ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **9**: Επιπεδικότητα

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Επιπεδικότητα

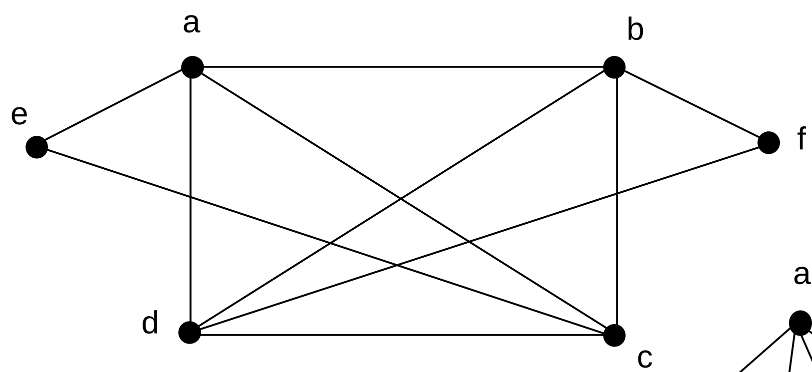
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

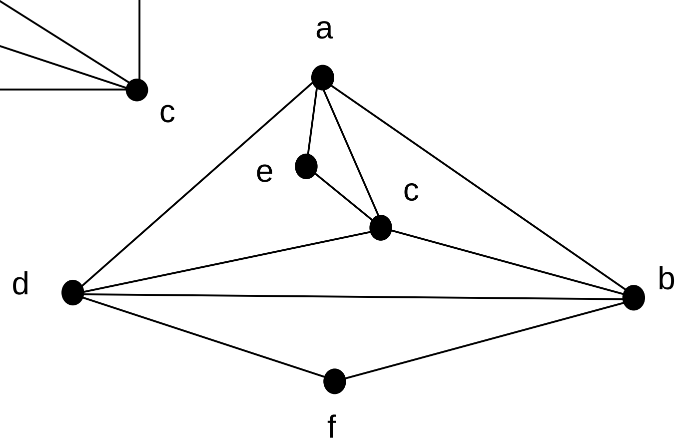
Επίπεδος γράφος

- Ένας γράφος G λέγεται **επίπεδος-plane** αν δύο οποιεσδήποτε ακμές του G συναντώνται μόνο σε προσκείμενες τερματικές κορυφές.
- Ένας γράφος G λέγεται **επιπεδικός-planar** ή **ενσωματώσιμος στο επίπεδο – embeddable in the plane** – αν είναι ισομορφικός προς έναν επίπεδο γράφο. Αν δηλαδή μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο έτσι ώστε δύο οποιεσδήποτε ακμές του να συναντώνται μόνο σε προσκείμενες τερματικές κορυφές.
- Πολλοί συγγραφείς ορίζουν τον επίπεδο γράφο όπως τον επιπεδικό.

Άσκηση I

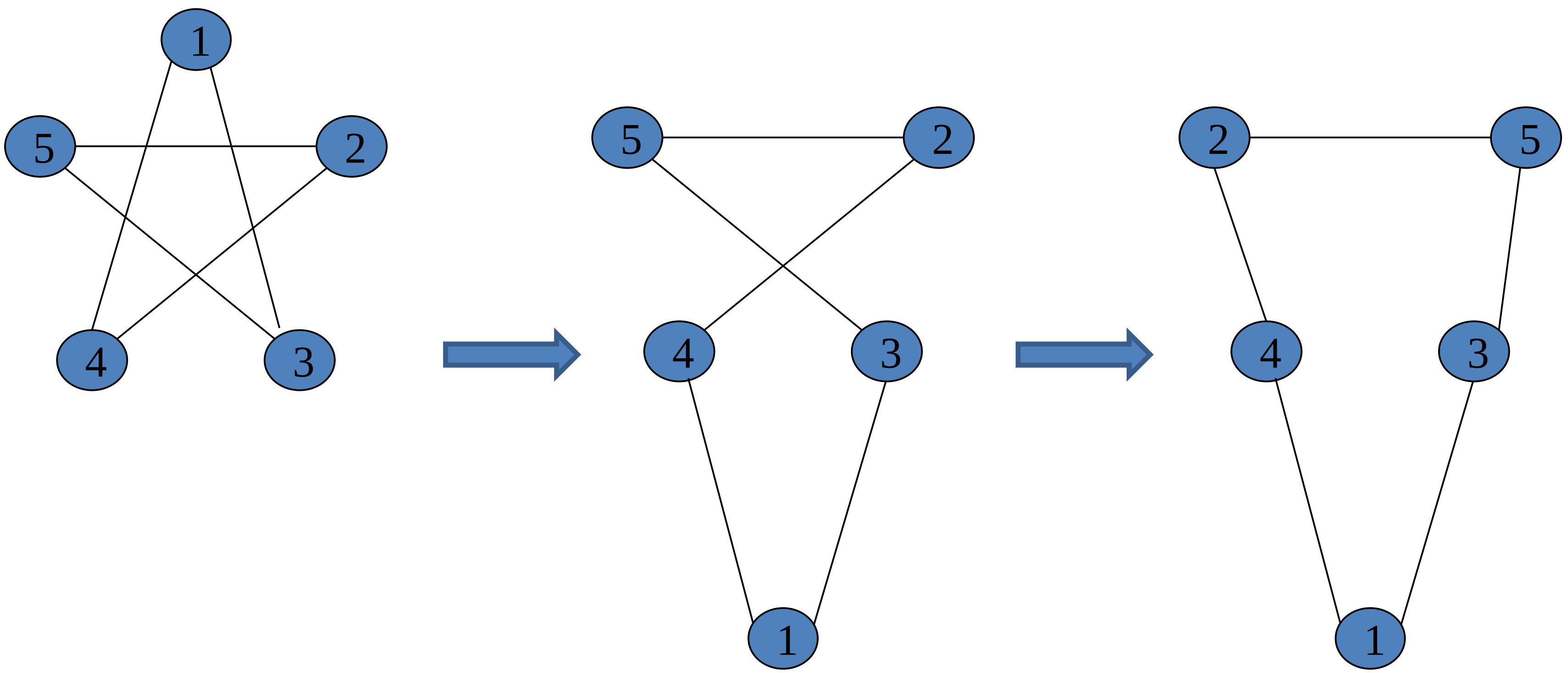
Είναι ο επόμενος γράφος επιπεδικός;
Αν είναι, δώστε μια επίπεδη σχεδίασή του.





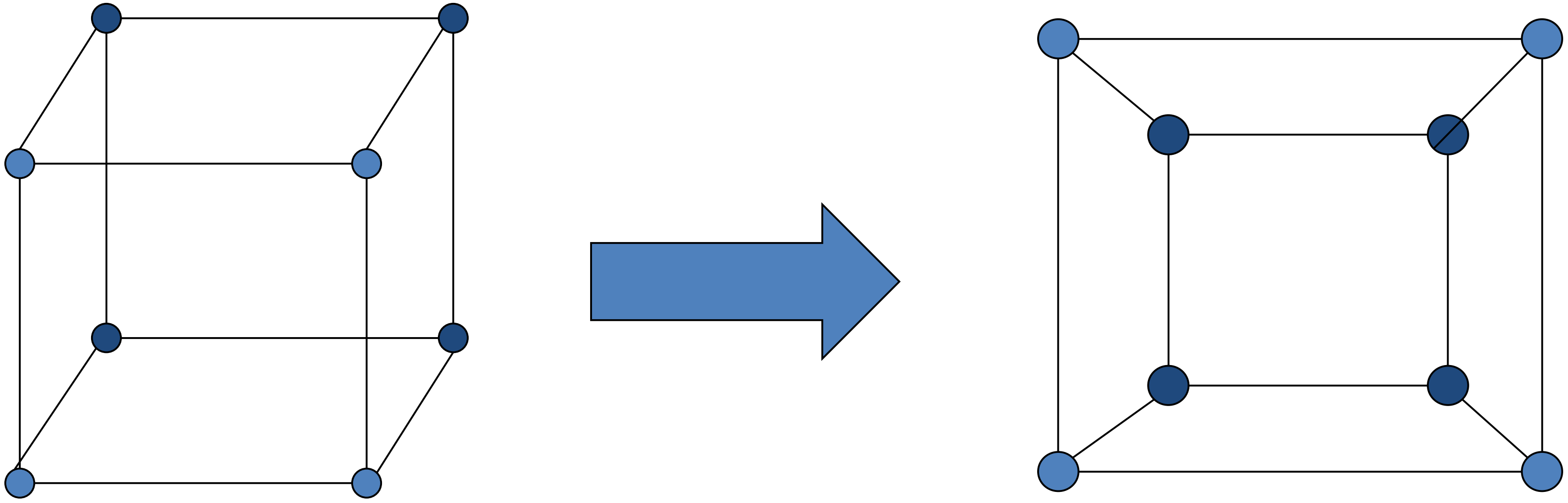
Άσκηση ΙΙ

- Είναι ο γράφος επιπεδικός;



Άσκηση III

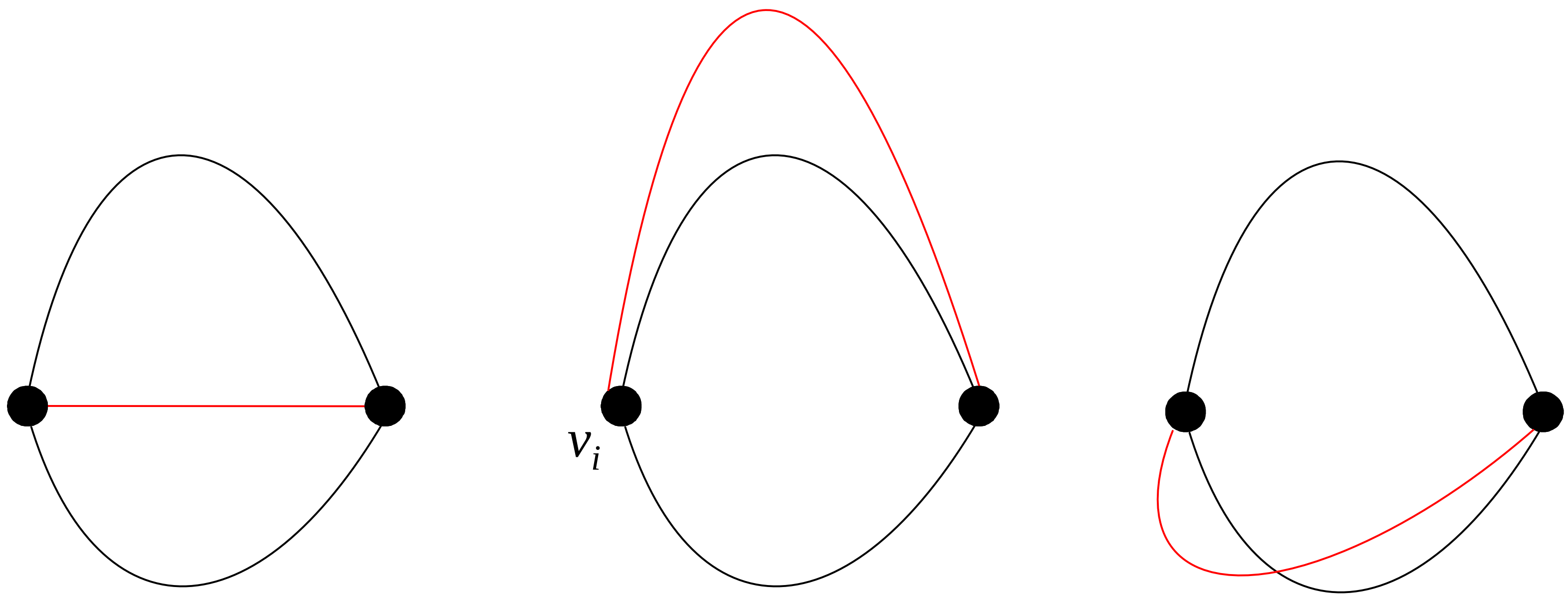
- Είναι ο επόμενος γράφος επιπεδικός;
  Αν είναι, δώστε μια επίπεδη σχεδίασή του.



Καμπύλη Jordan

- **Καμπύλη Jordan**: Μία συνεχής γραμμή στο επίπεδο που δεν τέμνει τον εαυτό της.
- **Κλειστή καμπύλη Jordan**: Μία καμπύλη Jordan της οποίας τα δύο άκρα συμπίπτουν.
- **Θεώρημα Jordan**: Δοθείσης μιας κλειστής καμπύλης Jordan L και δύο σημείων της vi και vj, τότε κάθε άλλη καμπύλη Jordan που ενώνει τα σημεία αυτά, είτε βρίσκεται εντός της L, είτε εκτός, είτε τέμνει την L σε κάποια σημεία διαφορετικά των vi και vj (προφανές).

Προφανές Παράδειγμα

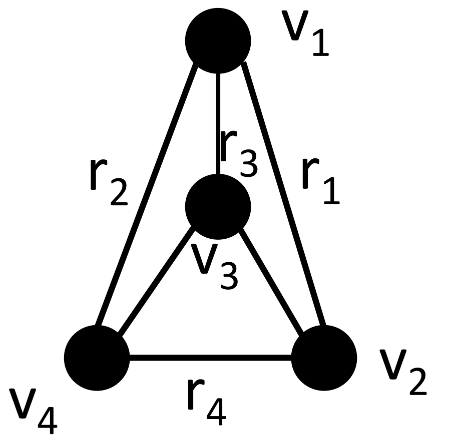


Περιοχή

- Δοθέντος ενός επίπεδου γράφου G και ενός σημείου x του επιπέδου, ονομάζουμε **περιοχή-**region ή **όψη-**face ή **παράθυρο-**window του G που περιέχει το x, το σύνολο των σημείων του επιπέδου που μπορούν να ενωθούν με το x μέσω μιας καμπύλης Jordan που δεν τέμνει τις ακμές του G.
- Με **r** (ή **f**) συμβολίζεται το πλήθος των περιοχών ενός επίπεδου γράφου
- **Περιθώριο**-boundary μιας περιοχής ονομάζεται ο υπογράφος που επηρεάζεται από τις ακμές και τις κορυφές που πρόσκεινται στην περιοχή ή απλούστερα οι ακμές που περιβάλλουν την περιοχή.

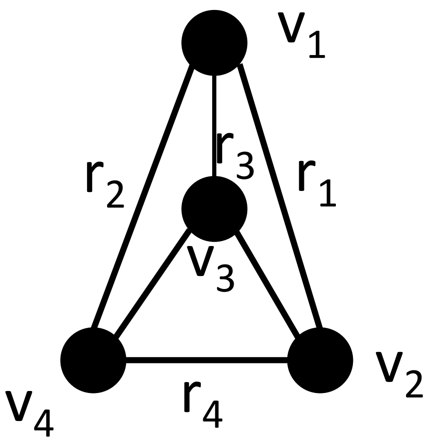
Παράδειγμα Ι

- Το περιθώριο της r_1 αποτελείται από τις ακμές (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_1) και τις κορυφές v_1, v_2, v_3.
- Το περιθώριο της r_2 αποτελείται από τις ακμές (v_1,v_2),(v_2,v_4),(v_4,v_1) και τις κορυφές v_1, v_2, v_4.



Παράδειγμα ΙΙ

- Το περιθώριο της r_3 αποτελείται από τις ακμές (v_1,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1) και τις κορυφές v_1, v_3, v_4.
- Το περιθώριο της r_4 αποτελείται από τις ακμές (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_2) και τις κορυφές v_2, v_3, v_4.
- Η περιοχή r_2 ονομάζεται **εξωτερική**-exterior ή **άπειρη**-infinite ή **απεριόριστη**-unbounded ή **εξώτερη**-outer.



Εξώτερος επιπεδικός

- **Εξώτερος επιπεδικός**-outerplanar λέγεται ένας γράφος αν είναι δυνατό όλες οι κορυφές να ανήκουν σε μία περιοχή (να κείνται όλες επί κύκλου).
- Οι ακμές ενός τέτοιου γράφου κείνται είτε επάνω είτε μέσα σε έναν κύκλο και δεν τέμνονται κάπου.
- Κάθε εξώτερος επιπεδικός γράφος είναι επιπεδικός αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ ο K4 είναι planar αλλά όχι outerplanar).

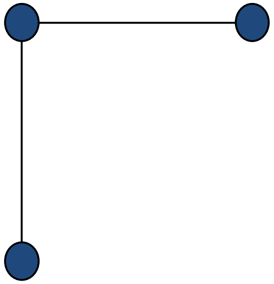
Παράδειγμα – Σταθερά του Euler I

$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r-\|E\|+\|V\|$
1	0	1	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler II

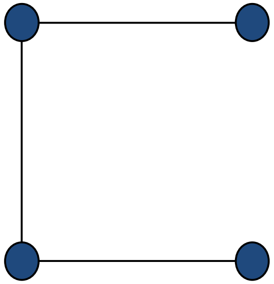
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
2	1	1	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler III



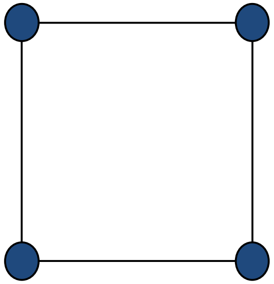
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
3	2	1	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler IV



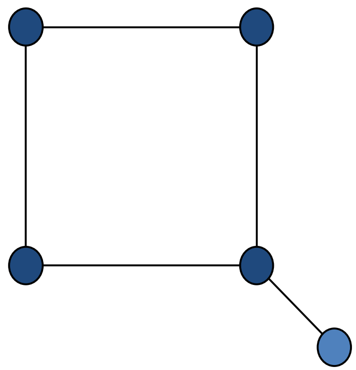
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
4	3	1	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler V



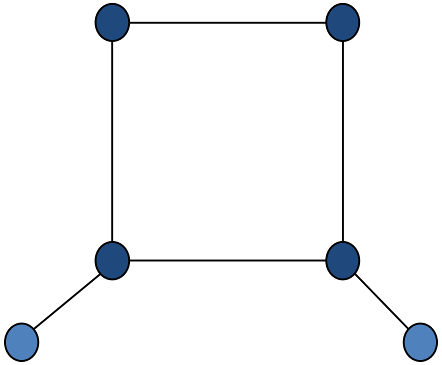
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r-\|E\|+\|V\|$
4	4	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler VI



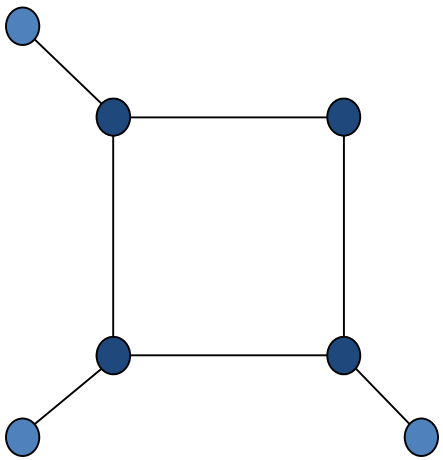
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r-\|E\|+\|V\|$
5	5	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler VII



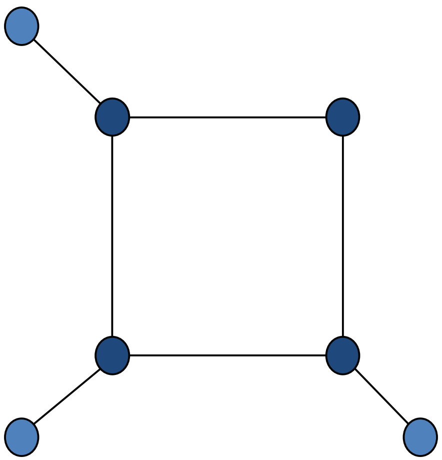
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
6	6	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler VIII



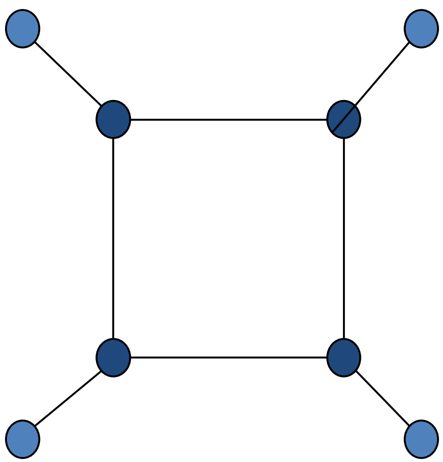
$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	r	$r - \lvert E \rvert + \lvert V \rvert$
7	7	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler IX



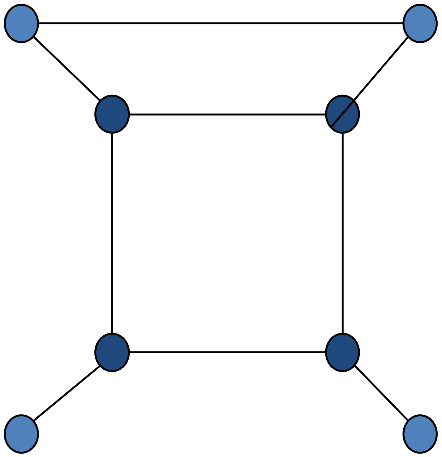
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
7	7	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler X



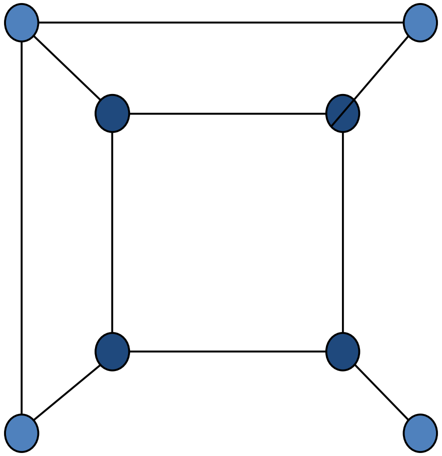
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
8	8	2	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler XI



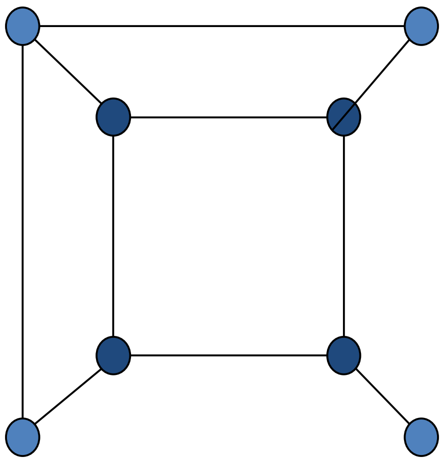
$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	r	$r - \lvert E \rvert + \lvert V \rvert$
8	9	3	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler XII



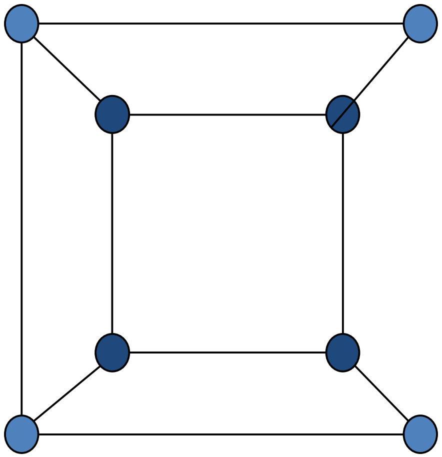
$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	r	$r - \lvert E \rvert + \lvert V \rvert$
8	10	4	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler XIII



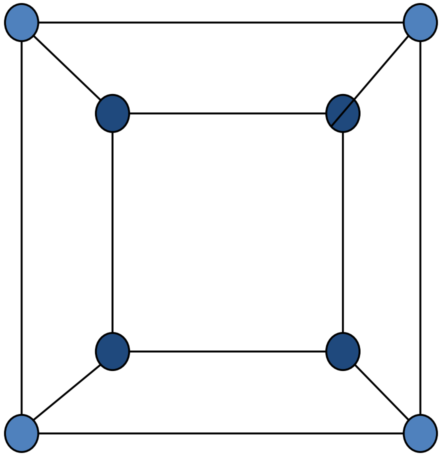
$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r - \|E\| + \|V\|$
8	10	4	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler XIV



$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	r	$r - \lvert E \rvert + \lvert V \rvert$
8	11	5	2

Παράδειγμα – Σταθερά του Euler XV



$\|V\|$	$\|E\|$	r	$r-\|E\|+\|V\|$
8	12	6	2

Θεώρημα Euler

- **Θεώρημα** (Euler 1752). Αν G είναι ένας συνδεδεμένος επίπεδος γράφος, τότε ισχύει:

$$n+r = m+2$$

- **Πόρισμα**. Αν G είναι ένας επίπεδος γράφος με k συνιστώσες, τότε ισχύει:

$$n+r = m+k+1$$

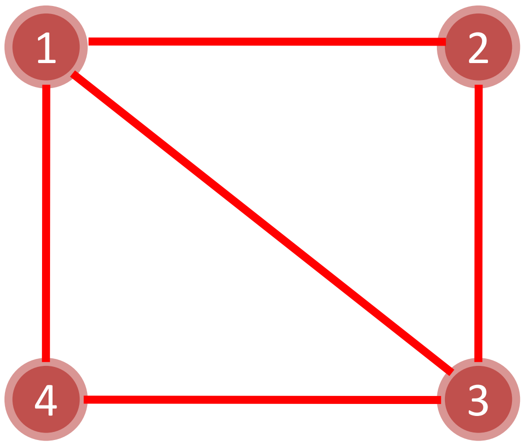
- **Μέγιστος-**maximal ή **τριγωνοποιημένος-**triangulated επίπεδος γράφος είναι εκείνος ο γράφος στον οποίο η εισαγωγή μιας νέας ακμής τον καθιστά μη επίπεδο.

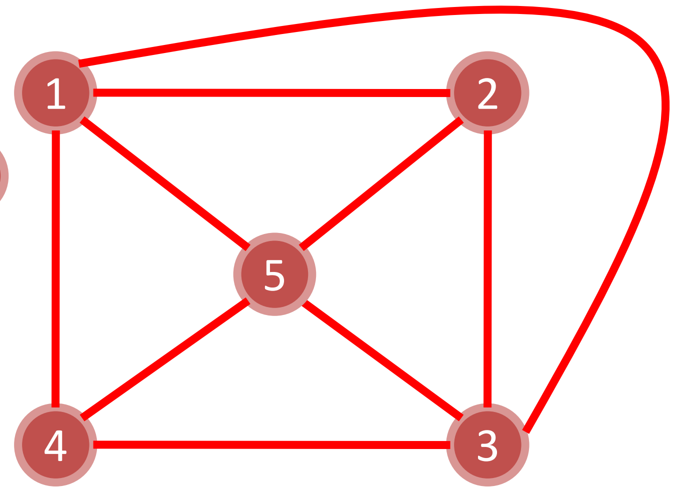
Μέγιστος επίπεδος γράφος Ι

- Μέχρι ποιό σημείο ένας επίπεδος γράφος μπορεί να παραμείνει επίπεδος;
- Όσο υπάρχουν περιοχές που περικλείονται από κύκλο μήκους περισσότερο $\geq$4, μπορούν να εισαχθούν νέες ακμές και ο γράφος να παραμείνει επίπεδος.

Μέγιστος επίπεδος γράφος II

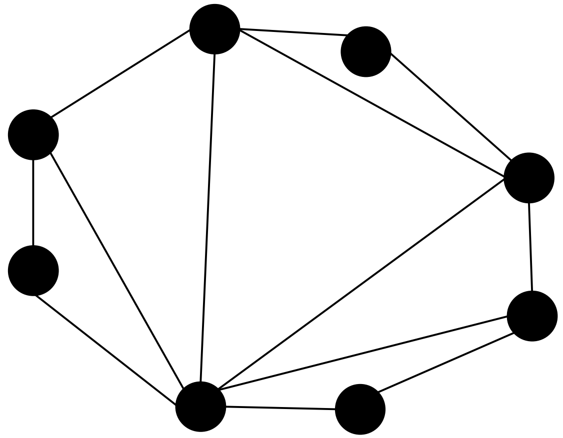
Πως χαρακτηρίζουμε τους επόμενους γράφους?





Μέγιστος εξώτερος επιπεδικός

- **Μέγιστος εξώτερος επιπεδικός** είναι ο γράφος όπου η εισαγωγή μιας νέας ακμής τον καθιστά μη εξώτερο επιπεδικό.
- Με μία επιπλέον ακμή, ο διπλανός γράφος θα γίνει μη εξώτερος επιπεδικός.



Λήμμα των χειραψιών

<u>Λήμμα</u> Χειραψίας για επίπεδους γράφους:
Για κάθε απλό επίπεδο συνδεδεμένο γράφο G ισχύει:

$$2m = \sum_{i=1}^{r=m-n+2} d(r_i)$$

όπου $d(r_i)$ είναι ο βαθμός της περιοχής r_i , δηλ. ο αριθμός των ακμών που περικλείουν την i-οστή περιοχή.

Απόδειξη: Σε ένα επίπεδο γράφο κάθε ακμή βρίσκεται στο σύνορο 2 περιοχών και άρα συνεισφέρει ακριβώς 2 στο άθροισμα των βαθμών των περιοχών.

Ιδιότητες

<u>Πόρισμα</u>: Σε κάθε απλό συνδεδεμένο γράφο με περιφέρεια-girth (κύκλος ελάχιστου μήκος) μήκους g ισχύει η σχέση:

$$(g-2)m \leq g(n-2)$$

<u>Πόρισμα</u>: Για κάθε μέγιστο επίπεδο γράφο με $n \geq 3$ ισχύει:

$$m = 3n-6$$

Απόδειξη: Έστω r το πλήθος των περιοχών του γράφου. Σε ένα μέγιστο επίπεδο γράφο ισχύει: $d(r_i)=3$ για κάθε περιοχή. Συνεπώς από το Λήμμα προκύπτει:

$$2m = 3+3+\ldots+3 \ (r = m-n+2 \text{ φορές}) \Rightarrow$$

$$2m = 3(m-n+2) \Rightarrow m=3n-6$$

Μερικές ιδιότητες ακόμη

<u>Πόρισμα</u>: Για κάθε απλό συνδεδεμένο επίπεδο γράφο με $n \geq 3$ κορυφές ισχύει:

$$m \leq 3n-6$$

Απόδειξη: Έστω r το πλήθος των περιοχών του γράφου. Σε έναν απλό επίπεδο γράφο ισχύει $d(r_i) \geq 3$ για κάθε περιοχή r_i. Συνεπώς από το Λήμμα Χειραψιών ισχύει:

$$2m \geq 3+3+\ldots+3 \text{ (}r=m-n+2\text{ φορές)} \Rightarrow$$

$$2m \geq 3(m-n+2) \Rightarrow$$

$$m \leq 3n-6$$

Διμερείς γράφοι

<u>Πόρισμα</u>: Για κάθε απλό συνδεδεμένο επίπεδο διμερή γράφο G με $n \geq 3$, ισχύει:

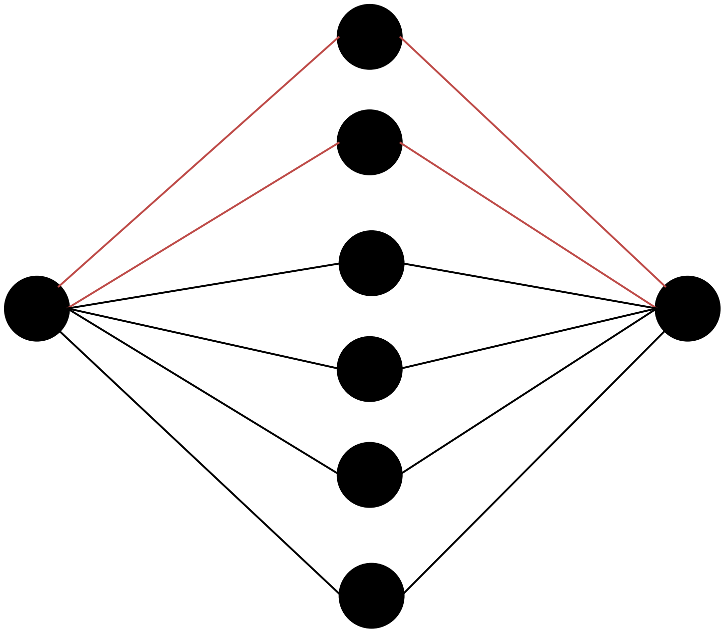
$$m \leq 2n-4$$

Απόδειξη: Έστω r το πλήθος των περιοχών του γράφου. Σε έναν απλό επίπεδο διμερή γράφο ισχύει $d(r_i) \geq 4$ για κάθε περιοχή r_i. Συνεπώς από το Λήμμα Χειραψιών ισχύει:

$$2m \geq 4+4+\ldots+4 \ (r = m-n+2 \text{ φορές}) \Rightarrow$$
$$2m \geq 4(m-n+2) \Rightarrow m \leq 2n-4$$

Διμερής γράφος – Παράδειγμα

- Σε έναν απλό επίπεδο διμερή γράφο ισχύει: $d(r_i) \geq 4$ για κάθε περιοχή r_i.



Βαθμός επίπεδου γράφου

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε επίπεδος γράφος περιέχει τουλάχιστο μία κορυφή v βαθμού $d(v) \leq 5$

Απόδειξη: Έστω ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ≥ 6 και ότι ο γράφος έχει n κορυφές και m ακμές. Ισχύει

$$m \leq 3n-6 \text{ ή } 2m \leq 6n-12 \quad \textbf{<1>}$$

Από το Λήμμα Χειραψιών γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γράφου είναι 2m.
Άρα, επειδή $d(v) \geq 6$ για κάθε v έχουμε

$$2m \geq 6n \quad \textbf{<2>}$$

Από **<1>** και **<2>** $\Rightarrow$ $6n \leq 2m \leq 6n-12$, **άτοπο**.

Μερικοί μη επίπεδοι γράφοι

- **Θεώρημα**: Ο γράφος K_5 δεν είναι επίπεδος (Απόδειξη από Λήμμα Χειραψιών + Euler).

- **Θεώρημα**: Ο διμερής γράφος $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδος (Απόδειξη από Λήμμα Χειραψιών + Euler).

Άσκηση Ι

Έστω ένας επίπεδος γράφος G με r=20 περιοχές.
Αν ο G είναι τακτικός βαθμού 5 πόσες κορυφές έχει;

Λύση:

Από Λήμμα χειραψίας για επίπεδους γράφους έχουμε

$$\Sigma d(v_i)=2m, \text{ για } i=1,\ldots,n.$$

Αλλά $d(v_i)=5$, για κάθε i. Άρα 5+5+...+5 (n φορές)=2m. Άρα:

$$5n = 2m \quad \langle 1 \rangle$$

Από Euler

$$n+r–2=m \text{ ή } n+20–2=m \text{ ή } n+18=m \quad \langle 2 \rangle$$

Από **<1>** και **<2>** $\Rightarrow$ 5n=2n+36 ή 3n=36 ή **n=12**

Άσκηση ΙΙ

Να δειχθεί ότι κάθε συνδεδεμένος, απλός και επιπεδικός γράφος G με $n<12$ έχει μια κορυφή βαθμού $d(v)\leq 4$.

Λύση:

Έστω ότι $d(v)\geq 5$ για κάθε κορυφή v.
Από Λήμμα Χειραψιών έχουμε

$$\Sigma d(v_i)=2m, \text{ για } i=1,\ldots,n.$$

Αλλά $d(v_i) \geq 5$, για κάθε i. Άρα

$$2m\geq 5n \quad \langle 1\rangle$$

Από Πόρισμα 5.4 έχουμε

$$m\leq 3n-6 \text{ ή } 2m\leq 6n-12 \quad \langle 2\rangle$$

Από **<1>** και **<2>** $\Rightarrow$ $5n \leq 6n-12$ ή $n\geq 12$ **(άτοπο)**

Άσκηση III

Ο 4-Κύβος δεν είναι Επιπεδικός

Λύση:

1) Πλήθος ακμών και κορυφών:

   n = 16 (διπλάσιο του 3-κύβου)

   m = 32 (διπλάσιο του 3-κύβου συν
   το πλήθος των κορυφών του 3-κύβου)

2) Έστω ότι είναι επιπεδικός και άρα θα ισχύει:

$$r = 32 – 16 + 2 = 18$$

Άσκηση IV

3) Περιφέρεια-girth: $g = 4$

4) Από το λήμμα χειραψιών :

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{F \in R} \deg(F) \geq \frac{1}{2}\sum_{F \in R} g = \frac{1}{2} r g$$

Στη περίπτωσή μας

$|E| \geq ½\cdot18\cdot4=36$ ενώ $|E| = 32$! ! !

Άτοπο. Άρα ο 4-κύβος δεν είναι επιπεδικός.□

Ομοιομορφικοί γράφοι Ι

- Ο K_5 είναι ο μη επίπεδος γράφος με το μικρότερο αριθμό κορυφών και ο $K_{3,3}$ ο μη επίπεδος γράφος με το μικρότερο αριθμό ακμών.
- Δύο γράφοι λέγονται **ομοιομορφικοί-**homeomorphic αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με μία ή περισσότερες υποδιαιρέσεις (subdivisions) ακμών.

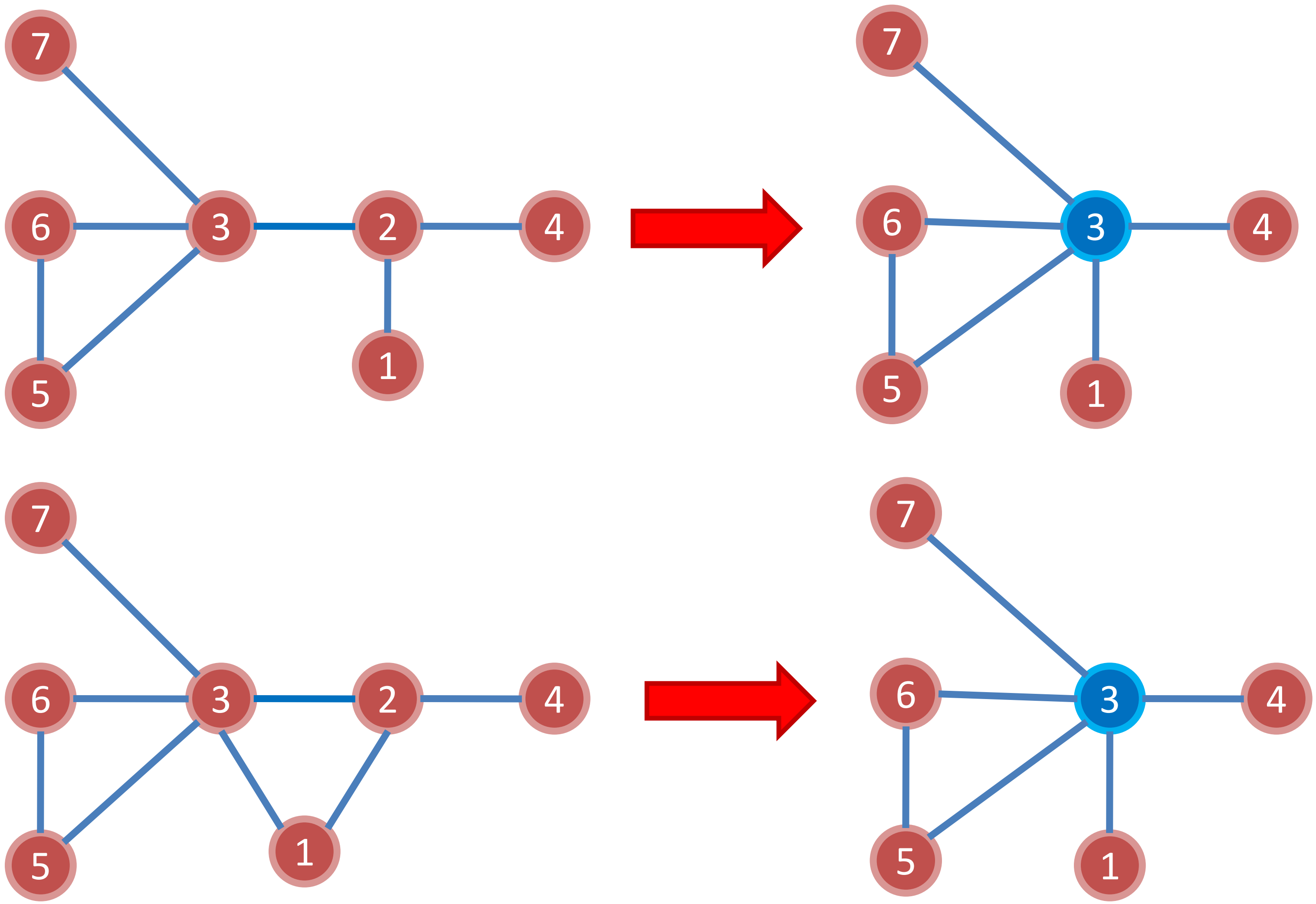
Ομοιομορφικοί γράφοι ΙΙ

<u>Θεώρημα</u> (Kuratowski 1930): Ένας γράφος είναι επίπεδος αν δεν περιέχει κάποιον υπογράφο ομοιομορφικό προς τους K_5 και $K_{3,3}$

Συστολή-contraction είναι η αντίστροφη πράξη της υποδιαίρεσης ακμής

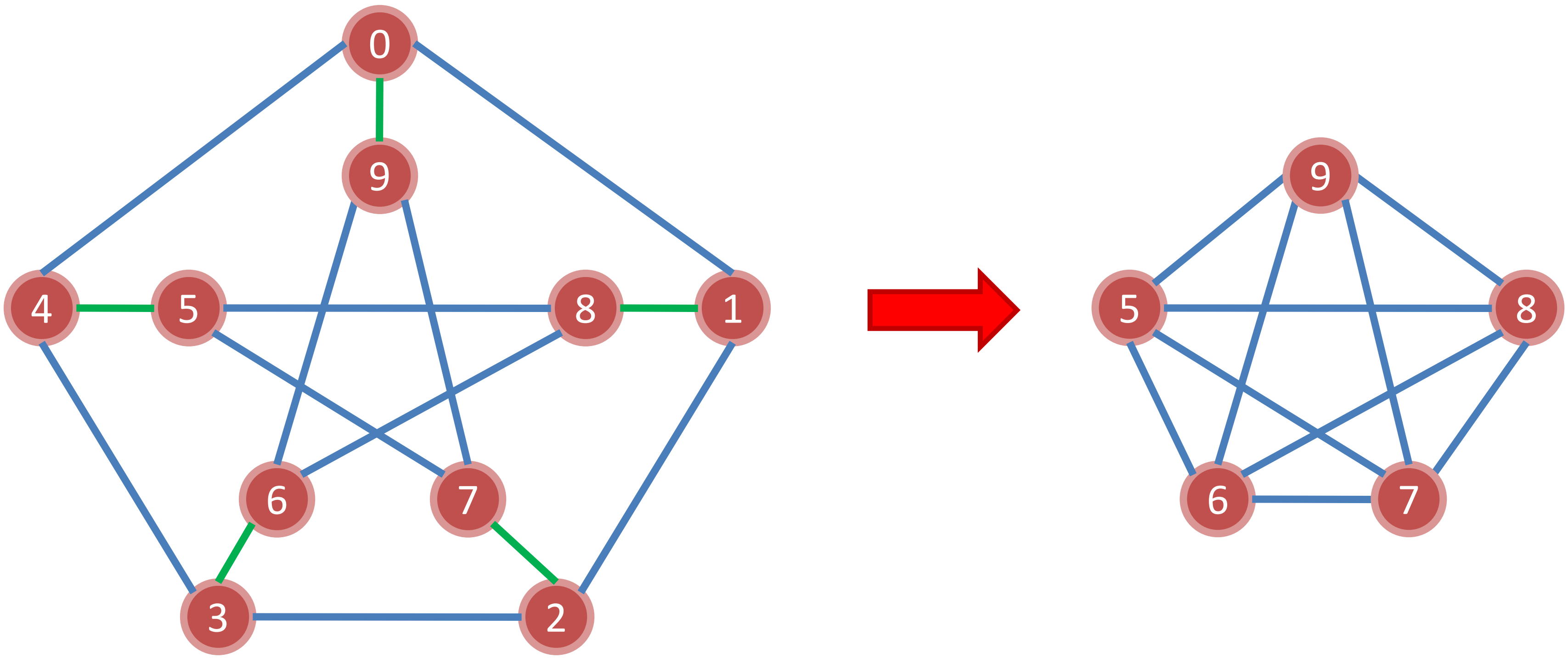
<u>Θεώρημα</u>: Ένας γράφος είναι επίπεδος αν και μόνο αν δεν περιέχει κάποιον υπογράφο **συστελώσιμο** (contractible) προς τους K_5 και $K_{3,3}$

Συστολή ακμών



Γράφος Petersen

Ο γράφος του Petersen είναι συστελώσιμος προς τον K_5



Ενσωμάτωση σε σφαίρα

<u>Θεώρημα</u>: Ένας γράφος είναι ενσωματώσιμος σε επιφάνεια σφαίρας αν και μόνο αν είναι ενσωματώσιμος στο επίπεδο.

Μετρικές επιπεδικότητας

- **Πάχος -** thickness

  Ο ελάχιστος αριθμός επιπέδων που απαιτούνται για την ενσωμάτωση ενός γράφου.
- **Τραχύτητα -** coarseness

  Ο μέγιστος αριθμός μη επίπεδων υπογράφων που αποτελούνται από ξένα μεταξύ τους σύνολα ακμών
- **Αριθμός Διασταυρώσεων -** crossing number

  Το ελάχιστο πλήθος τομών ενός γράφου στο επίπεδο.
- **Αριθμός Διάσπασης** - splitting number

  Το ελάχιστο πλήθος διασπάσεων ώστε να καταστεί ο γράφος επίπεδος

Πάχος Ι

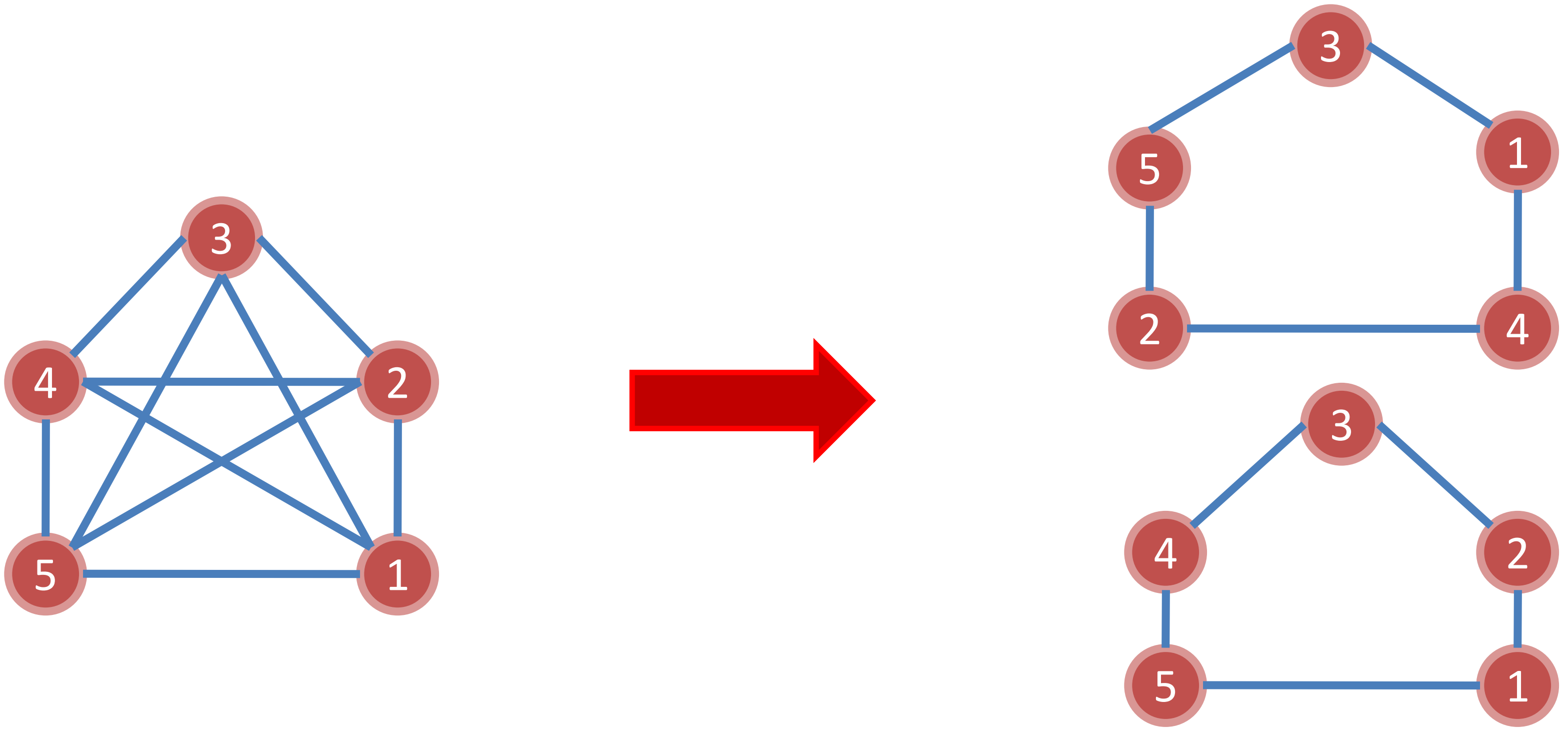
- Για απλό συνδεδεμένο γράφο G:

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

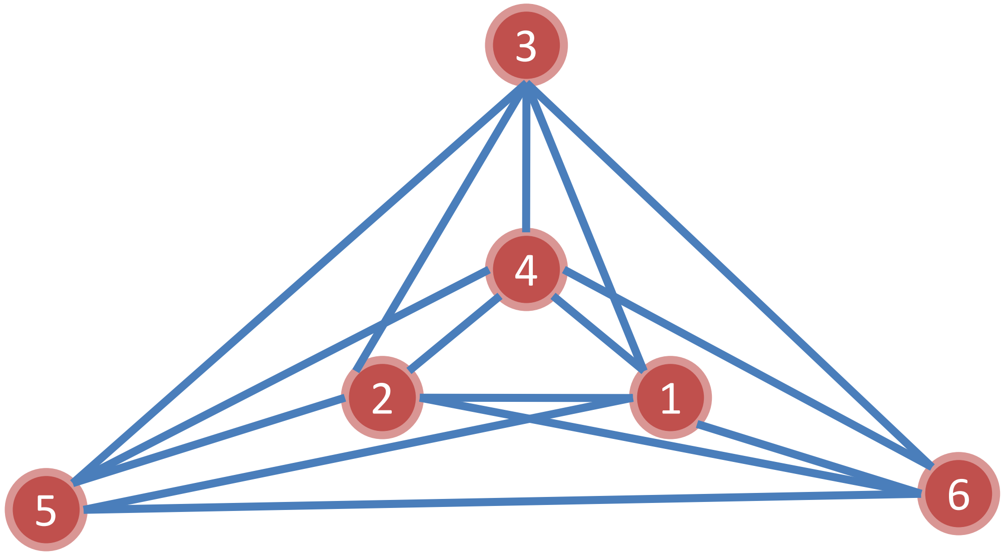
- Για διμερή γράφο G: $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$

- Για πλήρη γράφο K_n: $t(K_n) \geq \left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$

Πάχος ΙΙ



Αριθμός διασταυρώσεων

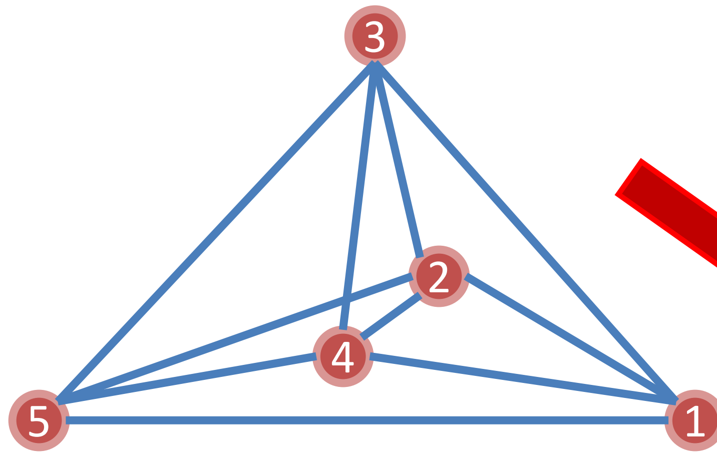


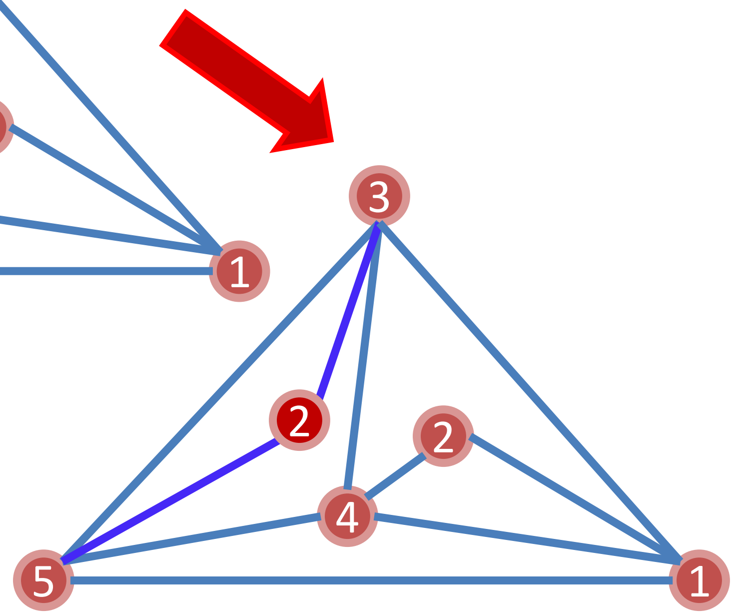
$cr(K_6)=3$

<u>Θεώρημα</u>. Σε ένα απλό συνδεδεμένος γράφο G ισχύει:

$$cr(G) \geq m-3n+6$$

Αριθμός διάσπασης

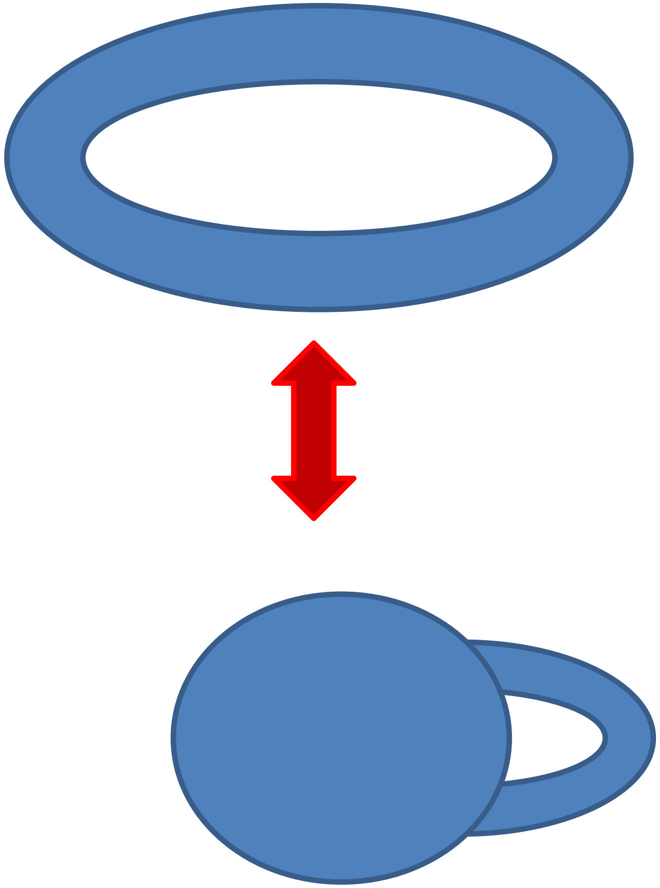




$s(K_5)$=1

$$s(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil$$

Γένος



- Μία σαμπρέλα είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα με μία **λαβή**-handle.
- Μία επιφάνεια έχει **γένος g** (genus) αν είναι ομοιομορφική προς μία σφαίρα με g λαβές.
- Γράφος ενσωματώσιμος σε επιφάνεια γένους *g* αλλά όχι σε μία επιφάνεια γένους *g*-1, καλείται **γράφος γένους *g***.

Θεωρήματα

Θεώρημα: Αν G ένας συνδεδεμένος γράφος τότε ισχύει:

$$n+r = m+2-2g$$

Θεώρημα: Για το γένος ενός γράφου G ισχύει:

$$g(G) \geq \left\lceil \frac{m-3n}{6} + 1 \right\rceil$$

Θεώρημα: Ισχύει g(G) ≤ cr(G).

Γεωμετρικός δυαδικός Ι

Γεωμετρικός δυαδικός –geometric dual.

Σε κάθε περιοχή του G εισάγεται μία κορυφή του G* (λευκή κουκίδα). Δύο κορυφές του G* ενώνονται με μία ακμή για κάθε κοινή ακμή που έχουν οι αντίστοιχες περιοχές του G. Για κάθε γέφυρα του G εισάγεται στο G* ένας βρόχος στην κορυφή που αντιστοιχεί στην περιοχή που περικλείει τη γέφυρα. Έτσι, κάθε ακμή του G* τέμνεται μόνο με μία ακμή του G.

Γεωμετρικός δυαδικός ΙΙ

- Ο γεωμετρικός δυαδικός ενός γράφου G δεν είναι μοναδικός, γιατί από μία διαφορετική ενσωμάτωση του G στο επίπεδο θα παραχθεί διαφορετικός γεωμετρικός δυαδικός.

Συνδυαστικός δυαδικός

- Ένας γράφος G΄ λέγεται **συνδυαστικός δυαδικός** – combinatorial dual, ή **αφηρημένος δυαδικός** – abstract dual, ενός γράφου G αν και μόνο αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ακμών τους, έτσι ώστε οι ακμές ενός κύκλου του G΄ να αντιστοιχούν σε έναν σύνολο αποκοπτουσών ακμών του G.

Θεωρήματα

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε επίπεδος γράφος G έχει έναν αντίστοιχο επίπεδο συνδυαστικό δυαδικό γράφο G*.

Άρα, ο γεωμετρικός δυαδικός ενός επίπεδου γράφου ταυτίζεται με το συνδυαστικό δυαδικό του.

<u>Πόρισμα</u>: Αν ο γράφος G έχει ένα γεωμετρικό δυαδικό γράφο G*, τότε ισχύει : (G*)*=G

<u>Θεώρημα</u>: (Whitney 1933): Ένας γράφος είναι επίπεδος αν και μόνο αν έχει συνδυαστικό δυαδικό.

Αυτο-δυαδικός γράφος

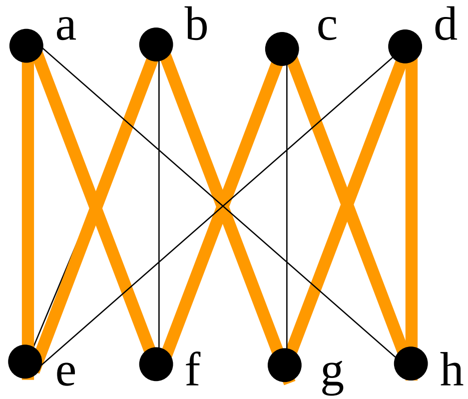
Ένας γράφος ομοιομορφικός προς το δυαδικό του λέγεται **αυτο-δυαδικός** – self-dual. Παραδείγματα τέτοιων γράφων είναι ο K_4 και οι τροχοειδείς γράφοι.

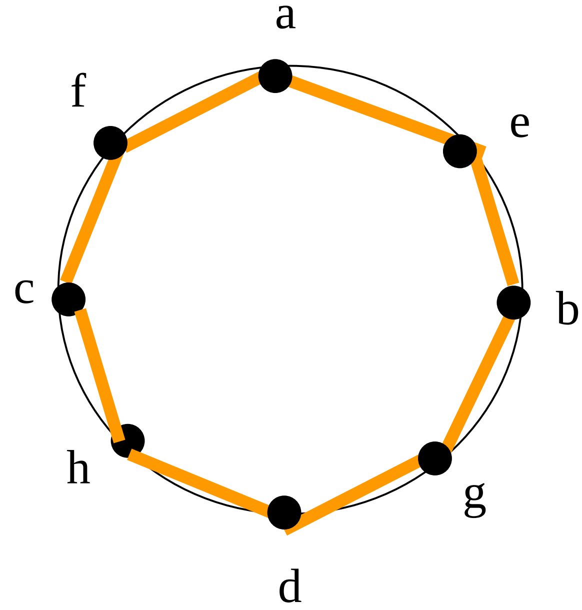
Ευριστική μέθοδος κύκλου-χορδής

- Διαπίστωση επιπεδικότητας σε μικρούς γράφους
  - Βήμα 1: Βρες ένα Hamiltonian κύκλο ***C*** και σχεδίασέ τον σαν πολύγωνο
  - Βήμα 2: [Οι ακμές που δεν ανήκουν στον κύκλο ***C*** ονομάζονται χορδές.] Με βάση τον κύκλο ***C***, ομαδοποιούμε τις χορδές σε 2 ανεξάρτητα σύνολα ***A*** και ***B***:
    - Το ***A*** περιέχει τις ακμές που μπορούν να σχεδιασθούν μέσα στον ***C*** χωρίς διασταυρώσεις
    - Το ***B*** περιέχει τις ακμές που μπορούν να σχεδιαστούν έξω από τον ***C*** χωρίς διασταυρώσεις
- Αν ο προηγούμενος διαχωρισμός των ακμών είναι εφικτός, τότε ο γράφος είναι επιπεδικός.

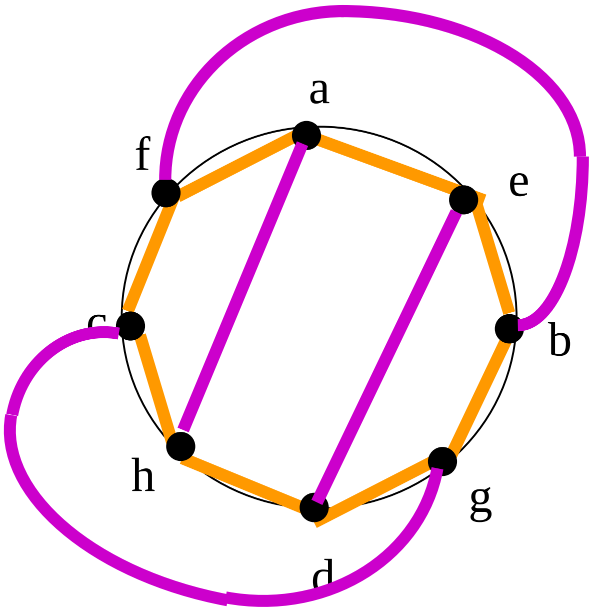
Παράδειγμα – Βήμα 1

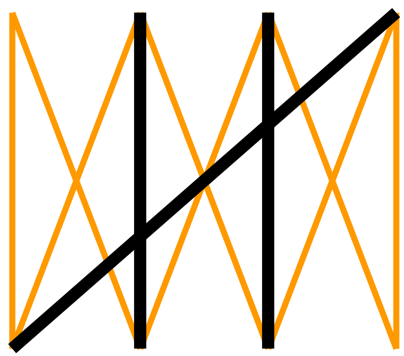
- Βρίσκουμε ένα Hamiltonian κύκλο και τον συμβολίζουμε με πορτοκαλί χρώμα.
- Τον σχεδιάζουμε σαν πολύγωνο





Παράδειγμα – Βήμα 2

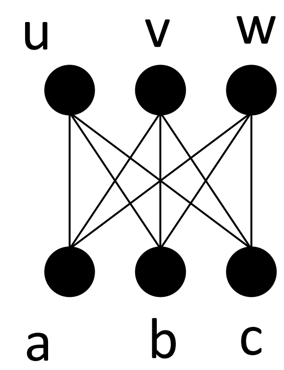


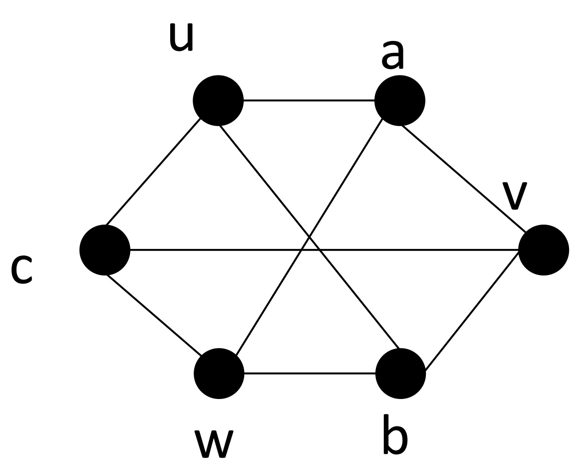


- Επιλέγουμε μία χορδή είτε εντός είτε εκτός του κύκλου. Για παράδειγμα, θέτουμε τη χορδή (b,f) εκτός του κύκλου
- Καθώς οι χορδές δεν διασταυρώνονται, ο γράφος είναι επιπεδικός

Παράδειγμα για το $K_{3,3}$ I

- Έστω ο διμερής γράφος $K_{3,3}$ που έχει ένα Hamiltonian κύκλο C μήκους 6, τον οποίο σχεδιάζουμε στο επίπεδο ως κανονικό εξάγωνο ***uavbwcu***.
- Στη συνέχεια προσπαθούμε να σχεδιάσουμε τις 3 υπόλοιπες ακμές ***ub***, ***vc*** και ***wa***.



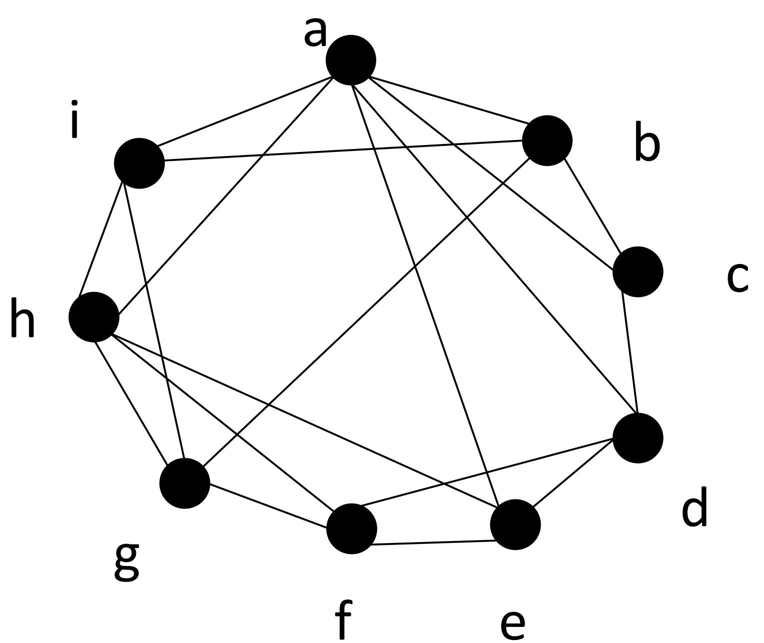


Παράδειγμα για το $K_{3,3}$ II

- **Συμβατές-**compatible λέγονται οι ακμές που μπορούν να σχεδιασθούν **μαζί** είτε μέσα είτε έξω από τον κύκλο χωρίς να τέμνονται.
- *Από τις ακμές **ub**, **vc*** και ***wa*** μόνο μία μπορεί να κείται εντός του κύκλου, όπως και μόνο μία μπορεί να κείται εκτός του κύκλου, διότι υπάρχουν διασταυρώσεις ακμών.
- Αν βάλουμε την ***ub*** στο σύνολο ***A*** και την ***vc*** στο σύνολο ***B***, τότε δεν μπορούμε να βάλουμε την ***wa*** σε κανένα από τα 2 σύνολα.
- Η ***wa*** είναι ασύμβατη προς τις ***ub*** και ***vc***.
- Οι 3 ακμές είναι ανά δύο ασύμβατες μεταξύ τους.
- Συνεπώς δεν μπορούμε να σχεδιάζουμε και τις 3 ακμές χωρίς διασταυρώσεις, άρα ο γράφος $K_{3,3}$ είναι μη επιπεδικός.

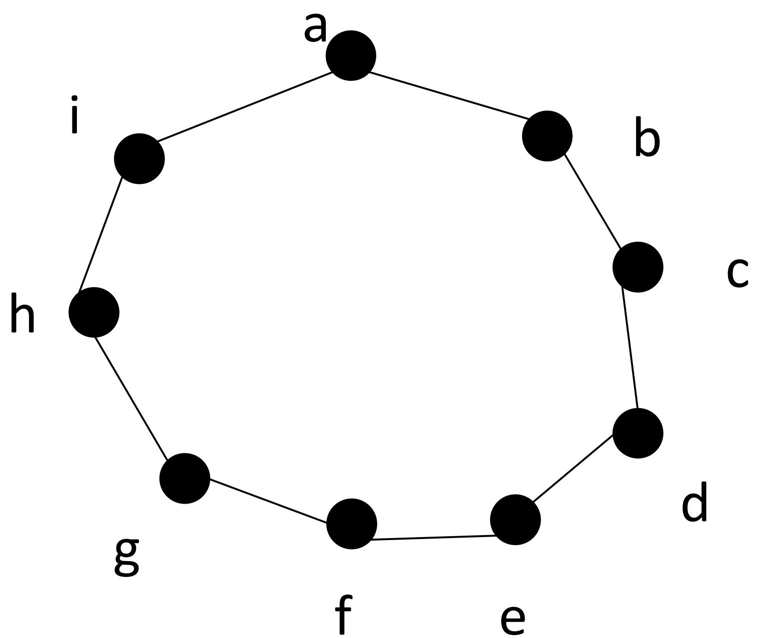
Ένα άλλο παράδειγμα I

Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο κύκλου-χορδής στον επόμενο γράφο G για να εξετάσουμε αν είναι επιπεδικός.



Ένα άλλο παράδειγμα ΙΙ

Επιλέγουμε τον Hamiltonian κύκλο ***C = abcdefghia***



Ένα άλλο παράδειγμα III

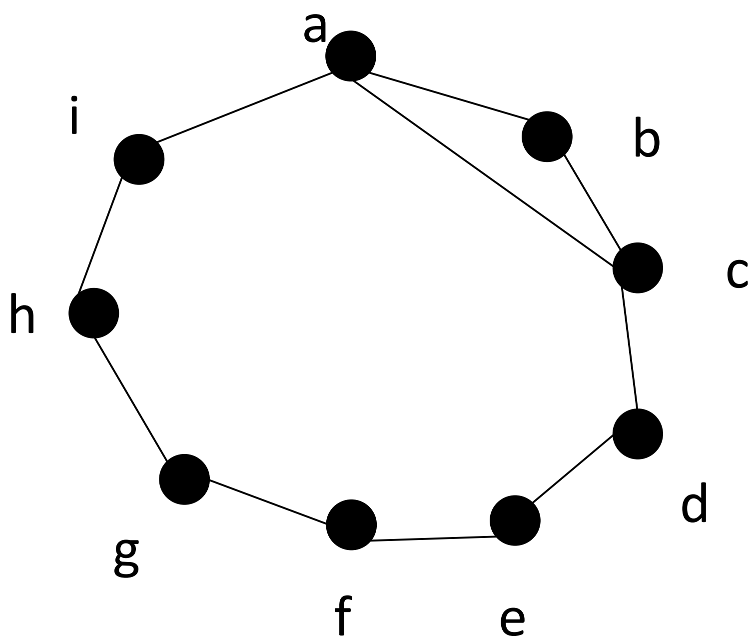
Γράφουμε τις ακμές που δεν ανήκουν στον κύκλο *C* ως εξής:

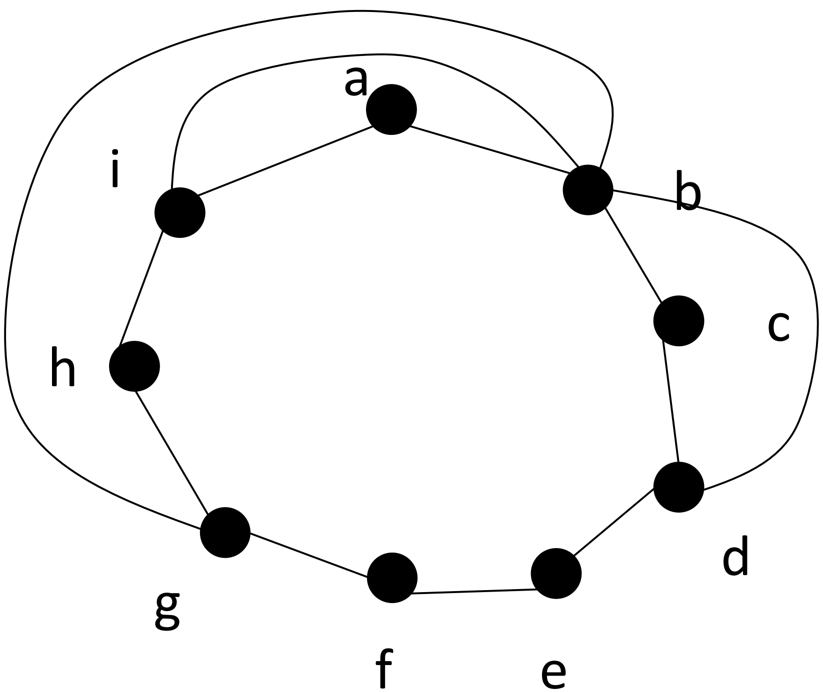
ac	*bd*	*df*
ad	*bg*	*eh*
ae	*bi*	*fh*
ah		*gi*

Χωρισμός σε σύνολα I

- Βάζουμε την πρώτη ακμή της λίστας **ac** στο σύνολο **A** και ταυτόχρονα τη διαγράφουμε από τη λίστα. Έτσι η λίστα γίνεται: **list: ad, ae, ah, bd, bg, bi, df, eh, fh, gi.**
- Το σύνολο **A = {ac}** είναι ασύμβατο με τις ακμές **bd, bg** και **bi**, οι οποίες μπαίνουν στο σύνολο **B**.
  Άρα **B = {bd, bg, bi}**.
- Οι ακμές του **B** είναι συμβατές μεταξύ τους και συνεπώς διαγράφονται από τη λίστα.
  Άρα: **list: ad, ae, ah, df, eh, fh, gi.**

Χωρισμός σε σύνολα ΙΙ





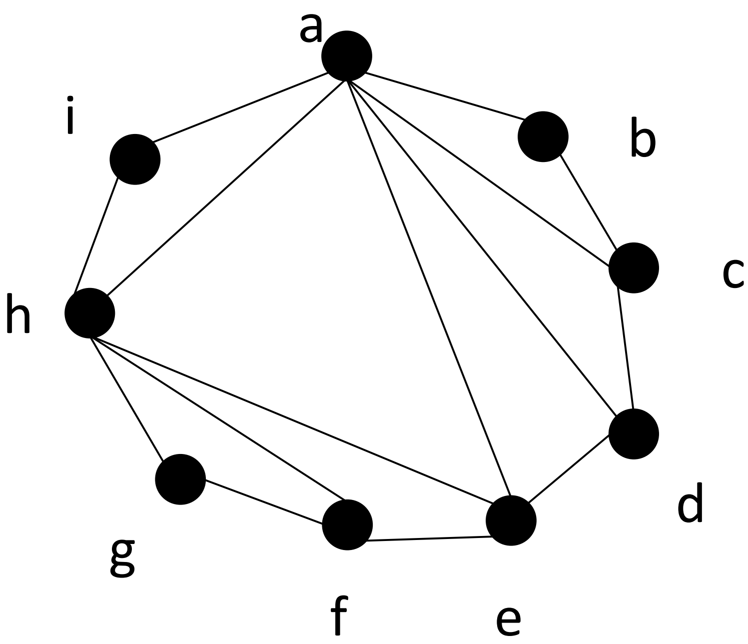
Οι ακμές του συνόλου A σχεδιάζονται μέσα στον C
A={ac}

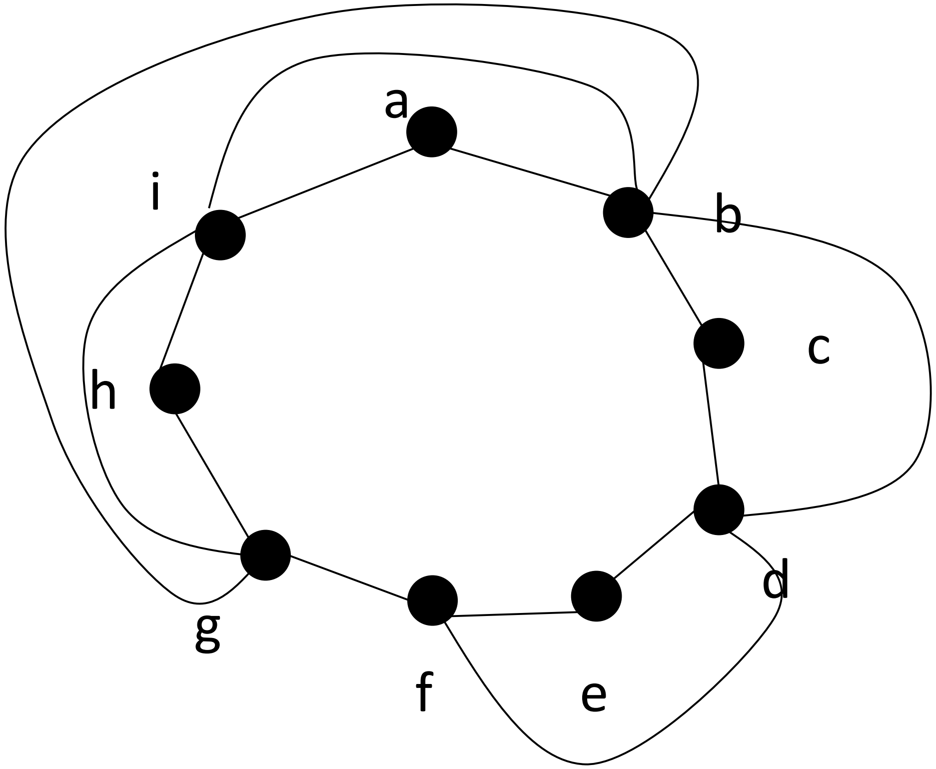
Οι ακμές του συνόλου B σχεδιάζονται έξω από τον C
B={bd, bg, bi}

Χωρισμός σε σύνολα ΙΙΙ

- ***A*={*ac*}**, ***B*={*bd,bg,bi*}**, ***list: ad,ae,ah,df,eh,fh,gi*.**
- Εξετάζουμε τώρα με τη σειρά τις ακμές του *B* σε σχέση με τις ακμές της λίστας.
- Η ακμή ***bg*** του συνόλου ***B*** είναι ασύμβατη με τις ακμές: ***ad,ae,eh,fh***, οι οποίες μπαίνουν στο σύνολο ***A***.
- Άρα ***A*={*ac,ad,ae,eh,fh*}.** Οι ακμές του ***A*** είναι όλες συμβατές μεταξύ τους και η λίστα μεταβάλλεται ως εξής:***list: ah,df,gi*.**
- Η ακμή ***bi*** του συνόλου ***B*** είναι ασύμβατη με την ακμή ***ah*** η οποία μπαίνει στο ***A***, οπότε: ***A*={*ac,ad,ae,eh,fh,ah*}.**

Τελικός χωρισμός σε σύνολα

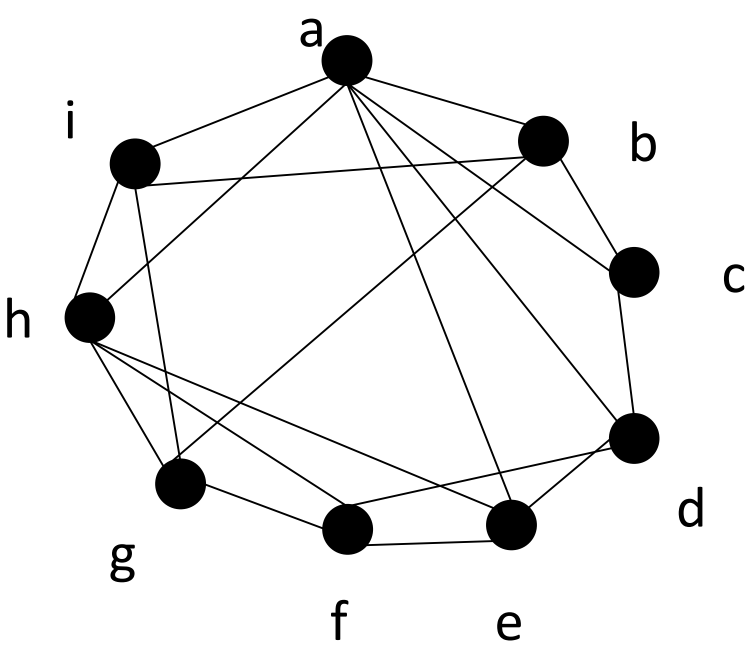




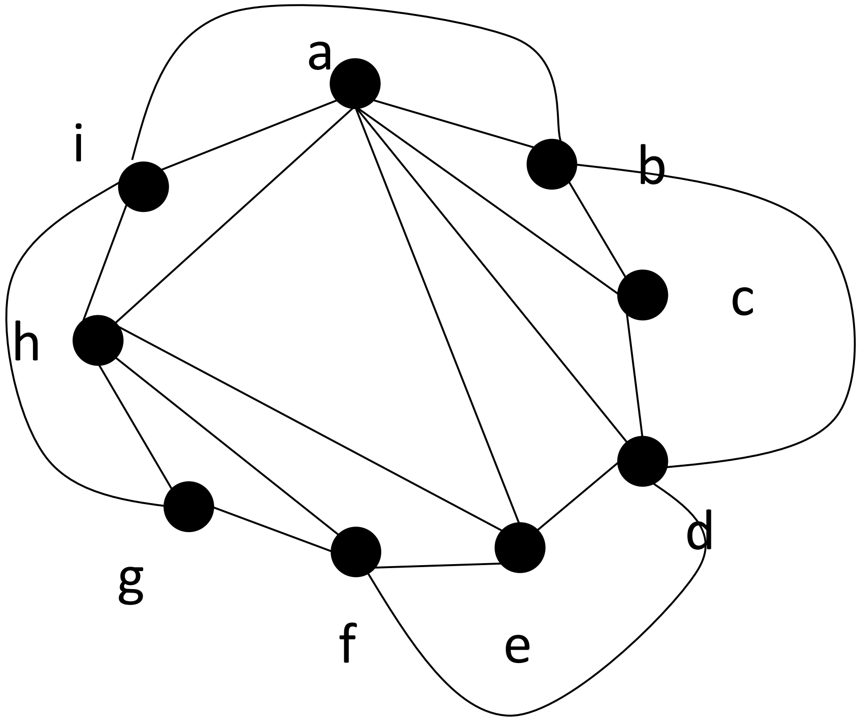
A={ac, ad, ae, eh, fh, ah}

B={bd, bg, bi, df, gi}

Ο γράφος είναι επιπεδικός



Γράφος G



Επίπεδη σχεδίαση του G

Για να σχεδιάσουμε την επίπεδη έκδοση του γράφου *G* συγχωνεύουμε τα 2 προηγούμενα σχήματα

Εναλλακτικά κριτήρια επιπεδικότητας

- Εκτός από τα Θεωρήματα Euler και Kuratowski υπάρχουν άλλες 2 προσεγγίσεις για την εύρεση επιπεδικότητας
- **Πλήρες σύνολο βασικών κύκλων S** (complete set of basic circuits) είναι ένα σύνολο κύκλων όπου:
  - Κάθε κύκλος του συνόλου S μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα δακτυλίου μερικών ή όλων των κύκλων του συνόλου S, και
  - Δεν μπορεί κάποιος κύκλος του συνόλου S να εκφρασθεί ως άθροισμα δακτυλίου άλλων κύκλων εκτός S

Βασικό θεώρημα

- **<u>Θεώρημα</u>** (MacLane 1937): Ένας γράφος είναι επίπεδος αν και μόνον αν υπάρχει ένα πλήρες σύνολο βασικών κύκλων S, τέτοιο ώστε καμιά ακμή του γράφου να μην εμφανίζεται σε περισσότερους από δύο κύκλους του S.

- Τα 3 θεωρήματα (Euler, Kuratowski, McLane) δεν δίνουν αποτελεσματικές μεθόδους ελέγχου της επιπεδικότητας και δεν παράγουν τον επίπεδο γράφο.

Αλγοριθμικό κριτήριο

- Έστω γράφος $G(V,E)$ και υπογράφος $G_1(V_1,E_1) \subseteq G$. **Κομμάτι**-piece P του G είναι ένας υπογράφος του G, το οποίο ονομάζεται **σχετικό**-relative προς τον υπογράφο G_1 αν είναι:
  – είτε μία ακμή $e=(u,v) \in E$, όπου $e \notin E_1$, αλλά $u,v \in V_1$
  – είτε μία συνδεδεμένη συνιστώσα του $G–G_1$ συν οποιεσδήποτε ακμές προσπίπτουσες σε κορυφές του υπογράφου

Μερικοί ακόμη ορισμοί

- Οι κορυφές του κομματιού P που ανήκουν και στο G_1 λέγονται **κορυφές επαφής** – contact vertices

- Ένα κομμάτι με δύο ή περισσότερες κορυφές επαφής λέγεται **τμήμα**-segment.

- Δύο τμήματα λέγονται **ασύμβατα**-incompatible αν τέμνονται τουλάχιστο 2 ακμές τους, όταν τοποθετούνται στην ίδια περιοχή του επιπέδου που προσδιορίζεται από έναν κύκλο C του G.

Βοηθητικός γράφος

- Η ενσωμάτωση κομματιών που δεν είναι τμήματα είναι εύκολη γιατί έχουν μόνο ένα σημείο επαφής με το γράφο.
- Για την ενσωμάτωση των τμημάτων κατασκευάζεται ένας **βοηθητικός**-auxiliary γράφος P(C)
- Ο γράφος αυτός έχει τόσες κορυφές όσες είναι τα τμήματα του γράφου που είναι σχετικά προς τον υπογράφο G_1 και ακμές που ενώνουν τις κορυφές αν τα τμήματα είναι ασύμβατα
- **Θεώρημα**: Ένας γράφος G είναι επίπεδος, αν και μόνο αν για κάθε κύκλο C του G ο βοηθητικός γράφος P(C) είναι διμερής

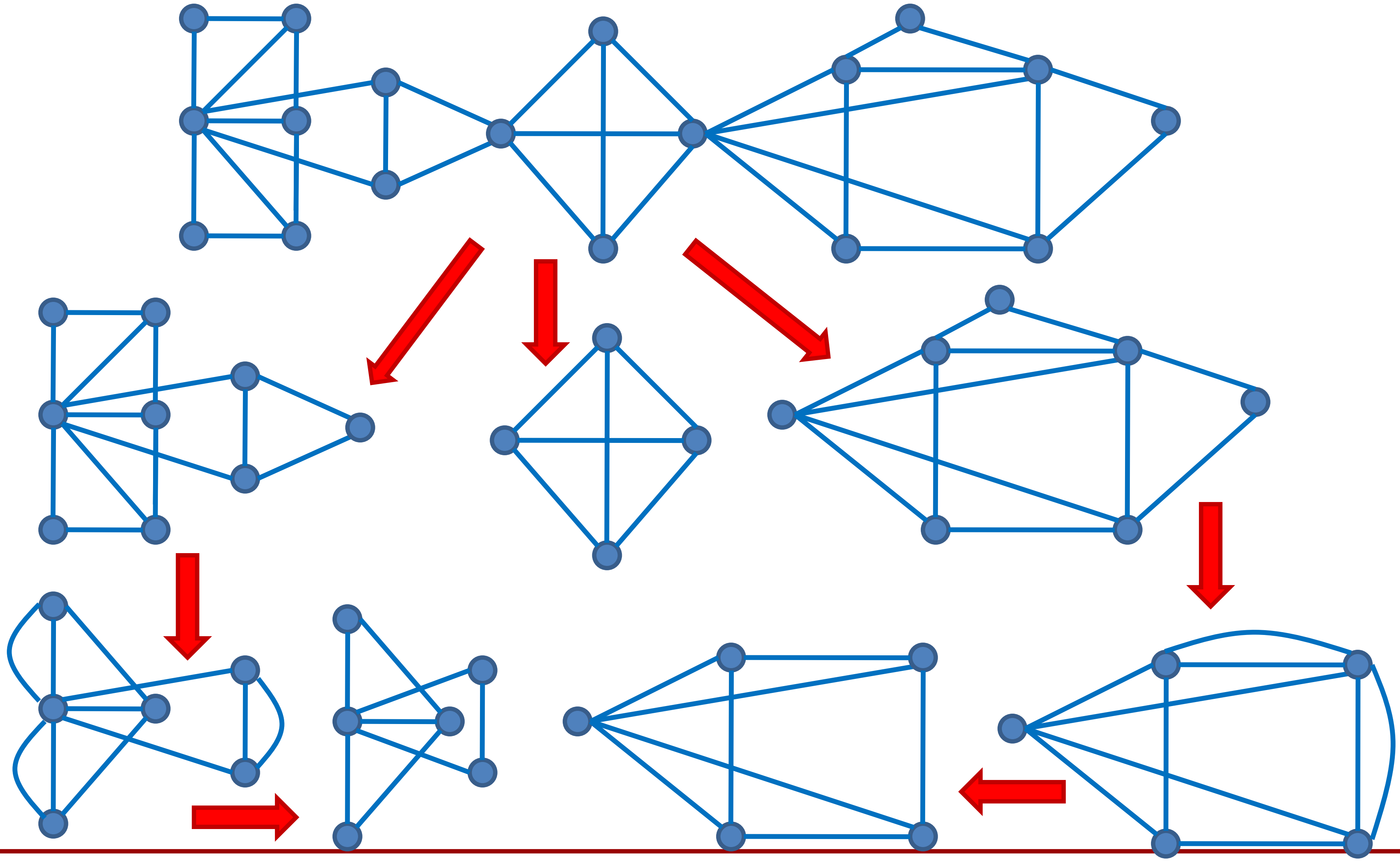
Αλγόριθμος επιπεδικότητας DMP I

- Πολυπλοκότητα $O(n^4)$. Προηγείται **φάση προεπεξεργασίας,** η οποία περιλαμβάνει τα εξής βήματα:
  1. Αν $n<5$ ή $m<9$, τότε ο γράφος είναι επίπεδος
  2. Αν $m>3n-6$, τότε ο γράφος είναι μη-επίπεδος
  3. Αν ο γράφος είναι μη συνδεδεμένος, τότε αρκεί να εξεταστεί κάθε συνιστώσα χωριστά. Άρα εστιάζουμε σε συνδεδεμένους γράφους.
  4. Αν ο γράφος περιέχει μια αποκόπτουσα κορυφή, τότε αρκεί να εξεταστεί αν τα 2 τεμάχια είναι επίπεδα. Άρα εστιάζουμε σε 2-συνδεδεμένους γράφους.

Αλγόριθμος επιπεδικότητας DMP II

5. Αν υπάρχουν βρόχοι και παράλληλες ακμές, τότε αγνοούνται επειδή δεν επηρεάζουν την επιπεδικότητα του γράφου. Άρα εστιάζουμε σε απλούς γράφους.
6. Αν υπάρχουν κορυφές βαθμού 2, τότε παράγεται ένας ομοιομορφικός γράφος με το μικρότερο αριθμό κορυφών εκτελώντας την πράξη της συστολής.

Παράδειγμα



Βασική αρχή

- **Ορισμός**: έστω H′ μια επίπεδη ενσωμάτωση ενός υπο-γράφου H⊆G. Αν υπάρχει μια επίπεδη ενσωμάτωση G′ του G ώστε H′⊆G′, τότε ο H′ λέγεται **παραδεκτός**-admissible στο G.
- Π.χ. έστω ο γράφος $G=K_5–e_1$ όπου V ={1,2,3,4,5} και $e_1=(1,5)$. Δίνεται μια παραδεκτή και μια απαράδεκτη ενσωμάτωση του υπογράφου $H=G–e_2$ όπου $e_2=(1,2)$

Βασικές αρχές DMP I

- Ο αλγορίθμος κατασκευάζει μια ακολουθία υπογράφων $H'_1, H'_2, H'_3, \ldots, H'_{r=m-n+2}=G$, έτσι ώστε $H'_i \subset H'_{i+1}$ και κάθε H'_i να είναι παραδεκτό στο G. Έτσι μπορεί να κατασκευαστεί μια επίπεδη ενσωμάτωση του G ή να διαπιστωθεί ότι αυτό είναι ανεφικτό, επειδή κάποιο τμήμα S δεν είναι ενσωματώσιμο σε οποιαδήποτε περιοχή
- Ο αλγόριθμος ξεκινά με την εύρεση ενός κύκλου C του G και την ενσωμάτωσή του στο επίπεδο. Αυτός ο κύκλος είναι ο πρώτος υπογράφος H'_1.
- Κατόπιν, ο αλγόριθμος προσπαθεί να βρει ένα σύνολο τμημάτων σχετικών προς τον τρέχοντα υπογράφο H'_i. Για κάθε τέτοιο τμήμα S, ο αλγόριθμος υπολογίζει το σύνολο $R(S,H'_i)$, δηλαδή το σύνολο των περιοχών όπου το S μπορεί να ενσωματωθεί μέσα στον υπογράφο H'_i.

Βασικές αρχές DMP II

- Αν βρεθεί ένα τμήμα S με μόνο μία τέτοια περιοχή r, τότε κατασκευάζεται ο υπογράφος H'_{i+1} σχεδιάζοντας ένα μονοπάτι P μεταξύ των 2 κορυφών επαφής του S με το περίγραμμα της περιοχής r.
- Αν δεν βρεθεί ένα τέτοιο τμήμα S, τότε κατασκευάζεται ένα μονοπάτι P μεταξύ 2 κορυφών επαφής οποιουδήποτε τμήματος.
- Σε οποιαδήποτε από τις 2 προηγούμενες περιπτώσεις το μονοπάτι P χωρίζει την περιοχή όπου ενσωματώνεται σε 2 υποπεριοχές.
- Η ανωτέρω διαδικασία επαναλαμβάνεται $r = m-n+2$ φορές το πολύ.

Αλγόριθμος DMP I

Αλγόριθμος DMP ελέγχου επιπεδικότητας

Είσοδος: ένα προεπεξεργασμένο τεμάχιο G (έλεγχος 6 σταδίων)

Έξοδος: Απάντηση αν ο γράφος G είναι επίπεδος ή όχι

Μέθοδος DMP: Αναζήτηση μιας ακολουθίας παρα-δεκτών ενσωματώσεων σε έναν αρχικό κύκλο C.

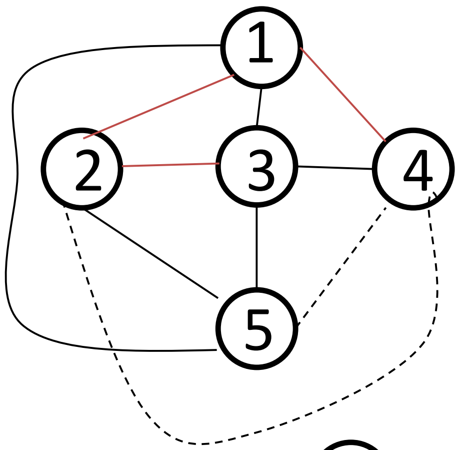
1. Εύρεση ενός κύκλου C και μιας επίπεδης ενσωμάτωσης του C η οποία είναι ο αρχικός υπογράφος H'_1. i←1, r←2
2. **Αν** r=m–n+2, τότε ο γράφος είναι επιπεδικός και ο αλγόριθμος τερματίζει, **αλλιώς** προσδιορίζονται τα τμήματα S του H'_i στο γράφο G και για κάθε τμήμα προσδιορίζεται το σύνολο των περιοχών $R(S, H'_i)$

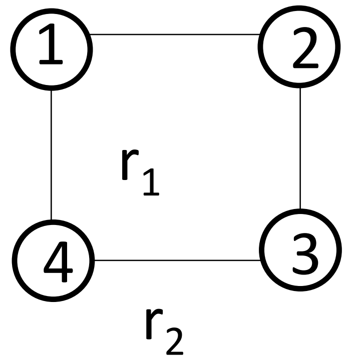
Αλγόριθμος DMP II

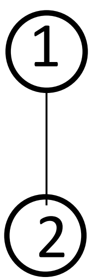
3. **Αν** υπάρχει ένα τμήμα S με $R(S,H'_i)=\emptyset$, τότε ο γράφος δεν είναι επιπεδικός και ο αλγόριθμος τερματίζει
   αλλιώς αν υπάρχει ένα τμήμα S με $|R(S, H'_i)|=1$, τότε θέτουμε $\{r\} = R(S, H'_i)$
   αλλιώς λαμβάνουμε ως S οποιοδήποτε τμήμα και ως r οποιαδήποτε περιοχή του συνόλου $R(S, H'_i)$
4. Επιλέγεται ένα μονοπάτι P του S που συνδέει 2 κορυφές επαφής του S. Θέτουμε $H'_{i+1}= H'_i \cup P$ για να προκύψει η επίπεδη ενσωμάτωση H'_{i+1} με το P τοποθετημένο στην περιοχή r
5. Θέτουμε $i \leftarrow i+1$, $r \leftarrow r+1$ και πηγαίνουμε στο βήμα 2

Παράδειγμα Ι

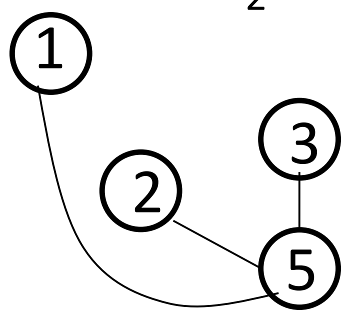
$G=K_5\text{-}(4,5)\text{-}(2,4)$







S_1

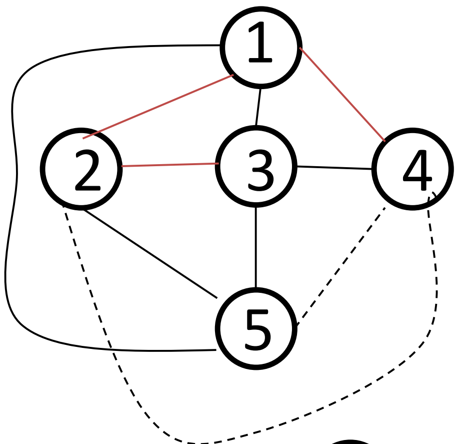


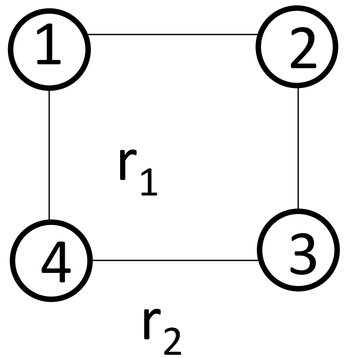
S_2

Θα υπολογίσουμε μια ενσωμάτωση του $G=K_5-\{e_1,e_2\}$, $e_1=(4,5)$, $e_2=(2,4)$.

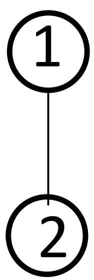
- **Βήμα 1.** Βρίσκουμε έναν κύκλο *C* και μια επίπεδη ενσωμάτωσή του H'_1. $i=1$, $r=2$

Παράδειγμα ΙΙ

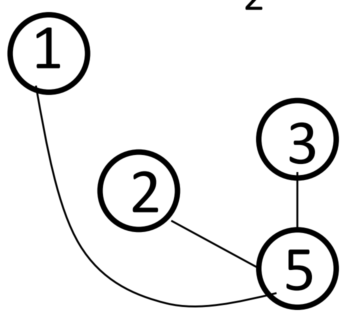




- **Βήμα 2.**
  Ισχύει r=2 και m–n+2=8–5+2=5. Βρίσκουμε τα τμήματα του G που είναι σχετικά προς τον H'_1, δηλαδή τα S_1 και S_2. Ισχύει $R(S_1,H'_1)=\{r_1,r_2\}=R(S_2,H'_1)$

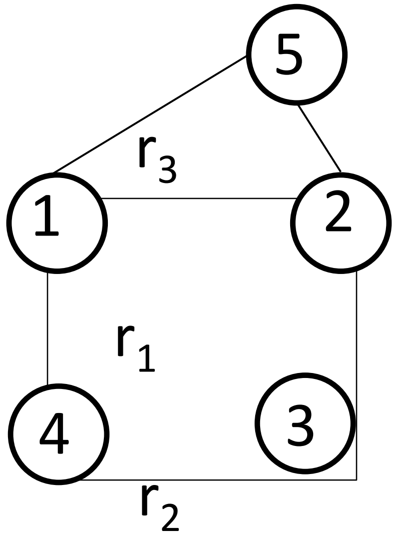


S_1



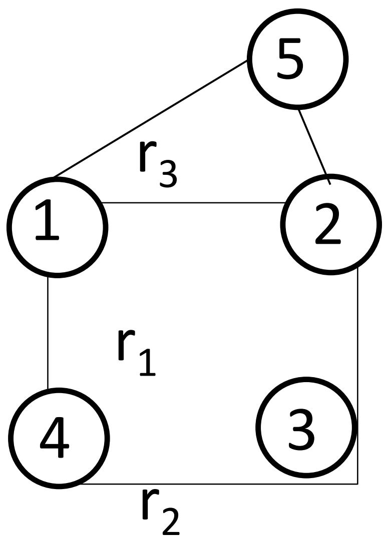
S_2

Παράδειγμα ΙΙΙ



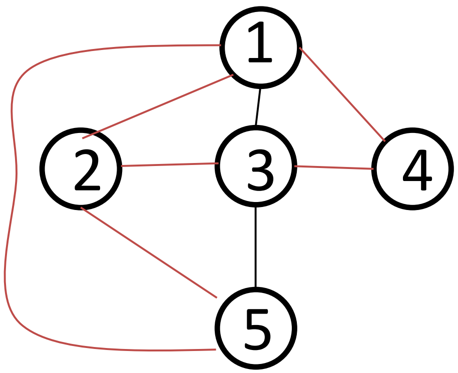
- **Βήμα 3.** Επειδή $R(S_1,H'_1)=\{r_1,r_2\}=R(S_2,H'_1)$ επιλέγουμε τυχαία το S_2

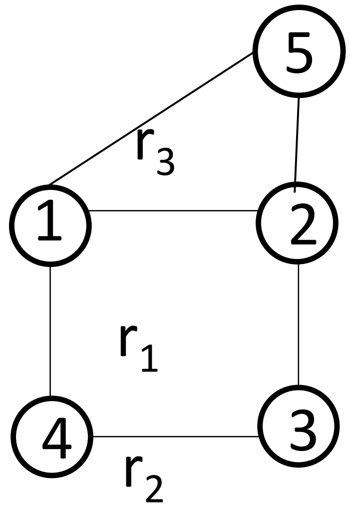
Παράδειγμα IV

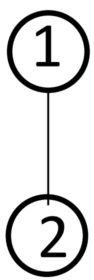


- **Βήμα 4.**
  Στη συνέχεια πρέπει να επιλέξουμε ένα μονοπάτι P μεταξύ 2 κορυφών επαφής. Έστω ότι επιλέγουμε το μονοπάτι P=(1,5,2) το οποίο το ενσωματώνουμε σε οποιαδήποτε από τις περιοχές του συνόλου $R(S_2, H'_1)$. Διαλέγουμε τυχαία την εξωτερική περιοχή r_2. Τότε παίρνουμε το γράφο H'_2

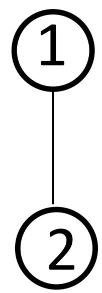
Παράδειγμα V







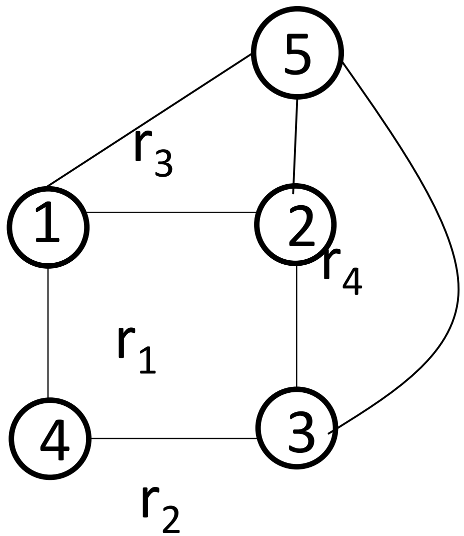
S$_1$



S$_2$

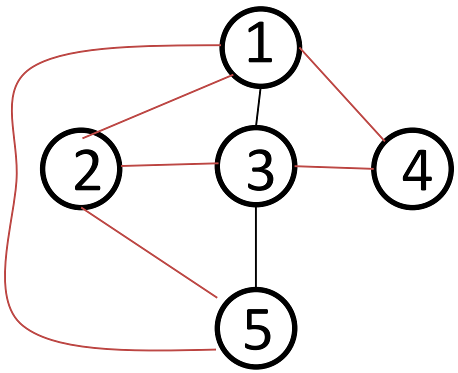
- **Βήμα 5.** Δημιουργούνται 3 περιοχές. Θέτουμε r=3, i=2 και πηγαίνουμε στο βήμα 2.
- **Βήμα 2.** Ισχύει r=3 και m–n+2= 8–5+2=5. Άρα βρίσκουμε τα τμήματα του G που είναι σχετικά προς τον H'_2. Αυτά είναι τα S_1=(1,3) και S_2=(3,5).

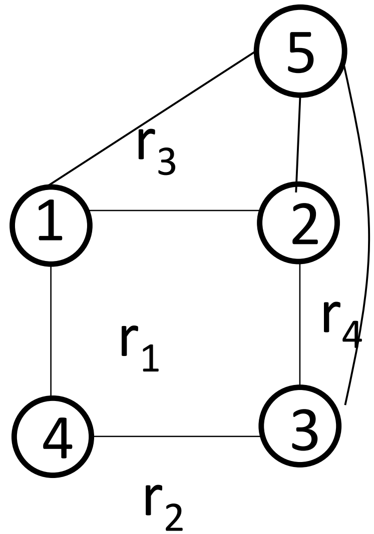
Παράδειγμα VI

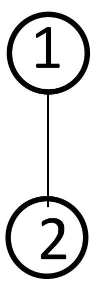


- **Βήμα 3.**
  Το (3,5) ενσωματώνεται μόνο στην περιοχή r_2
- **Βήμα 4.**
  Γίνεται η ενσωμάτωση του τμήματος, οπότε προκύπτει ο υπογράφος H'_3
- **Βήμα 5.**
  Τίθεται r=4, i=3 και πηγαίνουμε στο βήμα 2

Παράδειγμα VII



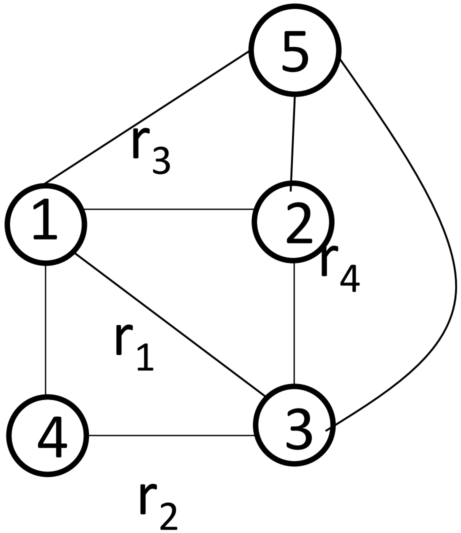




S_1

- **Βήμα 2.**
  Ισχύει r=4 και m–n+2= 8–5+2=5. Βρίσκουμε τα τμήματα του G που είναι σχετικά προς τον H'_3. Αυτό είναι το S_1=(1,3)
- **Βήμα 3.**
  Το τμήμα (1,3) ενσωματώνεται στις περιοχές r_1 και r_2. Δια-λέγουμε τυχαία την r_1

Παράδειγμα VIII



H’$_4$

- **Βήμα 4.**
  Με την ενσωμάτωση παίρνουμε τον γράφο H’$_4$.
- **Βήμα 5.**
  Θέτουμε r=5, i=4 και πηγαίνουμε στο βήμα 2.
- **Βήμα 2.**
  Ισχύει r=5 και m–n+2=8–5+2=5, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.