ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **3**: Εισαγωγή (Πράξεις)

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

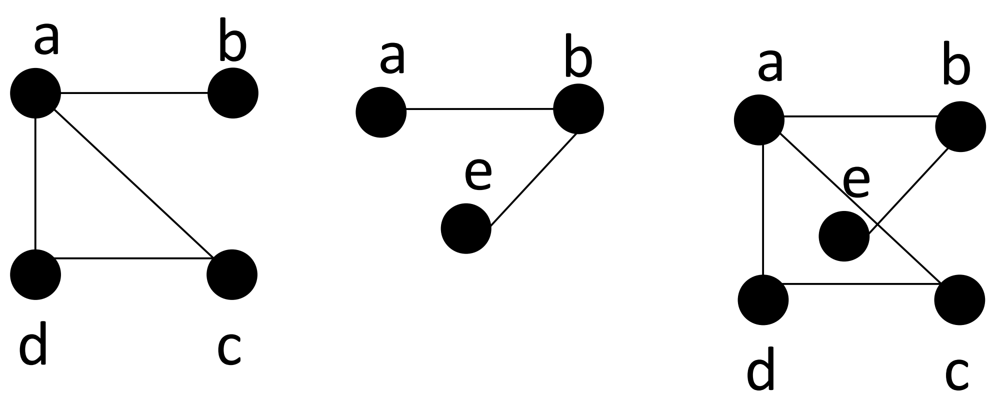
ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Πράξεις

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ένωση Γράφων I



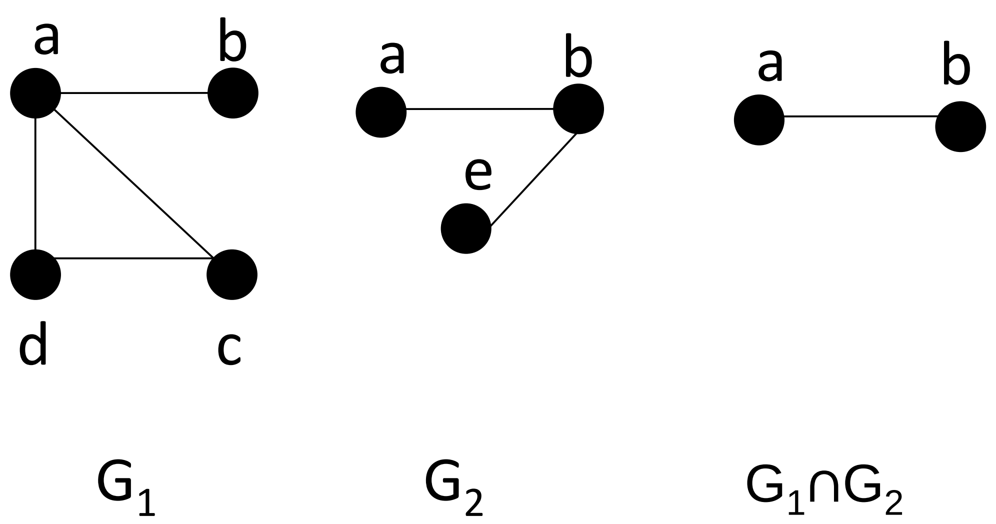
G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

Ένωση-union δύο γράφων είναι ο γράφος $G=G_1 \cup G_2$ με σύνολο κορυφών $V(G)=V_1 \cup V_2$ και σύνολο ακμών $E(G)=E_1 \cup E_2$

Ένωση Γράφων ΙΙ

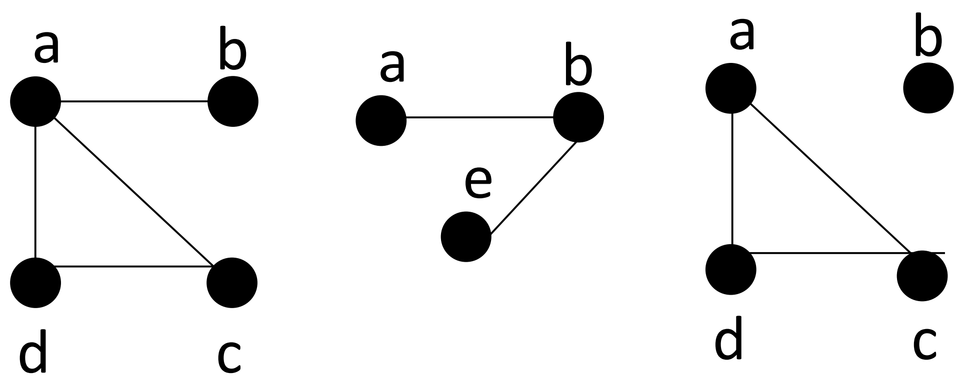
- Κάθε μη συνδεδεμένος γράφος μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση δύο ή περισσοτέρων συνιστωσών.
- Η ένωση m ισομορφικών γράφων G συμβολίζεται με mG
- Αν ένας γράφος G μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση των **παραγόντων**-factor (ή ζευγνυόντων υπογράφων) του, τότε η ένωση αυτή ονομάζεται **παραγοντοποίηση** του G.
- Ένας παράγοντας που είναι τακτικός γράφος βαθμού r καλείται **r-παράγοντας**. Αν ένας γράφος αποτελείται μόνο από r-παράγοντες τότε λέγεται **r-παραγοντοποιήσιμος**.

Τομή Γράφων



Τομή-intersection δύο γράφων $G=G_1 \cap G_2$ είναι ο γράφος G με σύνολο κορυφών $V(G)=V_1 \cap V_2$ και σύνολο ακμών $E(G)=E_1 \cap E_2$

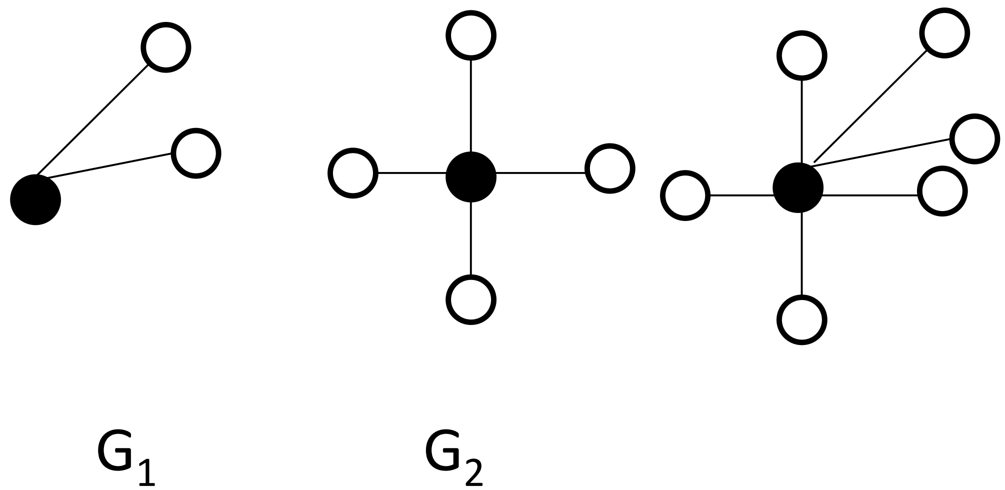
Άθροισμα Δακτυλίου



G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ $G_1 \oplus G_2$

Άθροισμα δακτυλίου – ring sum, $G=G_1 \oplus G_2$, είναι ο γράφος G με σύνολο κορυφών $V(G)=V_1 \cup V_2$ και σύνολο ακμών $E(G)= (E_1 \cup E_2)-(E_1 \cap E_2)$

Συγκερασμός

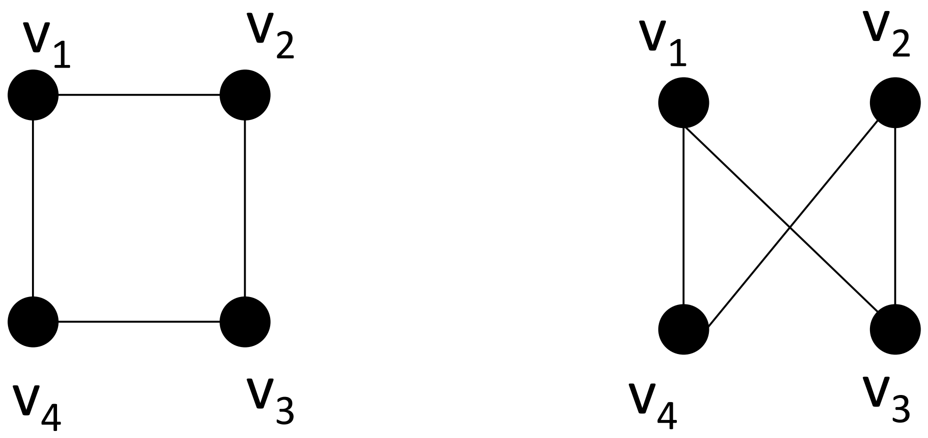


Ο **συγκερασμός**-coalescence 2 γράφων G_1 και G_2 είναι οποιοσδήποτε γράφος που προκύπτει ταυτίζοντας έναν κόμβο από το G_1 και ένα κόμβο από το G_2.

Συμπλήρωμα

- Το **συμπλήρωμα** ενός γράφου G συμβολίζεται με $\tilde{G}$ και είναι ο γράφος που έχει σύνολο κορυφών $\mathrm{V}\left(\tilde{G}\right) = V(G)$, ενώ το σύνολο των ακμών του αποτελείται από όλες τις δυνατές ακμές που δεν ανήκουν στο σύνολο E(G).
- Αν ο G δεν είναι συνδεδεμένος, τότε ο $\tilde{G}$ είναι συνδεδεμένος.

Ανταλλαγή Ακμών



Η πράξη της **ανταλλαγής**-interchange ή **αντιστροφής-**-inversion ακμών ταυτίζεται με τη διαγραφή δύο ακμών (v_1,v_2) και (v_3,v_4) και την εισαγωγή των ακμών (v_1,v_3) και (v_2,v_4).

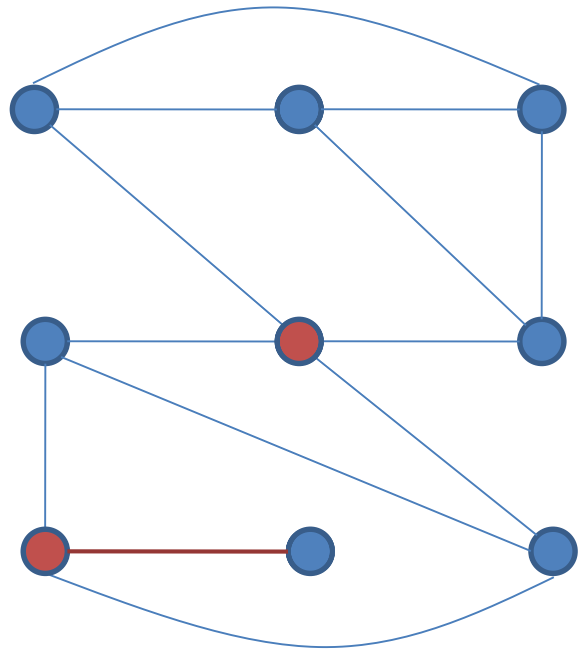
Διάσπαση Κορυφής

Κατά τη **διάσπαση**-split μιας κορυφής v_1 διαγράφονται δύο ακμές (v_1,v_2) και (v_1,v_3) και εισάγονται με ένωση δύο νέες ακμές (v_4,v_2) και (v_4,v_3) θεωρώντας μία νέα κορυφή v_4.

Αποκόπτουσες Ακμές-Κορυφές

- Αν κατά τη διαγραφή μιας κορυφής από ένα συνδεδεμένο γράφο προκύψουν δύο ή περισσότερες συνιστώσες, τότε η κορυφή αυτή λέγεται **αποκόπτουσα κορυφή** – cut vertex ή **σημείο άρθρωσης** – articulation point.
- Αν με τη διαγραφή μιας ακμής προκύψουν δύο συνι-στώσες, τότε η ακμή αυτή ονομάζεται **αποκόπτουσα ακμή** – cut edge ή **γέφυρα** - bridge. Τα τερματικά σημεία μιας τέτοιας ακμής είναι αποκόπτουσες κορυφές.
- Ένας γράφος που δεν περιέχει αποκόπτουσες ακμές ονομάζεται **δισυναφής** - bi-coherent.

Αποκόπτουσες Ακμές-Κορυφές Παράδειγμα



Κατά τη διάσπαση μιας κορυφής v_1 διαγράφονται δύο ακμές (v_1,v_2) και (v_1,v_3) και εισάγονται με ένωση δύο νέες ακμές (v_4,v_2) και (v_4,v_3) θεωρώντας μία νέα κορυφή v_4.

Διαχωριστοί Γράφοι

- Ένας γράφος που δεν περιέχει αποκόπτουσες κορυφές ονομάζεται **δισυνδεδεμένος** - bi-connected ή **μη διαχωριστός**- non-separable, ενώ λέγεται ότι ο γράφος αποτελείται από ένα τεμάχιο.
- Ένας διαχωριστός γράφος έχει μία ή περισσότερες αποκόπτουσες κορυφές. Κατά τη διάσπαση μιας αποκόπτουσας κορυφής, η κορυφή αυτή αντικαθί-σταται από δύο ή περισσότερες κορυφές, ώστε να προκύψουν ανεξάρτητα τεμάχια.

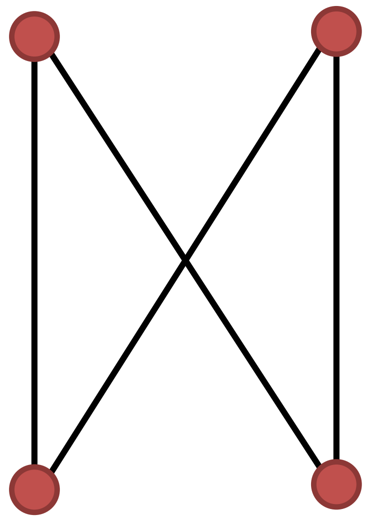
Άθροισμα Γράφων

- Η **σύνδεση**-join ή **άθροισμα**-sum δύο γράφων συμβολίζεται με $G=G_1+G_2$ και είναι ένας γράφος που αποτελείται από τις κορυφές $V_1 \cup V_2$,τις αρχικές ακμές και όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ των κορυφών των δύο γράφων.

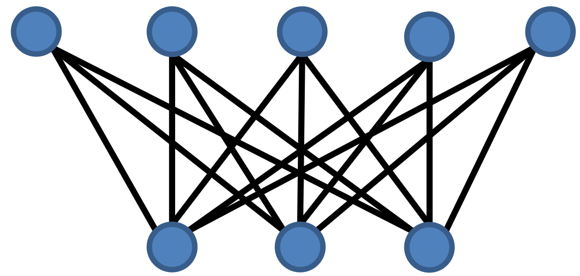
Διμερής Γράφος

- Αν είναι δυνατόν οι κορυφές ενός γράφου G να επιμερισθούν σε δύο υποσύνολα V_1 και V_2, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να προσπίπτει σε μία κορυφή του V_1 και μία του V_2, τότε ο γράφος G ονομάζεται **διμερής**-bipartite ή **διγράφος**-bigraph, ενώ τα V_1 και V_2 ονομάζονται **μερικά σύνολα** -partite sets.
- Αν κάθε κορυφή του V_1 συνδέεται με κάθε κορυφή του V_2, τότε ο γράφος G ονομάζεται **πλήρης διμερής** - complete bipartite και συμβολίζεται με $K_{i,j}$, όπου $|V_1|=i$ και $|V_2|=j$

Διμερής Γράφος – Παράδειγμα



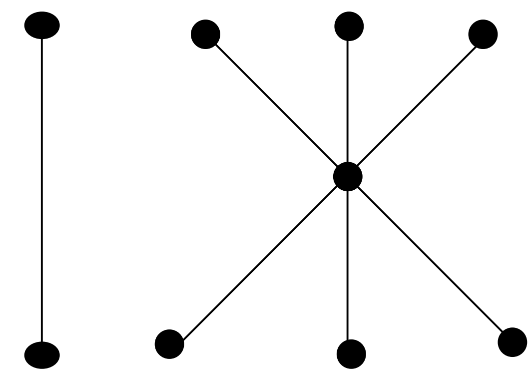
$K_{2,2}$



$K_{3,5}$

Διμερής γράφος – Αστεροειδής

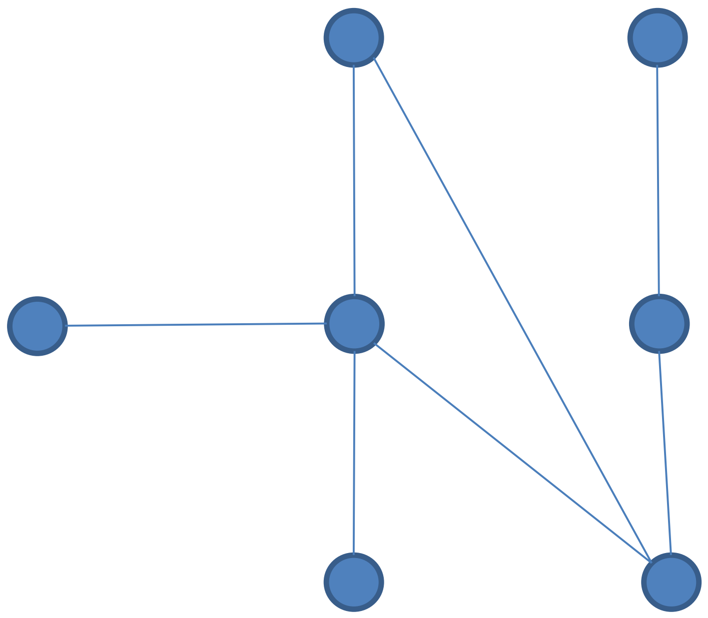
- Ένας **αστεροειδής**-star graph S_k, είναι ένας πλήρης διμερής γράφος $K_{1,k}$.
- Μπορεί να θεωρηθεί ως δένδρο με μία ρίζα και k φύλλα εξαρτώμενα από τη ρίζα.
- Το S_3 ονομάζεται **δαγκάνα**-claw.



$K_{1,1}=K_2$ $K_{1,6}$

Πολυμερής Γράφος

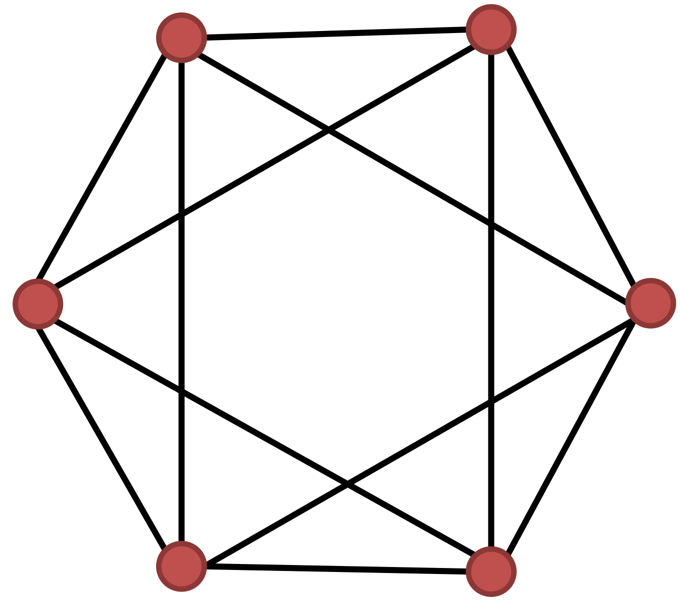
- Ένας γράφος G ονομάζεται **πολυμερής-** n-partite αν το σύνολο V(G) μπορεί αν χωρισθεί σε n μη κενά υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_n$ έτσι ώστε καμία ακμή του G να μην ενώνει κορυφές του ίδιου **μερικού**-partite συνόλου του G



Τριμερής Γράφος

Πλήρης Πολυμερής Γράφος

- Με προφανή τρόπο ορίζονται οι **πλήρεις πολυμερείς** – complete k-partite γράφοι.



$K_{2,2,2}$

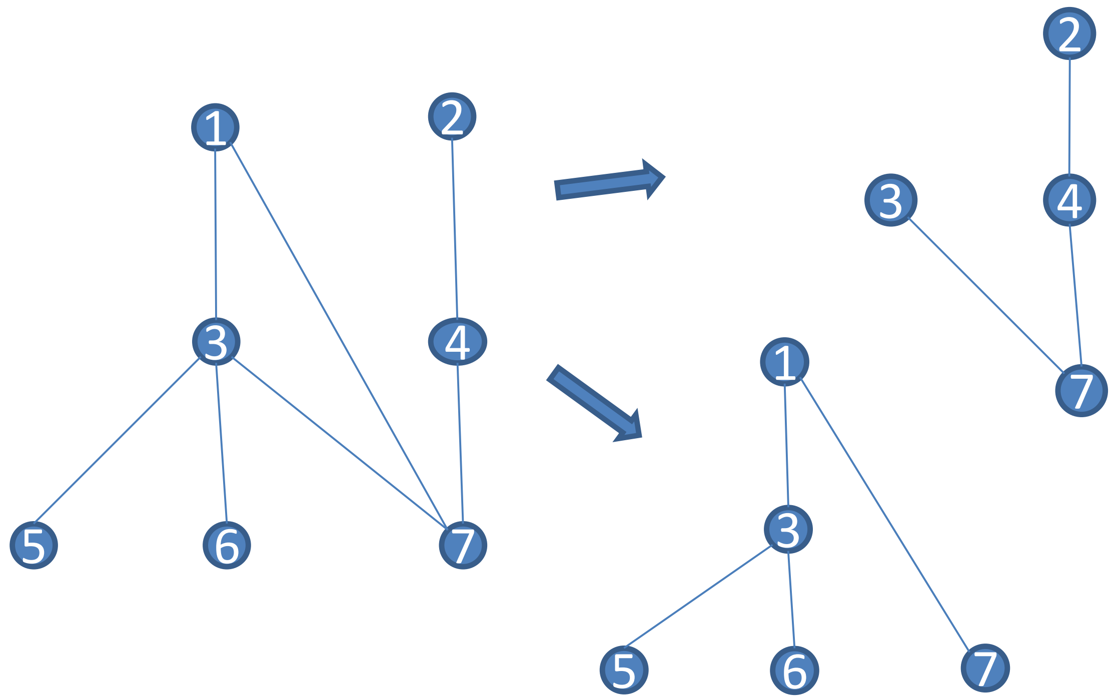
Λεξικογραφικό Γινόμενο

- Το **λεξικογραφικό γινόμενο** – lexicographical product ή **σύνθεση**-composition δύο γράφων G_1 και G_2 συμβολίζεται με $G_1[G_2]$ και ορίζεται ως ο γράφος με σύνολο κορυφών $V(G_1xG_2) = V(G_1)xV(G_2)$, ενώ δύο κορυφές $v=(v_1,v_2)$ και $u=(u_1,u_2)$ είναι γειτονικές στο λεξικογραφικό γινόμενο αν η v_1 συνδέεται με την u_1 στο γράφο G_1 ή αν $v_1=u_1$ και η v_2 συνδέεται με την u_2 στο γράφο G_2.

Αποσύνθεση

- Ένας γράφος G **αποσυντίθεται** σε δύο γράφους G_1 και G_2 αν ισχύει: $G_1 \cup G_2 = G$ και $G_1 \cap G_2 = N_n$, $\forall n$.
- Κατά την **αποσύνθεση**-decomposition αγνοούνται οι απομονωμένες κορυφές.
- Με απλά λόγια, κάθε ακμή του G βρίσκεται είτε στον ένα γράφο είτε στον άλλο, αλλά όχι και στους δύο. Παρόλα αυτά μπορεί κάποιες κορυφές να ανήκουν και στους δύο υπογράφους.

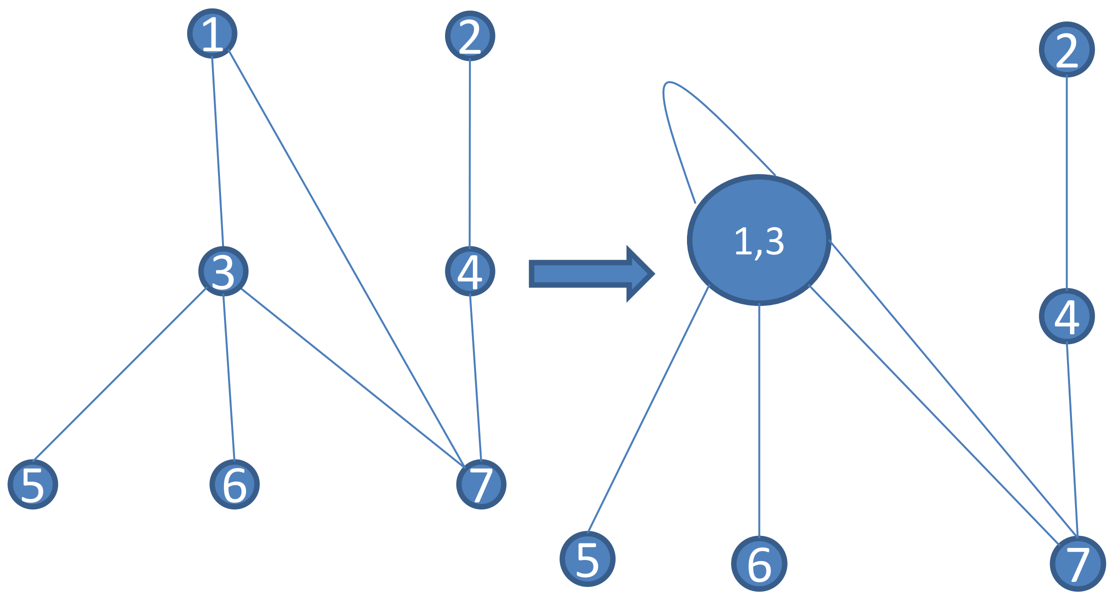
Αποσύνθεση – Παράδειγμα



Συγχώνευση Κορυφών

- **Συγχώνευση**-fusion/merge δύο κορυφών v_1 και v_2 ενός γράφου είναι η αντικατάστασή τους από μία νέα κορυφή v, ενώ οι ακμές που ήταν προσπίπτουσες στις κορυφές v_1 ή/και v_2 αντικαθιστώνται από νέες ακμές προσπίπτουσες προς την κορυφή v. Η πράξη αυτή συμβολίζεται με $G/(v_1,v_2)$
- Κατά τη συγχώνευση, ο αριθμός των ακμών παραμένει σταθερός, ενώ ο αριθμός των κορυφών μειώνεται κατά ένα.

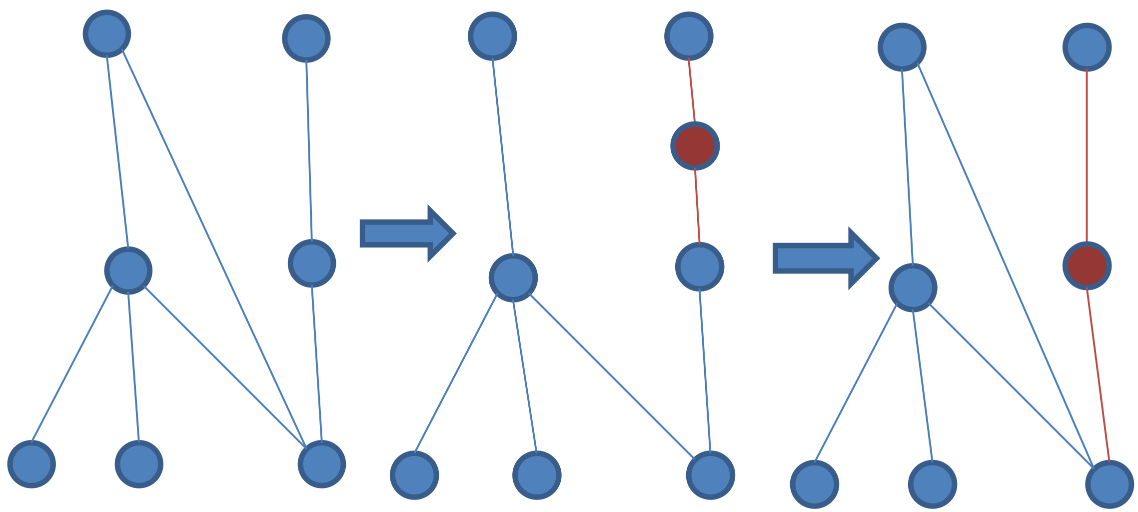
Συγχώνευση Κορυφών – Παράδειγμα



Υποδιαίρεση – Συστολή ακμής

- Κατά την **υποδιαίρεση**-subdivision ακμής, μία ακμή e διαγράφεται, ενώ οι προσκείμενες κορυφές της e ενώνονται δια μέσου δύο νέων ακμών και μιας ενδιάμεσης κορυφής.
- **Συστολή**-contraction μιας ακμής e ενός γράφου είναι η αντίστροφη πράξη της υποδιαίρεσης. Κατά τη συστολή η ακμή e διαγράφεται και ταυτοποιούνται οι κορυφές που ήταν προσκείμενες προς την ακμή αυτή. Ο γράφος που προκύπτει κατά τη συστολή συμβολίζεται με $G \cdot e$.
- Δύο γράφοι λέγονται **ομοιομορφικοί**-homeomorphic αν ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με μία ή περισσότερες υποδιαιρέσεις ή συστολές ακμών.

Ομοιομορφικοί Γράφοι



Κάποιες Προτάσεις Ι

- $G \cup G = G \cap G = G$
- $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$
- $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$
- $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$
- $G \oplus G = N_n$
- $G - e = G \oplus e$

Κάποιες Προτάσεις ΙΙ

- $K_{m,n} = N_n + N_m = \widetilde{K_n} + \widetilde{K_m}$
- $\tilde{\tilde{G}} = G$
- Αν το g είναι υπογράφος του G, τότε $G \oplus g = G - g$
- $|V(G \cdot e)| = |V(G)| - 1$
- $|E(G \cdot e)| = |E(G)| - 1$

Αλγόριθμοι και Γράφοι

- Η αποτελεσματικότητα καθορίζεται από την πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου.
- Στους γράφους θα μας απασχολήσει περισσότερο η πολυπλοκότητα χρόνου.
- Πολυπλοκότητα χρόνου είναι το πλήθος εκτελέσεων της βασική πράξης, ώστε να παραχθούν τα επιδιωκόμενα δεδομένα εξόδου.

Εκτίμηση Απόδοσης

- Η εκτίμηση της επίδοσης ενός αλγορίθμου μπορεί να γίνει είτε πειραματικά είτε θεωρητικά.
- Πειραματικά, μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των πράξεων ενός αλγορίθμου, δηλ. τον απόλυτο χρόνο, μέγεθος όμως που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες.

Θεωρητική Εκτίμηση Απόδοσης Ι

- Για τη θεωρητική εκτίμηση της πολυπλοκότητας χρόνου, έχει ιδιαίτερη σημασία το μέγεθος του προβλήματος, που σε γράφους εκφράζεται από την **τάξη** και το **μέγεθός** τους.
- Ο συμβολισμός O εκφράζει το άνω όριο του πλήθους των απαιτούμενων πράξεων με τη βοήθεια μιας συνάρτησης O(f(n))
- Μας ενδιαφέρει συνήθως
  – η πολυπλοκότητα της χειρότερης περίπτωσης
  – η πολυπλοκότητα της μέσης περίπτωσης

Θεωρητική Εκτίμηση Απόδοσης ΙΙ

- Πολυωνυμικός είναι ο αλγόριθμος όπου η συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη από κάποιο πολυώνυμο
- Αποτελεσματικός είναι ο αλγόριθμος με όσο το δυνατό μικρότερου βαθμού πολυώνυμο

Αποθήκευση Γράφων

- Στατικές αναπαραστάσεις
  - **Πίνακας γειτνίασης** – adjacency matrix
  - **Πίνακας προσπτώσεων** – incidence matrix

- Δυναμικές αναπαραστάσεις
  - **Λίστες ακμών** – edge lists (για αραιούς γράφους)
  - **Λίστες γειτνίασης**

Λίστες γειτνίασης

- Αν υποτεθεί ότι η μέση τιμή των βαθμών των κορυφών του γράφου είναι d_{av} και ότι για τον ορισμό της επιγραφής μιας κορυφής απαιτείται μία λέξη, τότε εύκολα προκύπτει ότι ο συνολικός απαιτούμενος χώρος μνήμης για αυτές τις μεθόδους είναι περίπου $n(1+d_{av})$ λέξεις

Πολυπλοκότητες αναπαράστασης

	Πίνακας γειτνίασης	Λίστες γειτνίασης
Αποθήκευση	$O(V^2)$	$O(V+E)$
Έλεγχος αν η (u,v) είναι ακμή	$O(1)$	$O(d(u))$
Έλεγχος γειτονικών κορυφών της u	$O(V)$	$O(d(u))$

Ακολουθία Βαθμών

- Είναι μία μη αύξουσα ακολουθία ακεραίων, που αντιστοιχεί στις τιμές των βαθμών των κορυφών ενός γράφου.
- Μία τυχούσα ακολουθία λέγεται **γραφική**-graphical αν πράγματι αντιστοιχεί σε κάποιο γράφο G.
- Ο γράφος G που αντιστοιχεί σε δεδομένη ακολουθία S ονομάζεται **πραγματοποίηση**-realization της ακολουθίας S.
- Για κάθε γράφο αντιστοιχεί μία και μοναδική ακολουθία βαθμών και αυτή έχει τις εξής ιδιότητες
  - Μη αρνητικές τιμές
  - Πλήθος περιττών βαθμών άρτιο
  - Τιμές μικρότερες από n

Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

- Η ακολουθία 2,2,2,2,2,2 απεικονίζει τους γράφους C_6 και $2C_3$.
- Μία ακολουθία βαθμών λέγεται **απλή**-simple, αν είναι γραφική και υπάρχει μόνο μία πραγματοποίησή της (τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την αποθήκευση του γράφου).
- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΙΚΑΝΗ & ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

Θεώρημα

- Μια ακολουθία $S=d_1,d_2,\ldots,d_n$ είναι γραφική, αν είναι γραφική η $S'=d_2-1,d_3-1,\ldots, d_{d1+1}-1,d_{d1+2},\ldots,d_n$

Απόδειξη:

⇒Έστω η S΄ γραφική και G΄ ο αντίστοιχος γράφος.
Με κατασκευή θα δείξουμε ότι και η S είναι γραφική

⇐Έστω η S γραφική και G ένα γράφος με το άθροισμα των βαθμών των γειτονικών κόμβων του x μέγιστο.
Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει και έπειτα κατασκευάζουμε την S΄

Αλγόριθμος

- Αλγόριθμος

1. Αν κάποιο $d_i > n-1 \rightarrow$ ΟΧΙ
2. Αν όλα μηδενικά → ΝΑΙ
3. Αν κάποιο αρνητικό → ΟΧΙ
4. Αν χρειάζεται, η ακολουθία αναδιατάσσεται ώστε να είναι μη αύξουσα
5. Διαγράφεται ο πρώτος όρος (d_1) και αφαιρείται μία μονάδα από τους επόμενους d_1 όρους
6. Πήγαινε στο Βήμα 2

Παράδειγμα Ι

- Δίνεται η ακολουθία S_1: 5,4,4,3,2,1,1

S_2: 3, 3, 2, 1, 1, 0

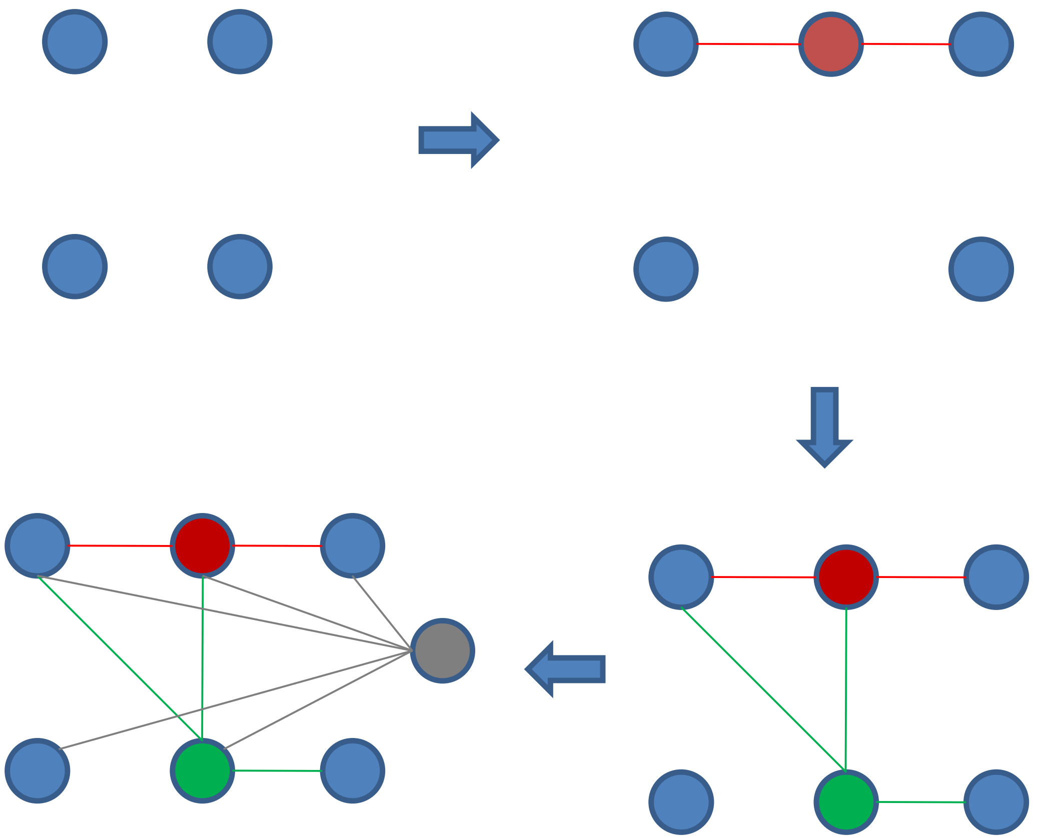
S_3: 2, 1, 1, 0, 0

S_4: 0, 0, 0, 0

Άρα η ακολουθία είναι γραφική

Παράδειγμα II

- Κατασκευή γράφου σταδιακά, ξεκινώντας από την S_4
- Μία ακολουθία βαθμών μπορεί να αντιστοιχίζεται σε περισσότερους από έναν γράφους.



Ένα ακόμη Θεώρημα

- Έχει αποδειχθεί ότι μία πραγματοποίηση γραφικής ακολουθίας βαθμών μπορεί να παραχθεί από οποιαδήποτε άλλη πραγματοποίηση μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό ανταλλαγών ακμών.
- Θεώρημα: Μια ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ είναι γραφική αν και μόνο αν Σdi είναι άρτιο και για κάθε ακέραιο k, $1 \le k \le n-1$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$$

Παράδειγμα Θεωρήματος

- Έστω ότι δίνεται η ακολουθία S: 5,5,5,5,2,2,2. Παρατηρούμε ότι:

Για k=1, $d_1 = 5 \leq 1(0) + \sum_{i=2}^{7} \min(1, d_i) = 6$

Για k=2, $d_1 + d_2 = 10 \leq 2(1) + \sum_{i=3}^{7} \min(2, d_i) = 12$

Για k=3, $d_1 + d_2 + d_3 = 15 \leq 3(2) + \sum_{i=4}^{7} \min(3, d_i) = 15$

Για k=4 δεν ισχύει (ΨΕΥΔΗΣ)

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 20 \leq 4(3) + \sum_{i=5}^{7} \min(4, d_i) = 18$$

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ιωάννης Μανωλόπουλος. «Αλγοριθμική Θεωρία Γράφων. Εισαγωγή (πράξεις)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS264/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.