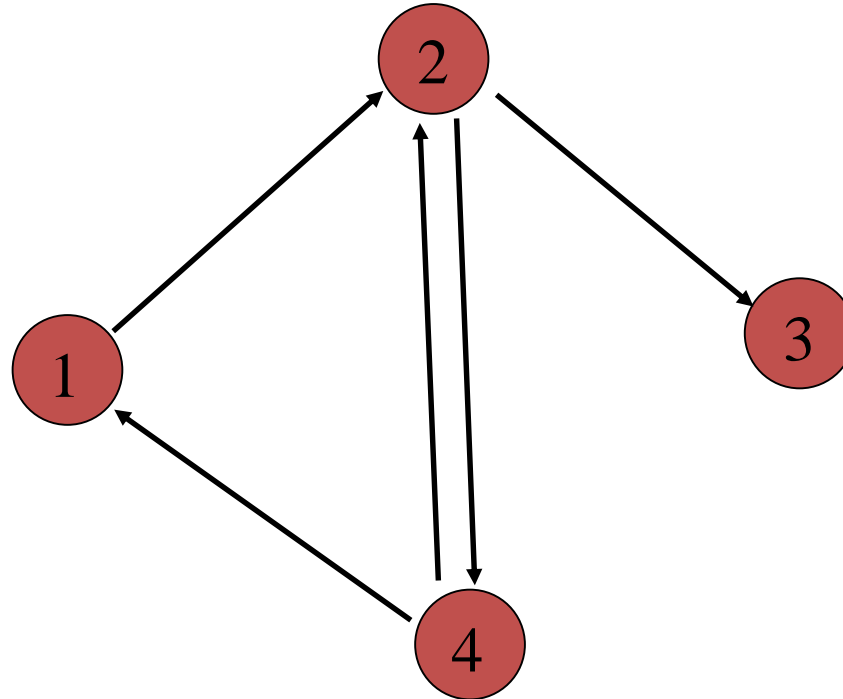
# Εφαρμογές γράφων III

- Οικονομικά
  - Κορυφές: μετοχές, νόμισμα
  - Ακμές: συναλλαγές
  - Ροή: Χρήματα
- Μεταφορές
  - Κορυφές: Αεροδρόμια, Σιδηροδρομικοί σταθμοί, διασταυρώσεις
  - Ακμές: Αυτοκινητόδρομοι, αεροπορικές γραμμές
  - Ροή: Οχήματα, επιβάτες





# Κατευθυνόμενος Γράφος



Παράδειγμα κατευθυνόμενο γράφου

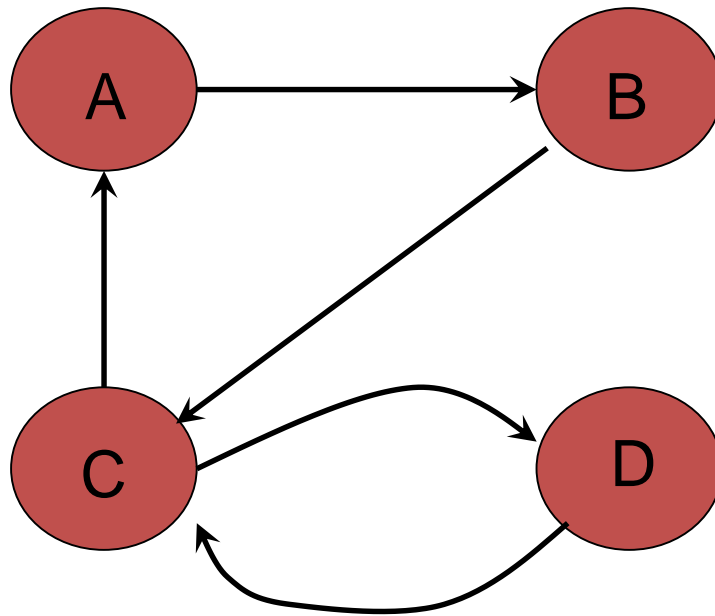


# Συνδεσμικότητα

- Μπορώ να πετάξω από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρεία;
- Υπάρχει μονοπάτι από την πόλη A στην πόλη B στο δίκτυο της;



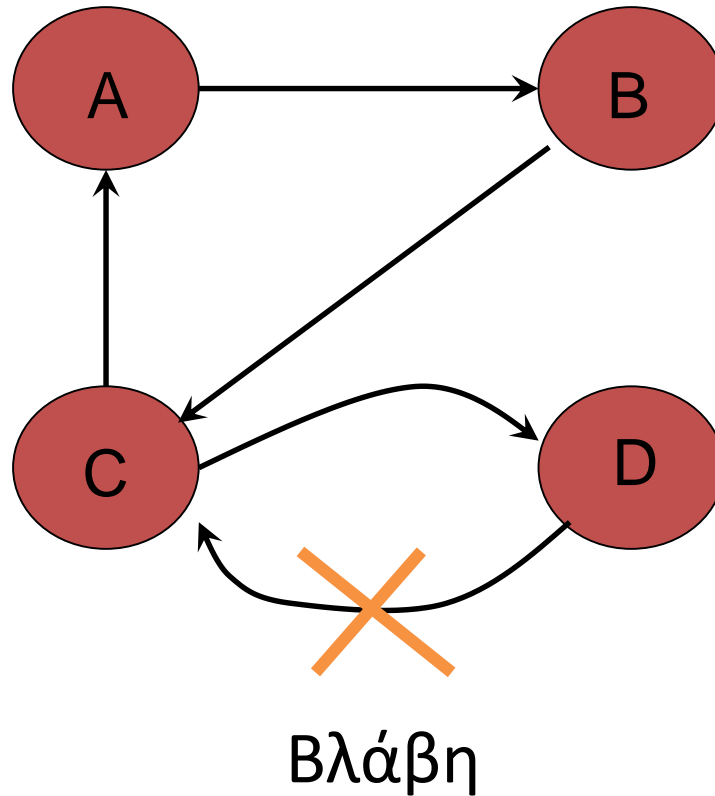
# Λειτουργία δικτύων I



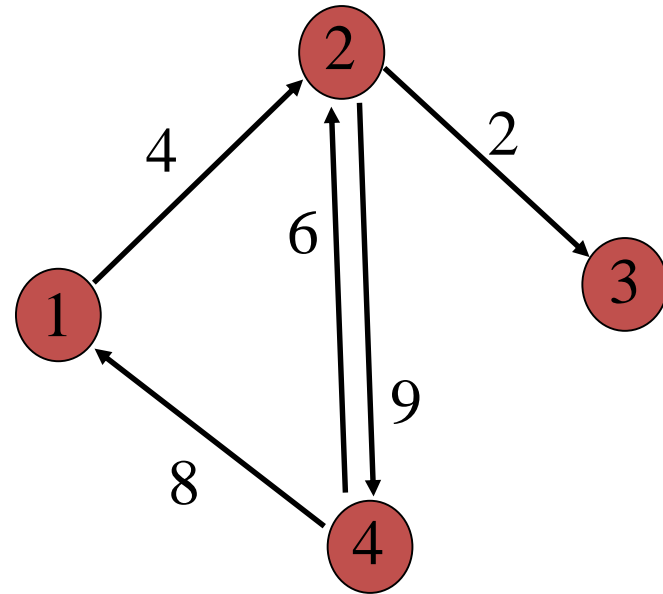
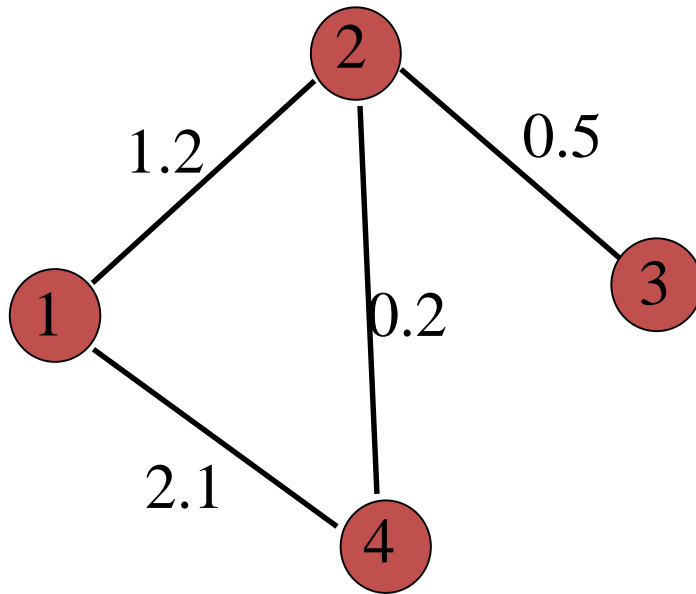
Μπορώ να πάω από κάθε κόμβο σε κάθε άλλον;



# Λειτουργία δικτύων II



# Ζυγισμένος γράφος (weighted)



# Συντομότερη διαδρομή

- Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρεία;
- Ποιο μονοπάτι από την πόλη A στην πόλη B έχει το μικρότερο βάρος;



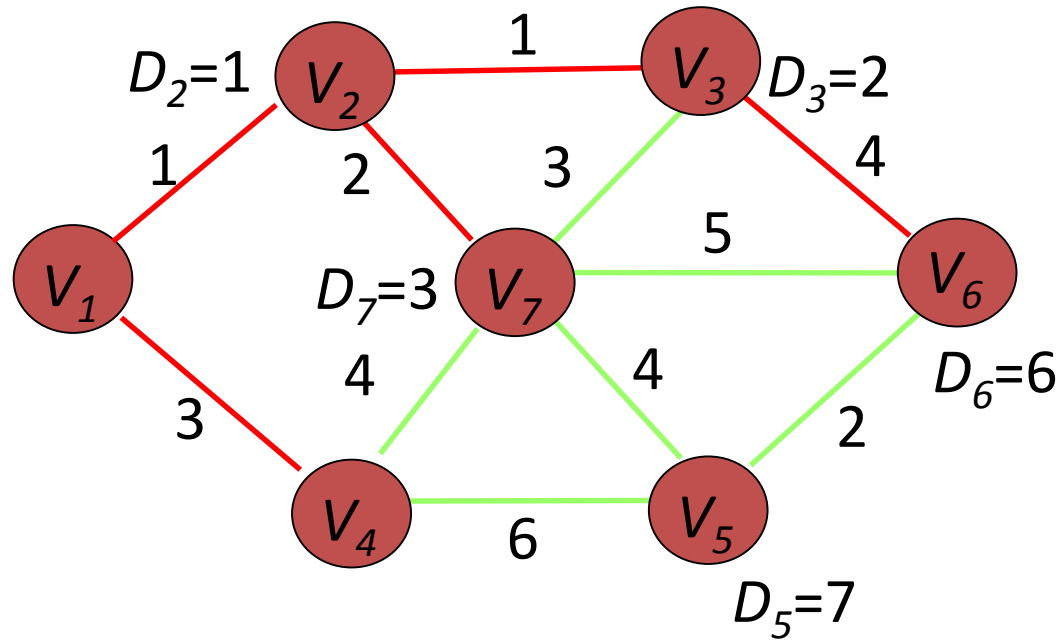
# GPS – Πλοήγηση

---

- Εύρεση Ελαχίστων Διαδρομών



# Routing in Internet (TCP/IP)





# Γρίφος (3 utilities)



ΔΕΗ

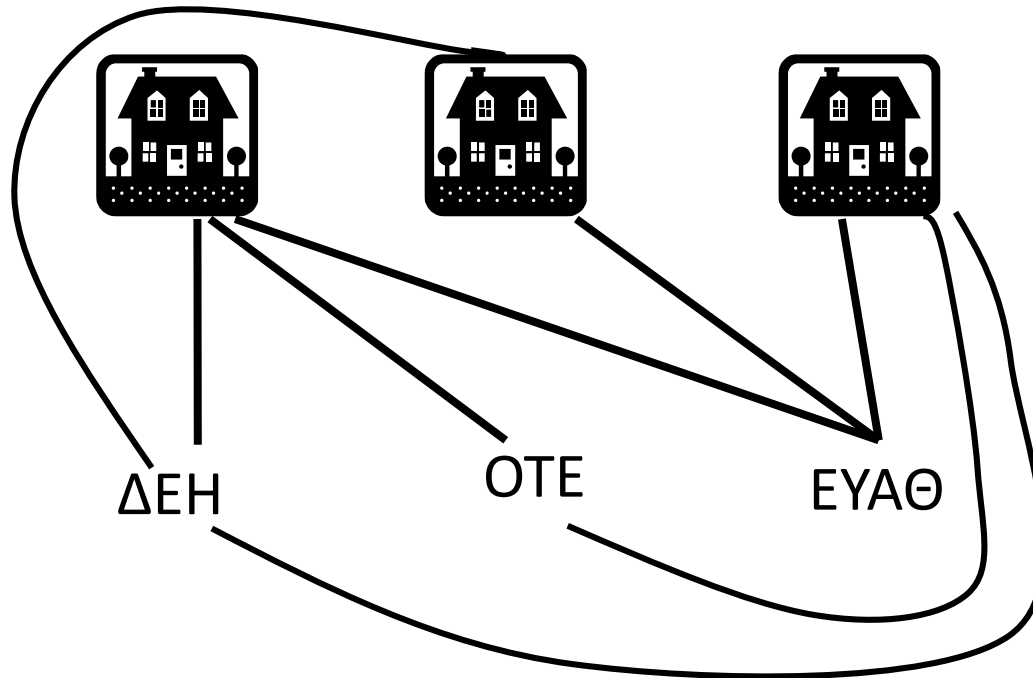
ΟΤΕ

ΕΥΑΘ

Σύνδεσε τα 3 σπίτια με τις 3 παροχές  
χωρίς να διασταυρωθούν οι συνδέσεις



# Προπαθήστε...



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;



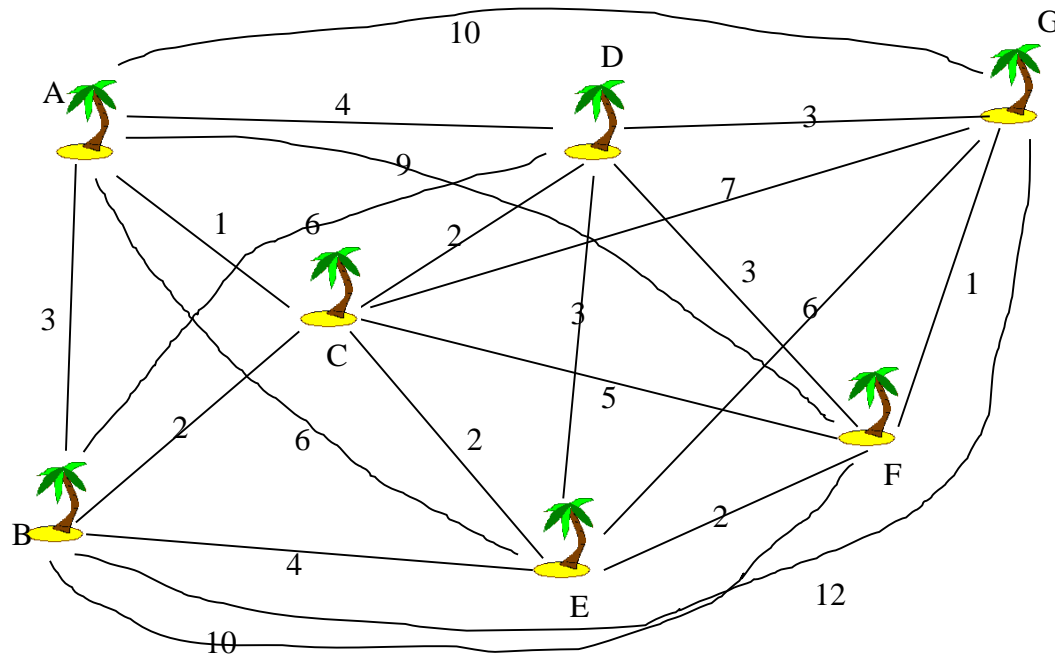
# Επιπεδικότητα

- Μπορεί ένας γράφος να σχεδιασθεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;

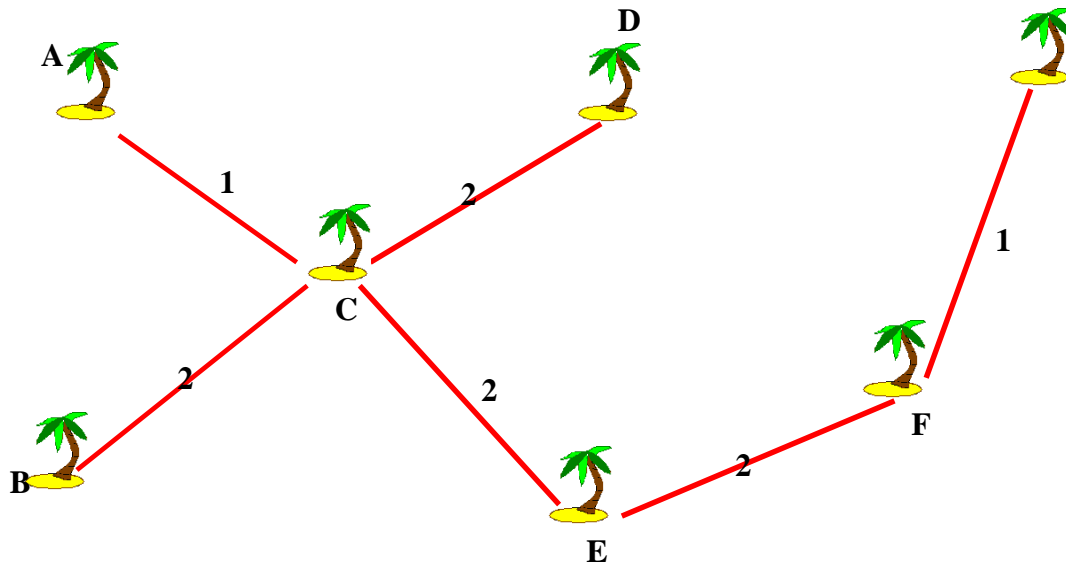


# Ωκεανία

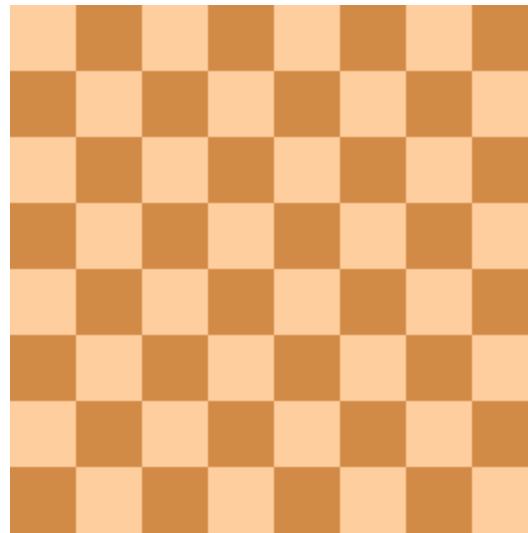
- Ποιο δίκτυο διαδρομών είναι το ασφαλέστερο; (κίνδυνος από μεγάλες διαδρομές στη θάλασσα)



# Λύση



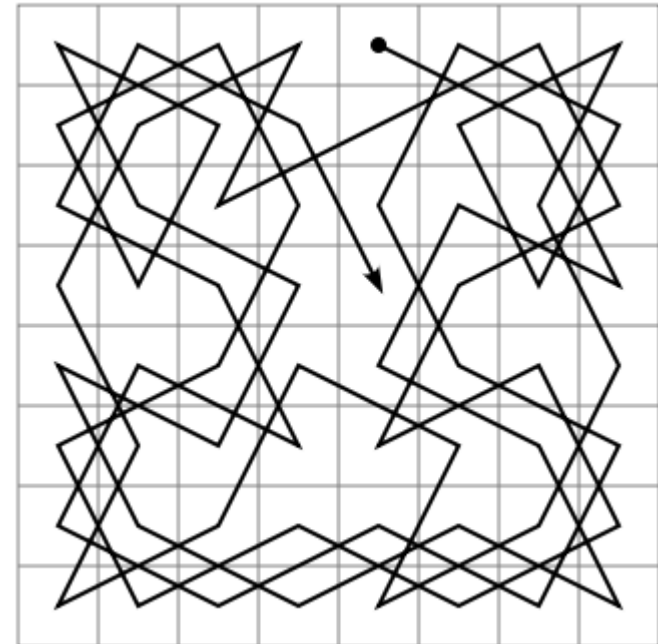
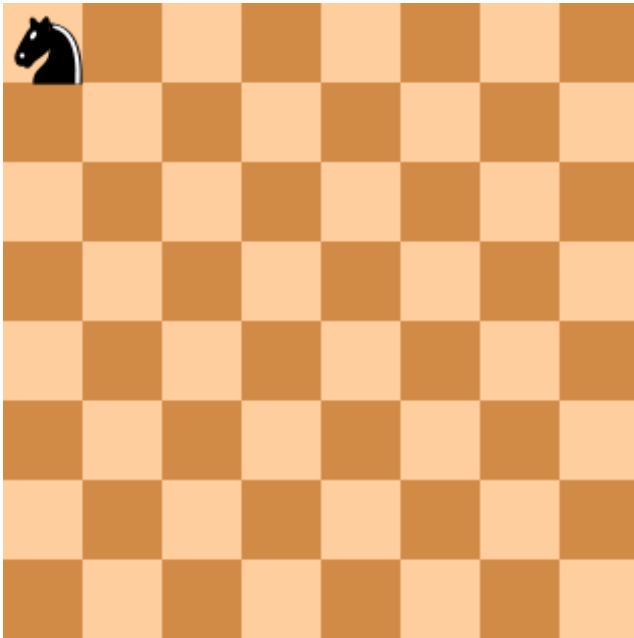
# Σκάκι (πρόβλημα κυριαρχίας)



Πως να τοποθετήσω τις  
8 βασίλισσες χωρίς να απειλούνται;



# Περίπατος του Ιππότη/Αλόγου (Hamiltonian περίπατος)



# Χάρτες (χρωματισμός)

- Πως να χρωματίσω κάθε χώρα (νομό), ώστε γειτονικοί νομοί να μην έχουν ίδιο χρώμα;
- Πόσα χρώματα χρειάζονται στο ελάχιστο;
- Η απόδειξη του 4





# Ανάλυση συνδέσμων

---

- Ποιοι κόμβοι είναι κεντρικοί;



# Εφαρμογές της Θεωρίας Γράφων

- Δίκτυο μετρό (Λονδίνο)
- Χάρτης επιστήμης
- Δίκτυα συν-συγγραφέων
- Δίκτυα αναφορών (citations)
- Κοινωνικά δίκτυα
  - small-world 6 hops



# Το Φαινόμενο του Μικρού Κόσμου

- Ο Stanley Milgram έστειλε ένα σύνολο επιστολών από τις Μεσοδυτικές πολιτείες των ΗΠΑ προς τη Βοστώνη. Κάθε φορά, οι επιστολές μπορούσαν να αποσταλούν μόνο προς γνωστούς αποστολείς.
- Ο Milgram κράτησε τα ίχνη των επιστολών και βρήκε ότι η μέση τιμή του μήκους των ιχνών ήταν περίπου 6, διατυπώνοντας έτσι την αρχή του «6 degrees of separation.»



# Το Παιχνίδι του Kevin Bacon

- Το παιχνίδι συνίσταται στην εύρεση μονοπατιού προς τον Bacon από τυχόν άτομο του Hollywood με  $\leq 6$  βήματα.
- Ο Bacon είναι ο 1222<sup>ος</sup> πλέον συνδεδεμένος ηθοποιός του Hollywood.



# Άλλες Εφαρμογές της Θεωρίας Γράφων

- Δίκτυο χρέους
- Δίκτυο επιστημονικής συνεργασίας
- Δίκτυο γενετικής αλληλεπίδρασης
- Σχέσεις μεταξύ επιχειρήσεων βιοτεχνολογίας των ΗΠΑ
- Δίκτυο αλληλεπίδρασης πρωτεϊνών

Όλο και μεγαλύτεροι γράφοι

- νέες κατευθύνσεις στη Θεωρία Γράφων



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτω

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <Οι γέφυρες του Königsberg> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported>  
<[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg\\_bridges.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png)>
- Εικόνα 2: <Hamiltonian μονοπάτι> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported>  
<[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hamiltonian\\_path.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hamiltonian_path.svg)>
- Εικόνα 3: <Παράδειγμα 4 colour map> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Four\\_Colour\\_Map\\_Example.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Four_Colour_Map_Example.svg)>



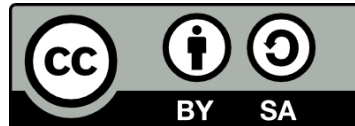
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ιωάννης Μανωλόπουλος. «Αλγοριθμική Θεωρία Γράφων. Εισαγωγή στη Θεωρία Γράφων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS264/>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>







# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος  
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

---

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

