ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **11**: Κατευθυνόμενοι Γράφοι

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κατευθυνόμενοι Γράφοι

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κατευθυνόμενοι γράφοι

- **Κατευθυνόμενος γράφος** (directed graph, digraph) ή **προσανατολισμένος** (oriented) ονομάζεται ένας γράφος D(V,A) που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο A από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών που ονομάζονται **τόξα** (arcs).
- Σε ένα τόξο (v,w) οι κορυφές v και w ονομάζονται **ουρά** (tail) και **κεφαλή** (head) ή ακόμη **πηγή** (source) και **νεροχύτης** (sink) αντίστοιχα.

Γειτνίαση

- ***Έσω γειτονιά*** μιας κορυφής v είναι το σύνολο των κορυφών u που ορίζονται από τη σχέση :

$$N^{-}(v)=\{u \in V \mid (u, v) \in A\}$$

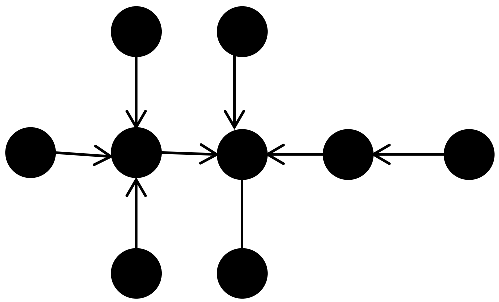
- ***Έξω γειτονιά*** μιας κορυφής v είναι το σύνολο των κορυφών u που ορίζονται από τη σχέση

$$N^{+}(v)=\{u \in V \mid (v, u) \in A\}$$

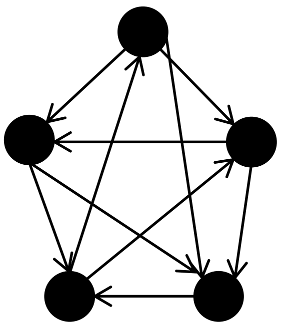
- ***Έσω βαθμός*** μιας κορυφής v, $d^{-}(v)$, ονομάζεται ο αριθμός των τόξων με κεφαλή την κορυφή v.
- ***Έξω βαθμός*** μιας κορυφής v, $d^{+}(v)$, ονομάζεται ο αριθμός των τόξων με ουρά την κορυφή v.

Παράδειγμα

- Να γραφούν οι ακολουθίες έσω και έξω βαθμών των κορυφών για τους εξής γράφους:



a



b

(a) Ακολουθία έξω βαθμών: (0,1,1,1,1,1,1,1,1)

Ακολουθία έσω βαθμών: (0,0,0,0,0,0,1,3,4)

(b) Ακολουθία έξω βαθμών: (1,2,2,2,3)

Ακολουθία έσω βαθμών: (1,2,2,2,3)

Ορισμοί Ι

- Ισχύουν οι σχέσεις $d^{-}(v)=|N^{-}(v)|$ και $d^{+}(v)=|N^{+}(v)|$.
- Ο **ελάχιστος** και ο **μέγιστος έσω βαθμός** ενός γράφου συμβολίζονται με $d^{-}(G)$ και $D^{-}(G)$ αντίστοιχα, ενώ ο **ελάχιστος** και ο **μέγιστος έξω βαθμός** ενός γράφου συμβολίζονται με $d^{+}(G)$ και $D^{+}(G)$.
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος λέγεται **ισορροπημένος** (balanced) ή **ψευδοσυμμετρικός** (pseudosymmetric) ή **ισογράφος** (isograph), αν για κάθε κορυφή v ισχύει: $d^{-}(v)=d^{+}(v)$.

Λήμμα Χειραψιών

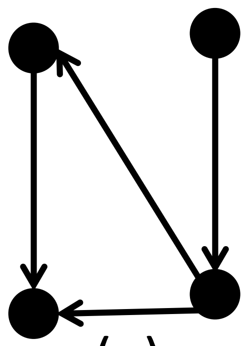
<u>Λήμμα:</u> (Το δί-λλημα της χειραψίας): Για κάθε κατευθυνόμενο γράφο ισχύει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i)$$

Δηλαδή το άθροισμα των έσω βαθμών όλων των κορυφών ισούται με το άθροισμα των έξω βαθμών τους

Ορισμοί ΙΙ

- Ο γράφος του σχήματος είναι ένας **απλός** κατευθυνόμενος γράφος (δεν έχει βρόχους και παράλληλα τόξα).



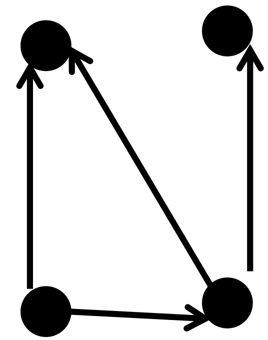
(a)
Απλό
Συμμετρικό

Ορισμοί III

- Αν σε ένα κατευθυνόμενο γράφο επιτρέπεται να υπάρχουν βρόχοι, αλλά δεν επιτρέπεται 2 κορυφές να ενώνονται με περισσότερα από ένα τόξο, τότε ο γράφος αυτός λέγεται **ασυμμετρικός** (asymmetric) ή **αντισυμμετρικός** (antisymmetric).

Ορισμοί IV

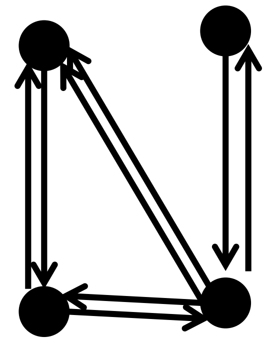
- **Συμμετρικό** (symmetric) λέγεται ένας κατευθυνόμενος γράφος, όπου για κάθε τόξο (*u*, *w*) υπάρχει και το τόξο (*w*, *u*).
- Αν D είναι ένα κατευθυνόμενος γράφος, τότε ο γράφος που προκύπτει από τον D αντικαθιστώντας τα τόξα με ακμές ονομάζεται **υποκείμενος** (underlying)



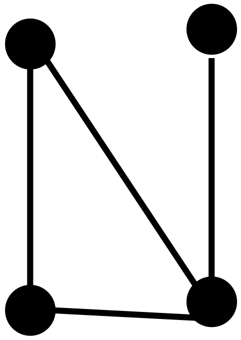
(d) Αντίστροφο του (a)

Τουρνουά Ι

- Ο **αντίστροφος** (converse) ενός κατευθυνόμενου γράφου λαμβάνεται αντιστρέφοντας την κατεύθυνση των τόξων του.
- **Πλήρης** κατευθυνόμενος γράφος είναι ο γράφος, όπου κάθε ζεύγος κορυφών ενώνεται με ένα μοναδικό τόξο.



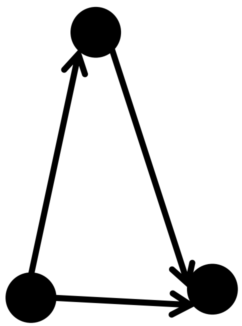
(b) Συμμετρικό



(c) Υποκείμενο του (a)

Τουρνουά ΙΙ

Ένας πλήρης ασυμμετρικός γράφος χωρίς βρόχους ονομάζεται **τουρνουά** (tournament)



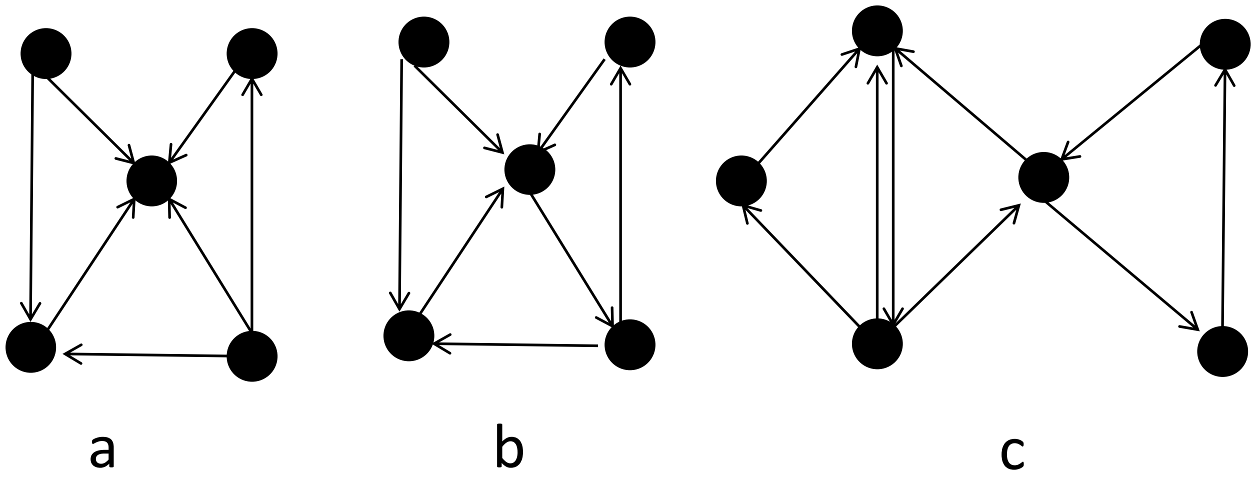
Γράφος τουρνουά

Συνδεσμικότητα Ι

- Ένας κατευθυνόμενος γράφος D είναι αδύναμα συνδεδεμένος (weakly connected), αν ο αντίστοιχος υποκείμενος γράφος είναι συνδεδεμένος.
- Εναλλακτικός ορισμός: ένας κατευθυνόμενος γράφος D είναι αδύναμα συνδεδεμένος (weakly connected), αν από οποιαδήποτε κορυφή μπορούμε να φθάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή διασχίζοντας τα τόξα προς κάποια κατεύθυνση (όχι αναγκαστικά προς την κατεύθυνσή τους). Με άλλα λόγια, αν μεταξύ 2 οποιωνδήποτε κορυφών v και w υπάρχει ένα μονοπάτι όχι απαραίτητα προσανατολισμένο. Μπορούμε π.χ. να πάμε από την κορυφή 1 στην κορυφή 2 ακόμη και αν δεν υπάρχει το τόξο (1,2) αλλά το (2,1).

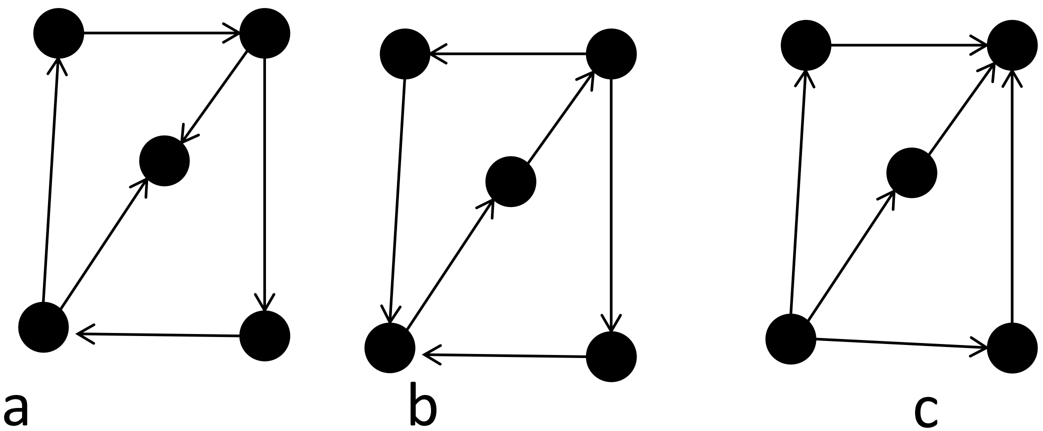
Παράδειγμα Ι

Ο κατευθυνόμενος γράφος του Σχήματος (a) είναι αδύναμα συνδεδεμένος, του Σχήματος (b) μονόπλευρα συνδεδεμένος, του Σχήματος (c) ισχυρά συνδεδεμένος.



Παράδειγμα II

- Να εξετασθεί αν οι επόμενοι γράφοι είναι αδύναμα ή ισχυρά συνδεδεμένοι



a) Αδύναμα συνδεδεμένος, επειδή η κεντρική κορυφή δεν έχει πρόσβαση στις άλλες.

b) Ισχυρά συνδεδεμένος.

c) Αδύναμα συνδεδεμένος, επειδή η επάνω δεξιά κορυφή δεν έχει πρόσβαση στις άλλες.

Συνδετότητα ΙΙΙ

- Ένας συνδεδεμένος (μη κατευθυνόμενος) γράφος G ονομάζεται **προσανατολίσιμος** (orientable) αν οι ακμές του μπορούν να προσανατολισθούν (δηλαδή να αποκτήσουν κατεύθυνση) έτσι ώστε ο αντίστοιχος κατευθυνόμενος γράφος να είναι ισχυρά συνδεδεμένος.
- **<u>Θεώρημα</u>**: ένα συνδεδεμένος (μη κατευθυνόμενος) γράφος G είναι προσανατολίσιμος αν και μόνο αν κάθε ακμή του περιέχεται σε τουλάχιστον έναν κύκλο.

Υπενθύμιση

- **Ακολουθία βαθμών** (degree sequence) ενός γράφου είναι μια μη αύξουσα ακολουθία ακεραίων που αντιστοιχεί στις τιμές των βαθμών των κορυφών του γράφου.
- Μια τυχούσα ακολουθία βαθμών **S** λέγεται **γραφική** (graphic) αν πράγματι αντιστοιχεί σε κάποιο γράφο G.
- Ο γράφος G που αντιστοιχεί σε δεδομένη ακολουθία S ονομάζεται **πραγματοποίηση** (realization) της ακολουθίας.
- Μια ακολουθία λέγεται **απλή** (simple) αν είναι γραφική και υπάρχει μόνο μία πραγματοποίησή της.

Γράφοι τουρνουά

- Πλήρης κατευθυνόμενος γράφος είναι ο γράφος όπου κάθε ζεύγος κορυφών του ενώνεται με ένα και μοναδικό τόξο.
- Ένας πλήρης ασυμμετρικός γράφος χωρίς βρόχους ονομάζεται **τουρνουά** (tournament).
- Η ονομασία τουρνουά οφείλεται στο ότι ο γράφος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απεικόνιση αποτελεσμάτων αγώνων (βόλεϊ, κλπ.) τύπου round-robin (δηλαδή, κάθε παίχτης/ομάδα παίζει εναντίον όλων), στους οποίους δεν επιτρέπεται να υπάρχει ισοπαλία.

Σκορ

- Το **σκορ** μιας κορυφής ενός γράφου-τουρνουά ισούται με τον έξω βαθμό της. Είναι ευνόητο ότι οι κορυφές του γράφου κατατάσσονται με βάση το σκορ για να αναδειχθεί η νικήτρια.

Κάποιες ιδιότητες

- Επειδή ένας πλήρης γράφος έχει $m = n \times (n-1)/2$ ακμές, το ίδιο ισχύει και για ένα τουρνουά.
- Για ένα τέτοιο γράφο ισχύει :

$$m = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = \sum_{v \in V} d^{+}(v)$$

Αποστάσεις Ι

<u>**Θεώρημα:**</u> Έστω v μια κορυφή με μέγιστο έξω-βαθμό σε ένα τουρνουά. Η απόσταση από την κορυφή αυτή προς κάθε άλλη κορυφή είναι 1 ή 2.

Απόδειξη: Έστω ότι η κορυφή v έχει μέγιστο έξω βαθμό $d^+(v)=k$ και ας υποθέσουμε ότι είναι γειτονική προς τις κορυφές $v_1, v_2,\dots,v_k$. Συνεπώς η απόσταση της v προς τις κορυφές αυτές είναι $dist(v,v_i)=1$, $\forall 1\le i\le k$. Επιπλέον, η v είναι γειτονική από τις υπόλοιπες $n–k–1$ κορυφές που τις συμβολίζουμε με $u_1, u_2,\dots,u_{n-k-1}$. Πρέπει να δειχθεί ότι $dist(v,u_i)=2$, $\forall\ 1\le i\le n–k–1$. Αν κάθε u_i $(1\le i\le n–k–1)$ είναι γειτονική $(dist(v_j,u_i)=1)$ από κάποια v_j $(1\le j\le k)$, τότε το ζητούμενο ισχύει.

Αποστάσεις ΙΙ

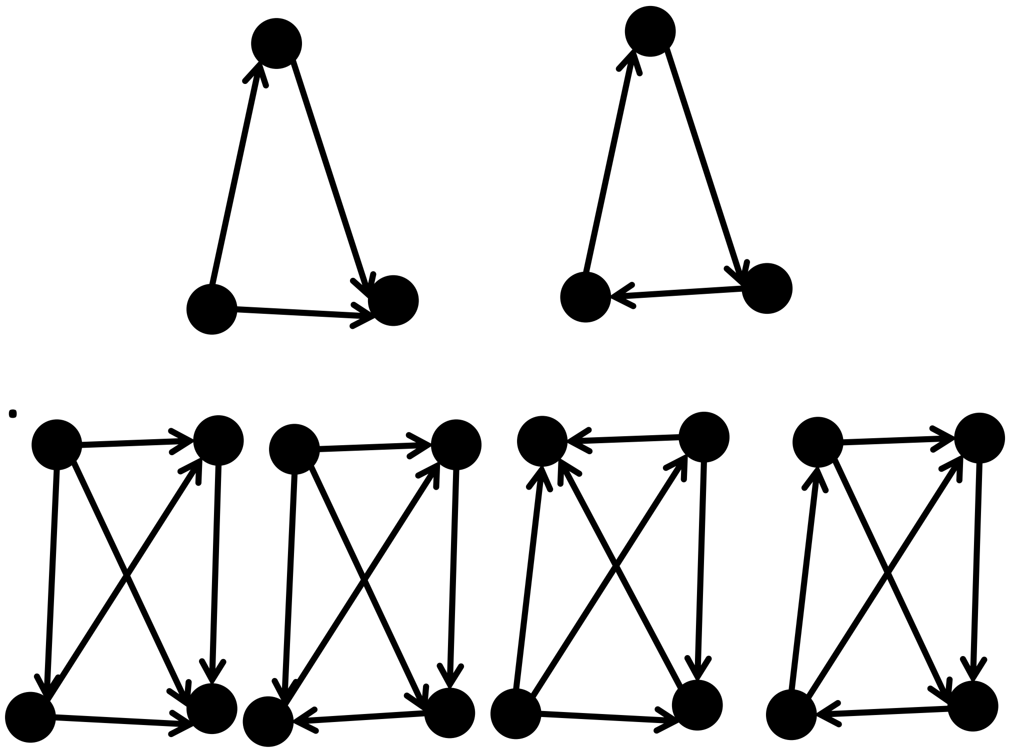
Απόδειξη (συνέχεια): Έστω ότι κάποια κορυφή u_l ($1 \leq l \leq n-k-1$) δεν είναι γειτονική από καμία κορυφή v_i. Τότε η u_l είναι γειτονική προς όλες τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$ και επίσης είναι γειτονική προς την v. Αλλά τότε θα ίσχυε $d^+(u_l)=k+1$ που είναι άτοπο διότι τότε η u_l θα είχε μεγαλύτερο έξω βαθμό από την v. Επομένως κάθε κορυφή u_l είναι γειτονική από κάποια κορυφή v_i.

Μεταβατικότητα Ι

- Ένα τουρνουά λέγεται **μεταβατικό** (transitive). αν δοθέντων των τόξων (x,y) και (y,z) υπάρχει και το τόξο (x,z).

Μεταβατικότητα ΙΙ

- Στο άνω μέρος του επομένου σχήματος παρουσιάζονται τα τουρνουά τάξης 3 (μία μεταβατική και μία κυκλική τριπλέτα). Στο κάτω μέρος παρουσιάζονται τα τουρνουά τάξης 4 (το πρώτο είναι μεταβατικό).



Μεταβατικά τουρνουά

Θεώρημα: Ένα τουρνουά είναι μεταβατικό αν και μόνο αν είναι άκυκλο.

Απόδειξη: Έστω T μεταβατικό τουρνουά με n κορυφές. Έστω ότι το T περιέχει τον κύκλο C={x_1,x_2,…,x_r,x_1} όπου (r≥3). Εφόσον υπάρχουν τα τόξα (x_1,x_2) και (x_2,x_3) λόγω της μεταβατικότητας υπάρχει και το (x_1,x_3). Παρομοίως, προκύπτει ότι υπάρχουν και τα τόξα (x_1,x_4),…, (x_1,x_r). Αυτό όμως είναι αντίφαση (λόγω ασυμμετρικότητας) στο γεγονός ότι υπάρχει το τόξο (x_r,x_1). Άρα το T πρέπει να είναι άκυκλο. Αντιθέτως, ας υποθέσουμε ότι το T είναι άκυκλο τουρνουά και ότι υπάρχουν τα τόξα (x_1,x_2) και (x_2,x_3). Εφόσον το T είναι άκυκλο, έπεται ότι δεν υπάρχει το τόξο (x_3,x_1), άρα υπάρχει το τόξο (x_1,x_3), διότι μεταξύ 2 κορυφών υπάρχει ακριβώς ένα τόξο. Συνεπώς το T είναι μεταβατικό.

Γραφική ακολουθία

- **<u>Θεώρημα</u>**: Μία μη φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων S: d1,d2,…,dn είναι γραφική ακολουθία σκορ ενός μεταβατικού τουρνουά, αν και μόνο αν η ακολουθία S είναι 0,1,2,…,n-1.
- **<u>Θεώρημα</u>**: Μία μη φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων S: d1,d2,…,dn είναι γραφική ακολουθία σκορ, αν και μόνο αν η ακολουθία S1: d1,d2,…,ddn,ddn+1–1, …, ddn-1–1 είναι μία γραφική ακολουθία S σκορ.

Γράφοι τουρνουά

<u>Θεώρημα</u> (Landau 1953): Μία μη φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων S: $d_1, d_2, \ldots, d_n$ είναι γραφική ακολουθία σκορ, αν και μόνο αν για κάθε ακέραιο j ($1 \leq j \leq n$) ισχύει: (η ισότητα ισχύει για j=n):

$$\sum_{i=1}^{j} d_i \geq \binom{j}{2}$$

<u>Άσκηση</u>: είναι γραφικές οι ακολουθίες

4,4,4,2,1,1 και

5,4,4,1,1,0 ?

Διάσχιση Κατά Βάθος (DFS)

Αλγόριθμος: DFS αναδρομικός (μη κατευθυνόμενοι γράφοι)
Είσοδος: Ένας απλός γράφος $G(V,E)$ με επιγραφές
Έξοδος: Ένα σύνολο T δενδρικών κορυφών και μια αρίθμηση $dfi(v)$

1. Θέτουμε $i \leftarrow 1$ και $T \leftarrow \emptyset$.
2. **για** όλες τις κορυφές $v \in V$ θέτουμε $dfi(v) \leftarrow 0$
3. **για** όλες τις κορυφές v με $dfi(v)=0$ καλούμε την DFS(v)

Διαδικασία DFS(*v*)

1. Θέτουμε $dfi(v) \leftarrow i$ και $i \leftarrow i+1$.
2. **για** όλες τις κορυφές $u \in N(v)$ ($(v,u) \in E$)
3. **αν** $dfi(u)=0$ **τότε** $\{T \leftarrow T \cup \{e\}$ $(e=(v,u))$, **DFS(*u*)** $\}$

Λειτουργία

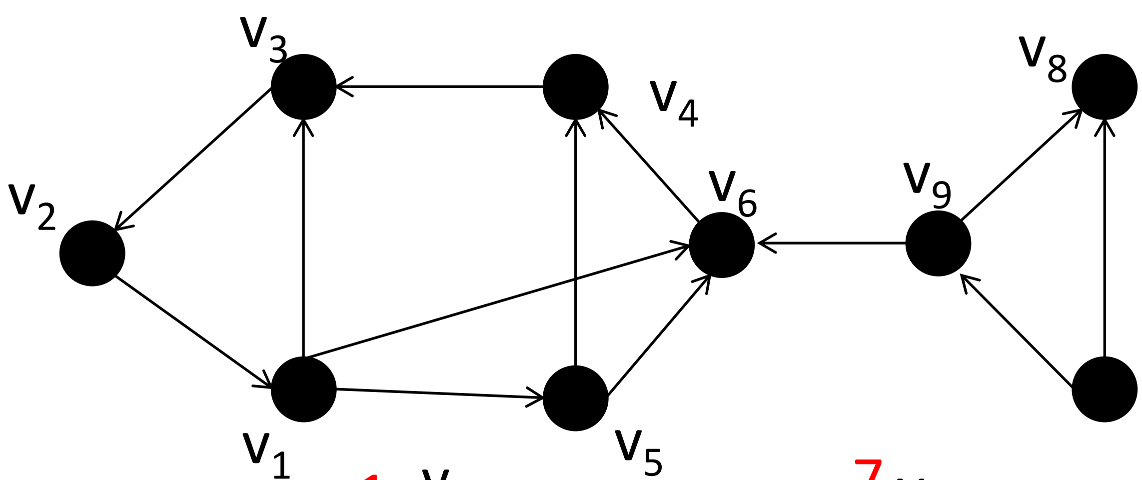
- Ο αλγόριθμος παράγει 2 σύνολα ακμών:
  - Το σύνολο T των ακμών που περιέχονται στα δένδρα του δάσους και ονομάζονται **δενδρικές ακμές** (tree edges).
  - Το σύνολο B=E–T των υπόλοιπων ακμών που ονομάζονται **οπίσθιες ακμές** (back edges).

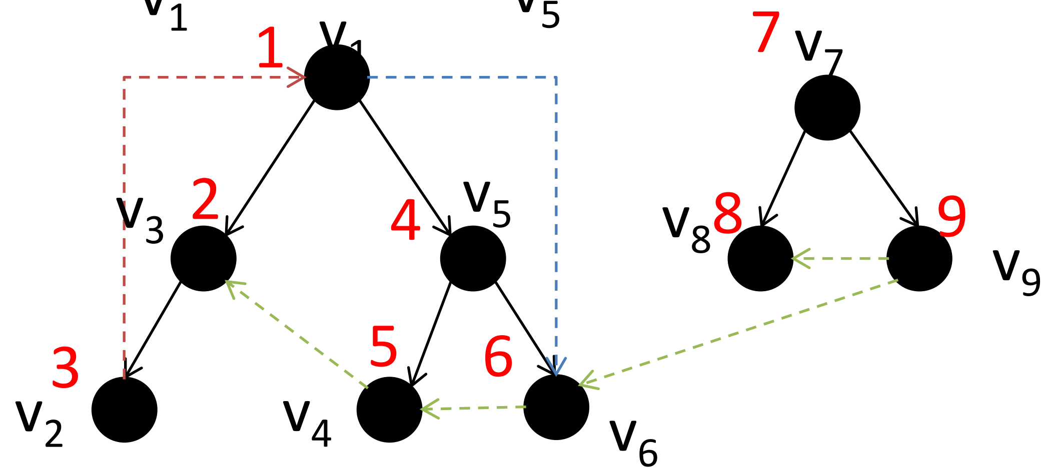
DFS για Κατευθυνόμενους Γράφους

- Ο αλγόριθμος DFS είναι παρόμοιος για κατευθυνόμενους γράφους με τη διαφορά ότι οι παραγόμενες ακμές κατατάσσονται σε 4 σύνολα:
  - Το σύνολο T των ακμών που περιέχονται στα δένδρα του δάσους και ονομάζονται **δενδρικές ακμές** (tree edges).
  - Το σύνολο B των ακμών που ονομάζονται **οπίσθιες ακμές** (back edges) και ενώνουν κορυφές απογόνους προς κορυφές προγόνους.
  - Το σύνολο F των ακμών που ονομάζονται **εμπρόσθιες ακμές** (forward edges) και ενώνουν κορυφές προγόνους προς κορυφές απογόνους.
  - Το σύνολο C των ακμών που ονομάζονται **διασταυρωνόμενες ακμές** (cross edges) και δεν έχουν σχέση απογόνου–προγόνου.

Παράδειγμα

- Μαύρο: δενδρική ακμή
- Κόκκινο: οπίσθια ακμή
- Μπλε: εμπρόσθια ακμή
- Πράσινο: διασταυρωνόμενη ακμή
- Κόκκινα γράμματα: σειρά επίσκεψης κορυφών





Εύρεση κύκλων

- Ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι άκυκλος αν δεν έχει προσανατολισμένους (κατευθυνόμενους) κύκλους.
- Μπορούμε να ελέγξουμε αν ένας γράφος είναι άκυκλος με μια διάσχιση κατά βάθος.
- Αν ένα δένδρο διάσχισης εμφανίσει ένα οπίσθιο τόξο, συμπεραίνουμε αμέσως ότι ο γράφος έχει κύκλο. Αντίστροφα, αν δεν υπάρχει οπίσθιο τόξο, ο γράφος είναι άκυκλος.

Διασταυρωνόμενες ακμές

- **<u>Θεώρημα:</u>** Αν κατά την αναζήτηση ενός κατευθυνόμενου γράφου με DFS προκύψει μια διασταυρωνόμενη ακμή (u,v), τότε ισχύει η σχέση: dfi(u)>dfi(v).
- <u>Απόδειξη:</u> Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι dfi(u)<dfi(v), δηλαδή ας υποθέσουμε ότι επισκεπτόμαστε την κορυφή u πριν την κορυφή v. Αν δίνουμε τιμή στην dfi(v) όταν ακολουθούμε την ακμή (u,v), τότε η ακμή (u,v) είναι δενδρική. Αλλιώς επισκεπτόμαστε την κορυφή v ως απόγονο της u, αλλά όχι ως γιο της u. Άρα αποκλείεται η ακμή (u,v) να είναι διασταυρωνόμενη και επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο.

Διάσχιση κατά Πλάτος (BFS) Ι

Αλγόριθμος: BFS (κατευθυνόμενος ή μη γράφος)
Είσοδος: Ένας απλός γράφος $G(V,E)$ με επιγραφές
Έξοδος: Ένα δένδρο διάσχισης T, η αρίθμηση $bfi(v)$

1. *Θέτουμε* $i \leftarrow 0$ και $T \leftarrow \emptyset$.
2. **για** όλες τις κορυφές $v \in V$ θέτουμε $bfi(v) \leftarrow 0$
3. **για** όλες τις κορυφές $v \in V$ με $bfi(v)=0$ καλούμε BFS(v)

Διαδικασία BFS(v)

1. *Θέτουμε* $i \leftarrow i+1$ και $bfi(v) \leftarrow i$
2. $Q=\{\boldsymbol{v}\}$ //αρχικοποίηση της ουράς Q με την κορυφή v
3. **όσο** ($Q \neq \emptyset$)
4. $\boldsymbol{u}$:=**dequeue(*Q*)** //αφαίρεση κορυφής από την αρχή της ουράς
5.   **για** όλες τις ακμές $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in E$

Διάσχιση κατά Πλάτος (BFS) II

Αλγόριθμος: BFS (<u>κατευθυνόμενος ή μη γράφος</u>)
Είσοδος: Ένας απλός γράφος $G(V,E)$ με επιγραφές
Έξοδος: Ένα δένδρο διάσχισης T, η αρίθμηση $bfi(v)$

6. αν $bfi(\boldsymbol{w})=0$ τότε θέτουμε
7. $\vartheta i \leftarrow i+1$
8. $bfi(\boldsymbol{w}) \leftarrow i$
9. $T \leftarrow T \cup \{\boldsymbol{e}\}$ (όπου $e=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$)
10. **enqueue(*Q*, *w*)** // προσθήκη κορυφής *w* στο τέλος της ουράς

Χαρακτηριστικά

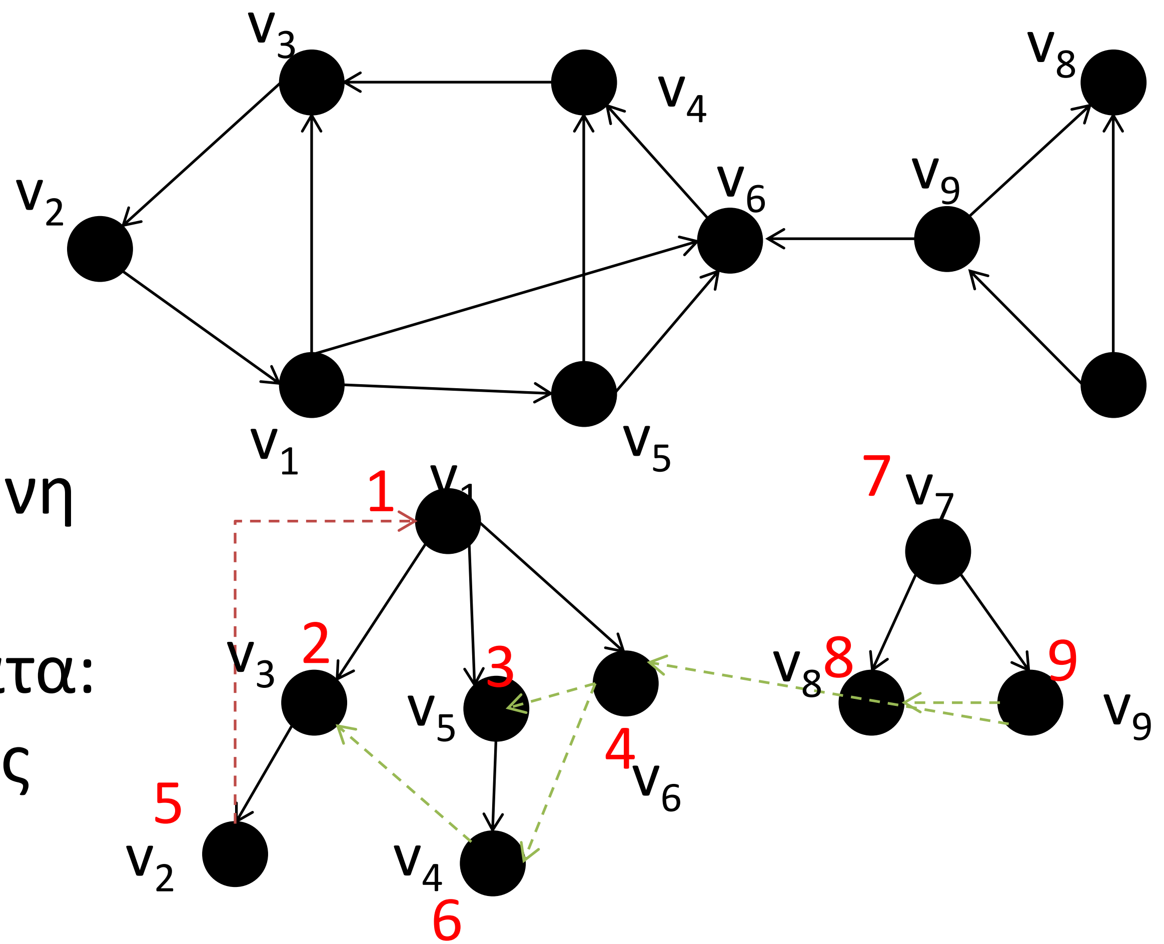
- Ο αλγόριθμος BFS χρησιμοποιεί ουρά, ενώ ο DFS στοίβα.
- Ο αλγόριθμος BFS επισκέπτεται τις κορυφές ανά επίπεδο: δηλαδή πρώτα επισκέπτεται τις κορυφές που απέχουν απόσταση 1 (ένα τόξο) από την αρχική κορυφή, έπειτα τις κορυφές που απέχουν 2 κοκ.
- Ο αλγόριθμος BFS για μη κατευθυνόμενους γράφους παράγει 2 σύνολα ακμών:
  - Το σύνολο T των ακμών που περιέχονται στα δένδρα του δάσους και ονομάζονται **δενδρικές ακμές** (tree edges).
  - Το σύνολο C των ακμών που ονομάζονται **διασταυρωνόμενες ακμές** (cross edges) και δεν έχουν σχέση απογόνου προγόνου.

BFS για κατευθυνόμενους γράφους

- Ο αλγόριθμος BFS για κατευθυνόμενους γράφους είναι **παρόμοιος** με τη διαφορά ότι οι ακμές που παράγονται κατατάσσονται σε 3 σύνολα:
  - Το σύνολο T των ακμών που περιέχονται στα δένδρα του δάσους και ονομάζονται **δενδρικές ακμές** (tree edges).
  - Το σύνολο B των ακμών που ονομάζονται **οπίσθιες ακμές** (back edges) και ενώνουν κορυφές απογόνους προς κορυφές προγόνους.
  - Το σύνολο C των ακμών που ονομάζονται **διασταυρωνό-μενες ακμές** (cross edges) και δεν έχουν σχέση απογόνου προγόνου.
- <u>Σημείωση</u>: δεν υπάρχουν εμπρόσθιες ακμές (forward edges).

Παράδειγμα

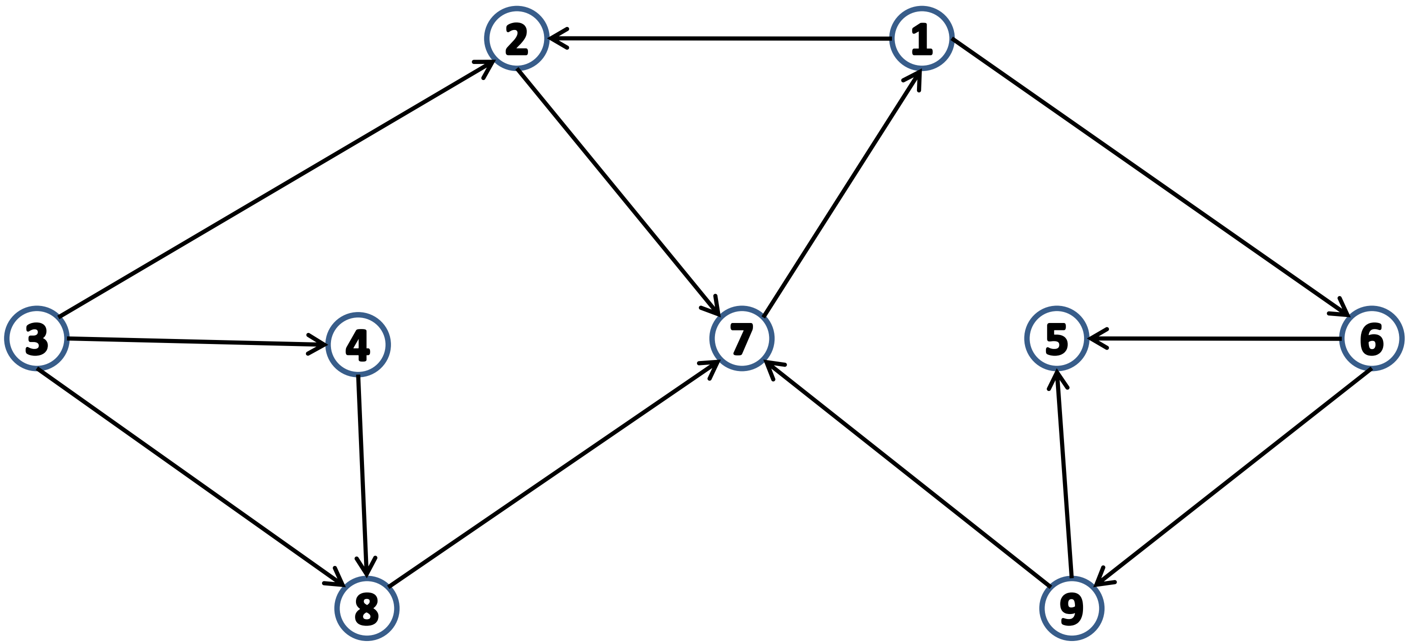
- Μαύρο: δενδρική ακμή
- Κόκκινο: οπίσθια ακμή
- Πράσινο: διασταυρωνόμενη ακμή
- Κόκκινα γράμματα: σειρά επίσκεψης κορυφών



Έλεγχος συνεκτικότητας

- **Ερώτηση**: πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένας γράφος (μη κατευθυνόμενος) είναι αδύναμα συνδεδεμένος (απλά συνεκτικός) εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο BFS ή τον DFS;
- **Απάντηση**: Για να εξετάσουμε την απλή συνεκτικότητα ενός κατευθυνόμενου γράφου αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο BFS ή τον DFS (μόνο τις διαδικασίες BFS ή DFS χωρίς τον εξωτερικό βρόχο για) μια φορά ξεκινώντας από έναν οποιονδήποτε κόμβο. Πρέπει όμως κατά την εξέταση των γειτονικών αμαρκάριστων κόμβων ενός κόμβου v να εξετάζουμε τους κόμβους όπου μπορούμε να φτάσουμε από τον v ακολουθώντας είτε ένα εξερχόμενο είτε ένα εισερχόμενο τόξο του. Στο τέλος του αλγορίθμου αρκεί να εξετάσουμε αν επισκεφθήκαμε όλες τις κορυφές του γράφου.

DFS – Παράδειγμα



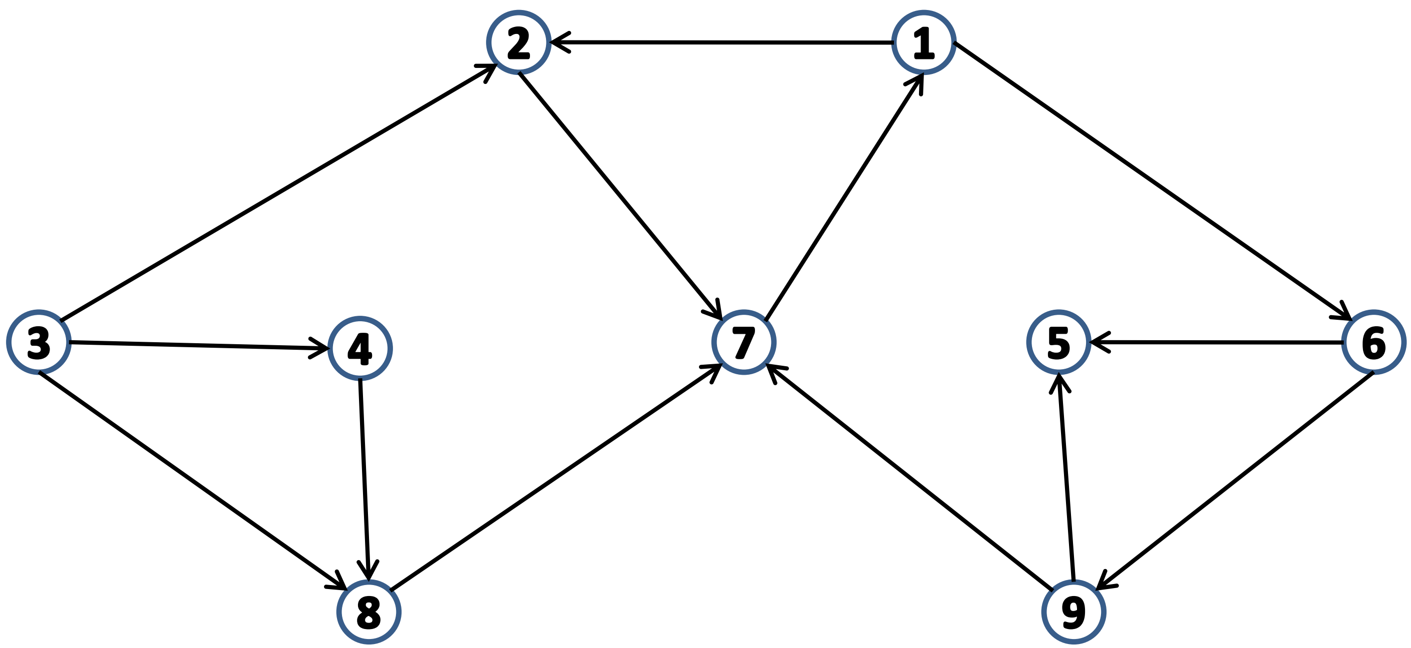
Έλεγχος ισχυρής συνεκτικότητας I

- **Ερώτηση:** πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ισχυρά συνδεδεμένος (συνεκτικός) εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο BFS ή τον DFS;
- **Απάντηση:** Για να εξετάσουμε την ισχυρή συνεκτικότητα ενός κατευθυνόμενου γράφου αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο BFS ή τον DFS (μόνο τις διαδικασίες BFS ή DFS χωρίς τον εξωτερικό βρόχο για) **2 φορές** ξεκινώντας από έναν οποιονδήποτε κόμβο. **Την πρώτη φορά** πρέπει για κάθε κόμβο *v* να εξετάζουμε τους γειτονικούς αμαρκάριστους κόμβους όπου μπορούμε να φτάσουμε από τον *v* μέσω μόνο εξερχόμενων τόξων.

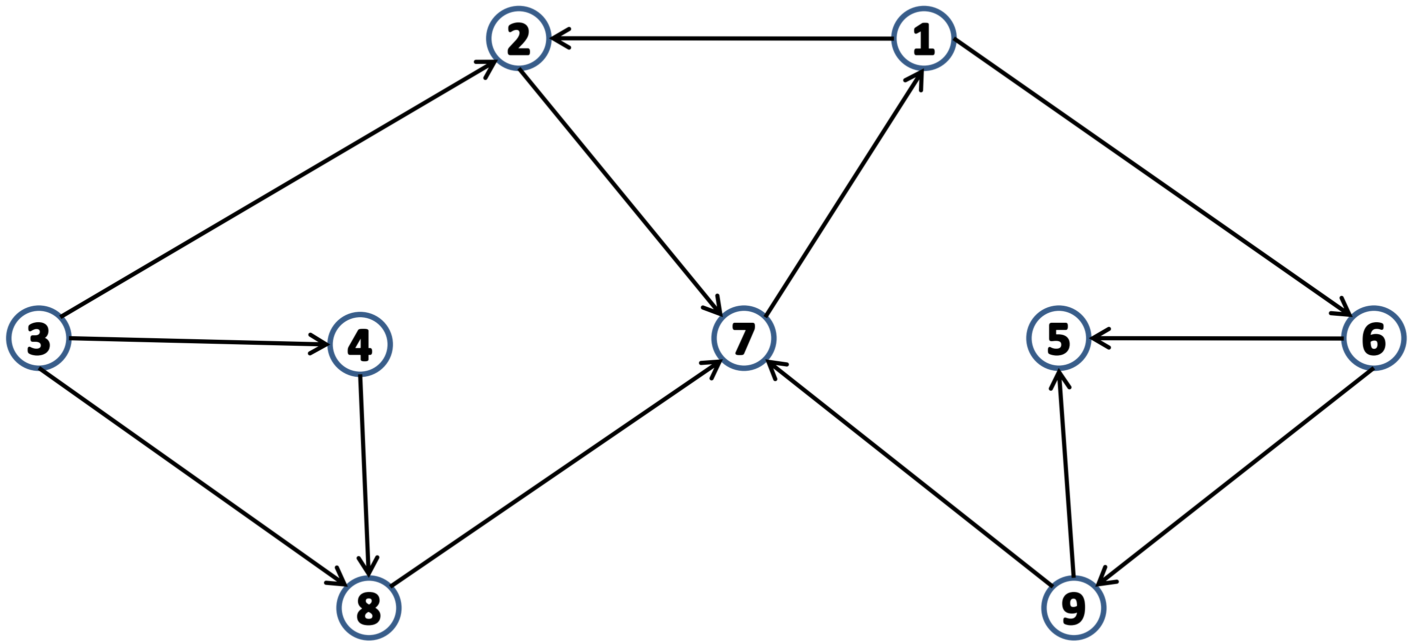
Έλεγχος ισχυρής συνεκτικότητας ΙΙ

- **Τη δεύτερη φορά** πρέπει για κάθε κόμβο *v* να εξετάζουμε τους γειτονικούς αμαρκάριστους κόμβους όπου μπορούμε να φτάσουμε από τον *v* μέσω μόνο εισερχόμενων τόξων.
- Για να είναι ο γράφος ισχυρά συνεκτικός πρέπει και στην πρώτη και στη δεύτερη εφαρμογή του αλγορίθμου να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους του.

BFS – Παράδειγμα : Βήμα 1



BFS – Παράδειγμα : Βήμα 2



Τοπολογική ταξινόμηση

- Έστω G=(V,A) ένας κατευθυνόμενος γράφος n κορυφών χωρίς προσανατολισμένους κύκλους. Ένας τέτοιος γράφος λέγεται ΠΑΓ (Προσανατολισμένος Άκυκλος Γράφος). (DAG)
- **Τοπολογική ταξινόμηση** (topological sorting ή topological order) ενός ΠΑΓ είναι μια διάταξη των κορυφών του έτσι ώστε αν ο γράφος G περιέχει το τόξο (v,w), τότε η κορυφή v εμφανίζεται πριν από την κορυφή w στην τοπολογική διάταξη.
- Με άλλα λόγια κάθε κορυφή στην τοπολογική διάταξη βρίσκεται πριν από όλες τις κορυφές προς τις οποίες έχει εξερχόμενα τόξα.

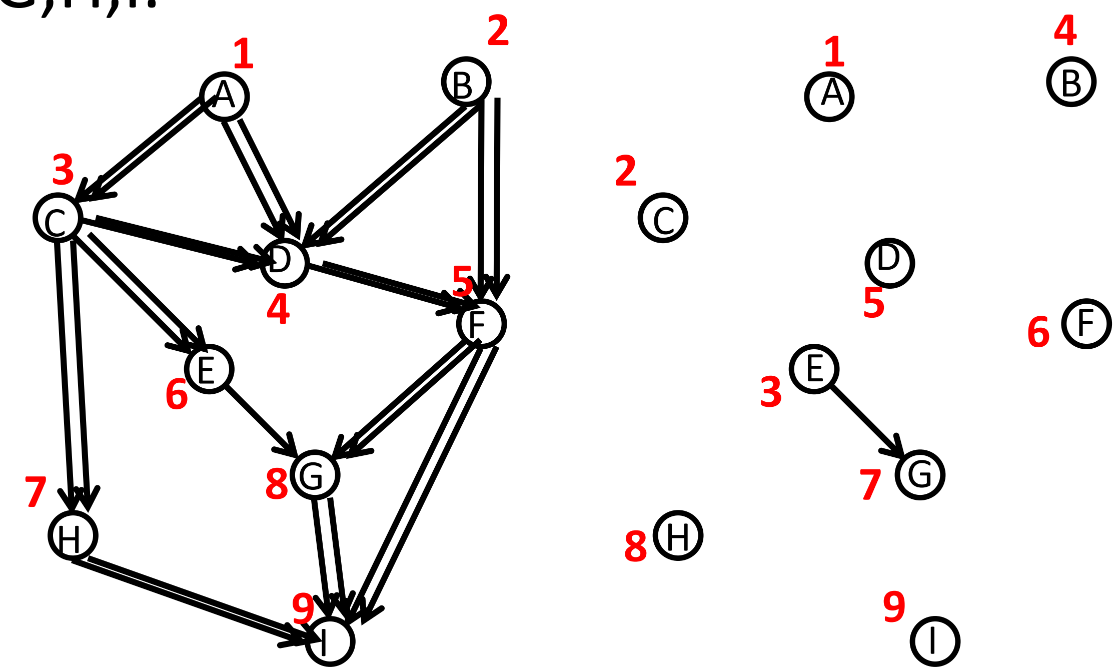
Τυπικότερος ορισμός

- Έστω G ένας κατευθυνόμενος γράφος n κορυφών. Μια **τοπολογική ταξινόμηση** του G είναι μια διάταξη των κορυφών του $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ τέτοια ώστε για κάθε τόξο $(v_i,v_j)\in G$, να ισχύει $i<j$ (δηλαδή, το i να εμφανίζεται πριν το j στην διάταξη).
- Ένα ΠΑΓ μπορεί να έχει περισσότερο από μία τοπολογικές ταξινομήσεις.

Παράδειγμα I

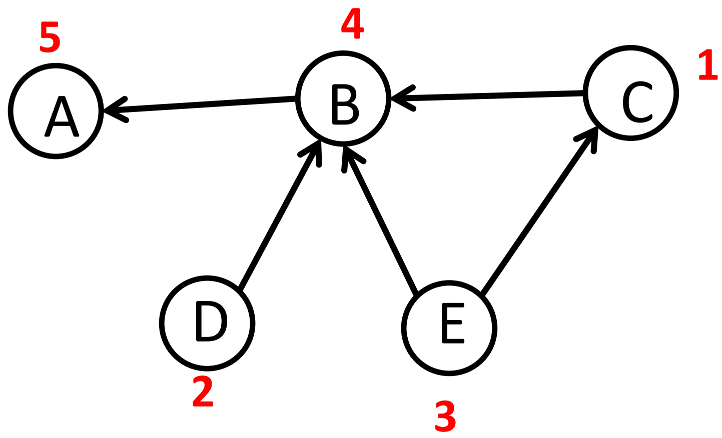
Μια τοπολογική ταξινόμηση του επόμενου γράφου είναι: A,B,C,D,F,E,H,G,I.

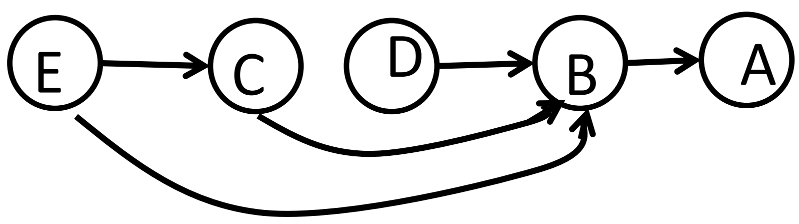
Μια ακόμη τοπολογική ταξινόμηση του ίδιου γράφου είναι: A,C,E,B,D,F,G,H,I.



Σχηματικά

- Ένας κατευθυνόμενος γράφος που έχει τοπολογική ταξινόμηση μπορεί να σχεδιασθεί ως εξής: οι κορυφές του μπορούν να τοποθετηθούν σε μια ευθεία γραμμή και τα τόξα που συνδέουν τις κορυφές να κατευθύνονται όλα από αριστερά προς τα δεξιά.





Ύπαρξη τοπολογικής ταξινόμησης I

- **<u>Θεώρημα</u>**: ένας κατευθυνόμενος γράφος έχει τοπολογική ταξινόμηση αν και μόνο αν δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους (δηλαδή, είναι ΠΑΓ).
- **Απόδειξη**: Έστω ότι το G έχει τοπολογική ταξινόμηση.
  Θα δείξουμε ότι είναι ΠΑΓ. Έστω ότι δεν είναι ΠΑΓ και ότι έχει έναν προσανατολισμένο κύκλο $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$. Λόγω της ύπαρξης τοπολογικής ταξινόμησης, έστω ότι ξεκινούμε με την κορυφή v_1. Η v_2 πρέπει να ακολουθεί την v_1 στην τοπολογική ταξινόμηση. Η v_3 πρέπει να ακολουθεί την v_2 κοκ. Αλλά η v_1 δεν μπορεί να ακολουθεί την v_k. Συνεπώς το G είναι ΠΑΓ.

Ύπαρξη τοπολογικής ταξινόμησης ΙΙ

- **Θεώρημα**: ένας κατευθυνόμενος γράφος έχει τοπολογική ταξινόμηση αν και μόνο αν δεν έχει προσανατολισμένους κύκλους (δηλαδή, είναι ΠΑΓ).
- **Απόδειξη**: Αντίστροφα. Έστω ότι το G είναι ΠΑΓ. Θα περιγράψουμε έναν **αλγόριθμο** για την κατασκευή μιας τοπολογικής διάταξης. Επειδή το G είναι ΠΑΓ πρέπει να έχει τουλάχιστον μια κορυφή v_1 με έσω βαθμό 0 ($d^{-}(v_1)=0$). Αυτό συμβαίνει διότι αν όλες οι κορυφές έχουν έσω βαθμό >0, τότε ξεκινώντας από μια τυχαία κορυφή i και ακολουθώντας ένα έσω τόξο (i, j) πηγαίνουμε στην j. Από την j ακολουθώντας ένα έσω τόξο (j, k) πηγαίνουμε στην k. Οπότε κάποτε θα συναντήσουμε πάλι την i και συνεπώς θα έχουμε ακολουθήσει έναν προσανατολισμένο κύκλο (άτοπο λόγω του ότι το G είναι ΠΑΓ).

Ύπαρξη τοπολογικής ταξινόμησης ΙΙΙ

- **Συνέχεια**: Έστω λοιπόν v_1 μια κορυφή με έσω βαθμό 0 ($d^{-}(v_1)=0$). Αφαιρούμε από το G την v_1 και όλα τα εξερχόμενα τόξα της. οπότε ο παραγόμενος γράφος είναι πάλι ΠΑΓ. Επομένως έχει τουλάχιστον μια κορυφή έστω v_2, με έσω βαθμό 0. Αφαιρούμε πάλι από το G την v_2 και όλα τα εξερχόμενα τόξα της, οπότε ο παραγόμενος γράφος είναι πάλι ΠΑΓ. Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία μέχρις ότου το G να γίνει κενό παίρνουμε την ταξινόμηση $v_1,v_2,\ldots,v_n$ των κορυφών του G. Λόγω της κατασκευής της ταξινόμησης αυτής, αν (v_i,v_j) είναι ένα τόξο του G, η κορυφή v_i διαγράφεται πριν την κορυφή v_j και συνεπώς $i<j$. Άρα η ταξινόμηση αυτή είναι τοπολογική.

Αλγόριθμος Ι

- Ο επόμενος αλγόριθμος παράγει την τοπολογική ταξινόμηση ενός γράφου, την οποία αποθηκεύει στο διάνυσμα *σειρά*. *σειρά*(i) είναι η σειρά με την οποία επισκεπτόμαστε την κορυφή i.
- Αν δεν υπάρχει τοπολογική ταξινόμηση ο αλγόριθμος επιστρέφει ένδειξη ότι υπάρχει προσανατολισμένος κύκλος.
- Αντί ουράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί στοίβα.

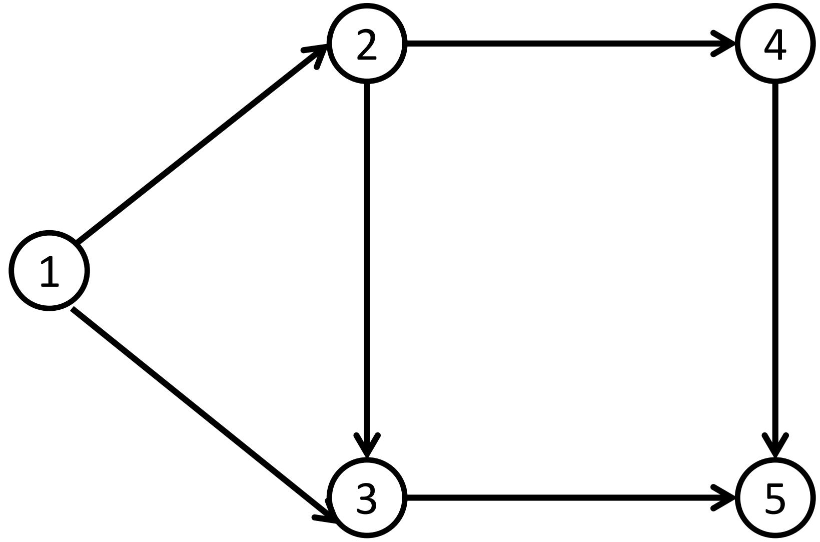
Αλγόριθμος ΙΙ

Αλγόριθμος: Τοπολογική Ταξινόμηση
Είσοδος: Ένας κατευθυνόμενος γράφος $G(V, A)$
Έξοδος: Διάνυσμα τοπολογικής διάταξης *σειρά* ή ένδειξη κύκλου

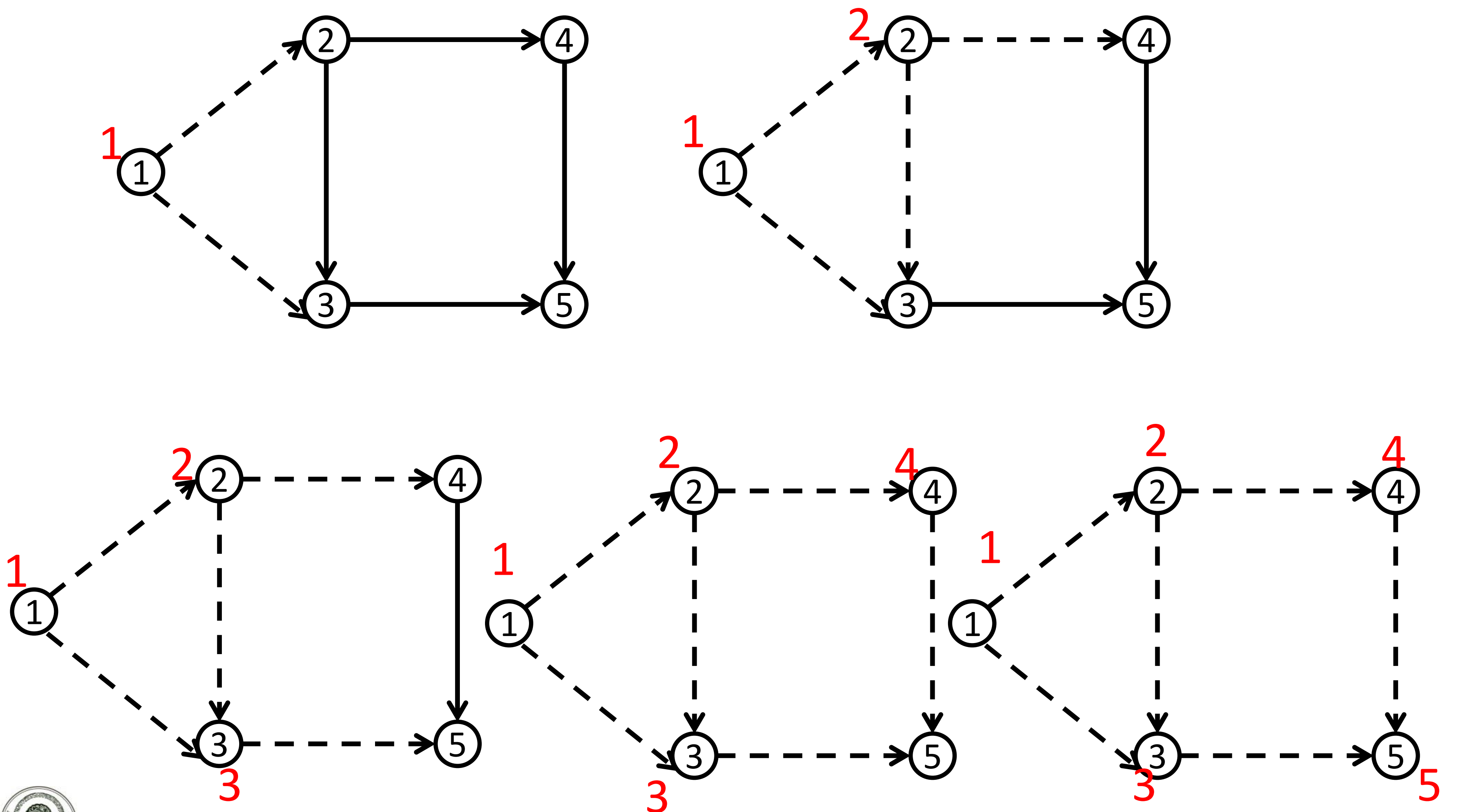
Υπολόγισε τους έσω βαθμούς $d^-(j), \forall j \in A$
$k = 1$
$Q = \{j \in A : d^-(j) = 0\}$ // Βάλε στην ουρά Q κόμβους με $d^-(j) = 0$
όσο $Q \neq \emptyset$
    i = dequeue(Q) // Βγάλε τον 1ο κόμβο από την αρχή της ουράς
    σειρά(i) = k , $k = k + 1$
    για όλα τα τόξα $(i, j) \in A$
        $d^-(j) = d^-(j) - 1$
        αν $d^-(j) = 0$ **τότε** enqueue(Q, j)
αν ($k \le n$) **τότε //** οι κορυφές δεν πήραν όλες σειρά
    “Υπάρχει προσανατολισμένος κύκλος”

Παράδειγμα Ι

Να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος της τοπολογικής διάταξης στον επόμενο γράφο.

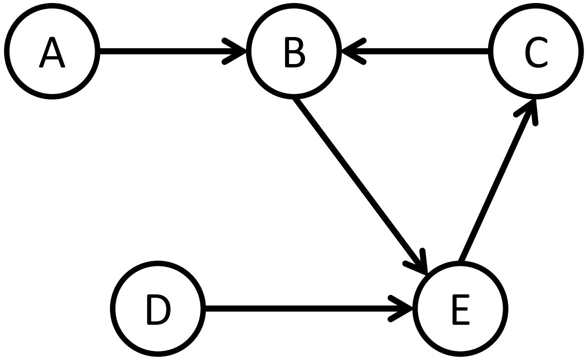


Παράδειγμα ΙΙ



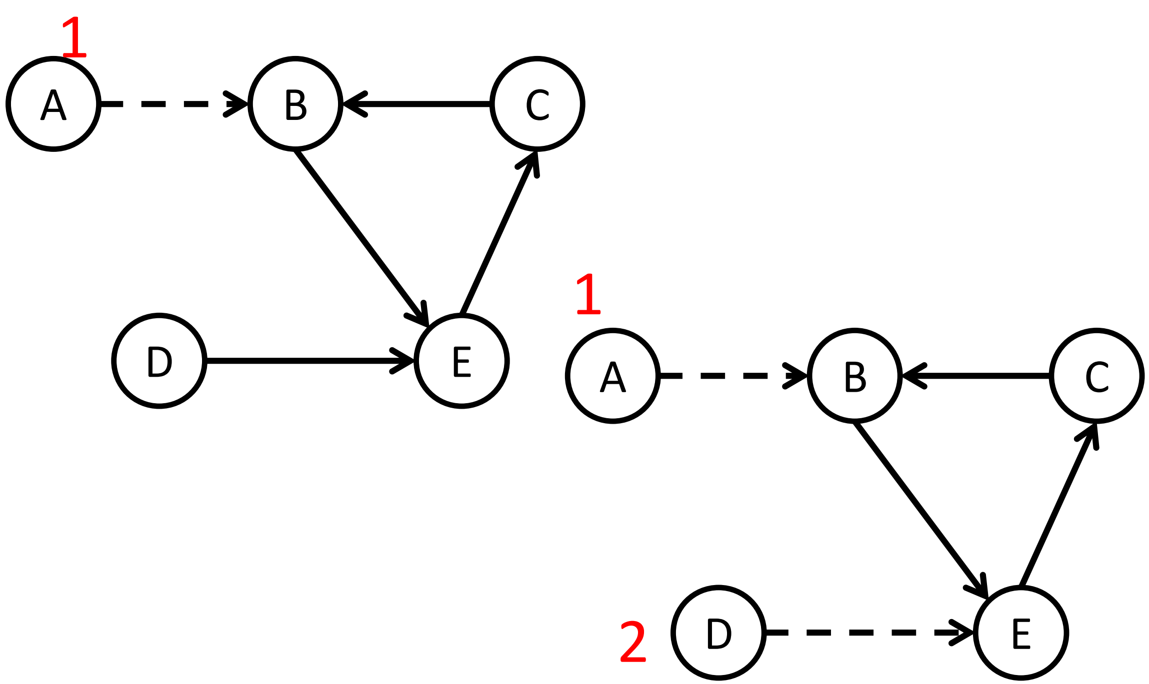
Παράδειγμα ΙΙΙ

Να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος της τοπολογικής διάταξης στον επόμενο γράφο.



Παράδειγμα IV

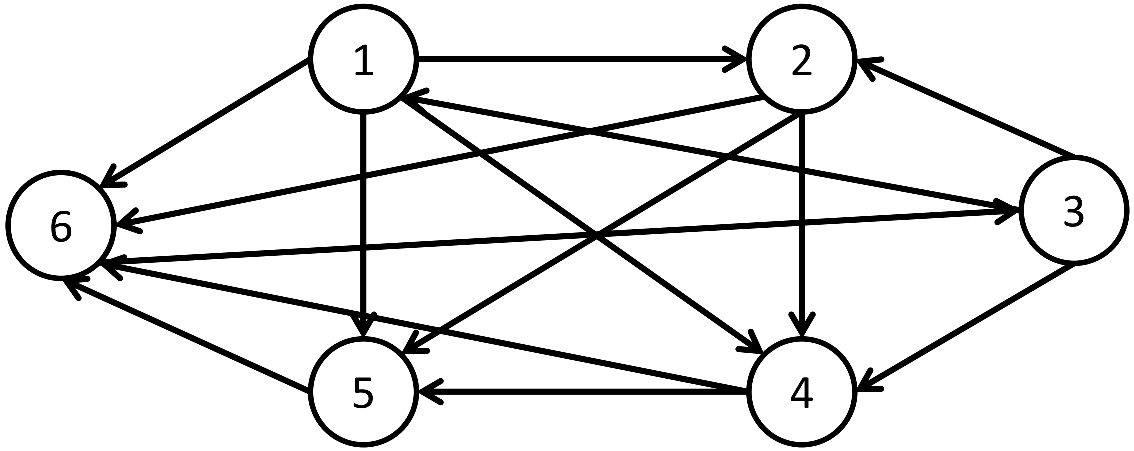
Ο αλγόριθμος παράγει ένδειξη ότι ο γράφος έχει προσανατολισμένους κύκλους



Το πρόβλημα του λαβυρίνθου

- Hampton Court Palace – Γουλιέλμος 3ος της Οράνγκης – 1690
- Πρόβλημα εύρεσης Eulerian κυκλώματος σε γράφο που προκύπτει με
  - Διασταυρώσεις → κορυφές
  - Διαδρομές → ακμές
  - Αγνοούμε κορυφές με d=2 εκτός εισόδου/εξόδου
  - Θεωρούμε παράλληλες ακμές (κατευθυνόμενος συμμετρικός γράφος)
  - Βάζουμε ειδικά σημάδια όταν φτάνουμε σε κάθε διασταύρωση
- Κόστος διπλάσιο από το συνολικό μήκος των ακμών

Κατάταξη αθλητών σε τουρνουά Ι



Κατάταξη αθλητών σε τουρνουά II

1ος τρόπος: με Hamiltonian μονοπάτια

3	1	2	4	5	6
1	2	4	5	6	3
1	4	6	3	2	5

Κατάταξη αθλητών σε τουρνουά ΙΙΙ

2ος τρόπος: με λιγότερες παραβιάσεις

3	1	2	4	5	6	Έχει 2 παραβιάσεις (3,5) (3,6)
1	2	4	5	6	3	Έχει 3 παραβιάσεις (1,3) (2,3) (4,3)
1	4	6	3	2	5	Έχει 6 παραβιάσεις (1,3) (4,3) (4,2) (6,2) (6,5) (3,5)

- όμως όχι μοναδική λύση
  1 3 2 5 4 6
  έχει 2 παραβιάσεις
- Εξαντλητικός αλγόριθμος O(n!)

Κατάταξη αθλητών σε τουρνουά IV

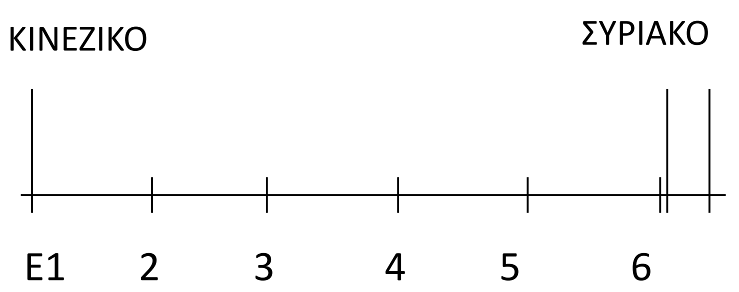
3ος τρόπος: με σύγκριση σκορ

Αν ο γράφος είναι ισχυρά συνδεδεμένος και οι αθλητές τουλάχιστον 4, τότε η κατάταξη συγκλίνει

4	3	3	2	2	1	1ο επίπεδο
8	5	9	3	4	3	2ο επίπεδο
15	10	16	7	12	9	3ο επίπεδο
38	28	32	21	25	16	4ο επίπεδο
90	62	87	41	48	32	5ο επίπεδο
183	121	193	80	119	87	6ο επίπεδο

Αλυσίδες Markov I

- Markov process, Markov chain: προχωρημένη στατιστική, στοχαστικές διαδικασίες
- Παριστάνεται με κατευθυνόμενο γράφο

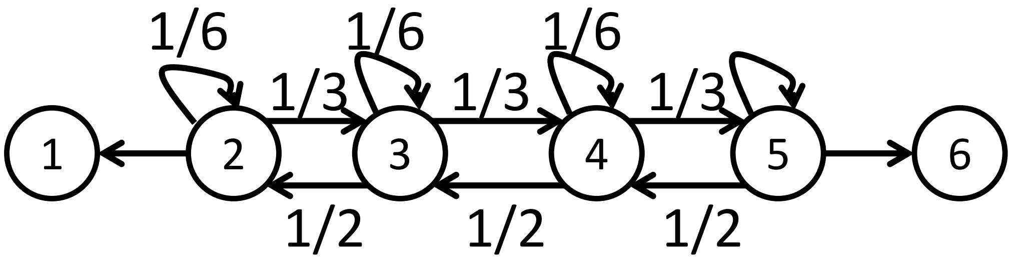


¬1/2 10m
1/3 ® 10m
1/6 ¯ -

- ❑ (0, 0, 0, 1, 0, 0)
- ❑ (0, 0, 1/2, 1/6, 1/3, 0)
- ❑ (0, 1/4, 1/6, 13/36, 1/9, 1/9)

Αλυσίδες Markov II

Πώς μοντελοποιείται;



1	0	0	0	0	0
½	1/6	1/3	0	0	0
	½	1/6	1/3		
		½	1/6	1/3	
			½	1/6	1/3
					1

Αλυσίδες Markov III

- γράφος μετάβασης
- πίνακας μετάβασης
- διάνυσμα πιθανοτήτων Σp_{ij}
- πιθανότητα μετάβασης p_{ij}
- → κατάσταση
- → πεπερασμένη Markov chain
- → στοχαστικός πίνακας p
- → p^k επίσης στοχαστικός

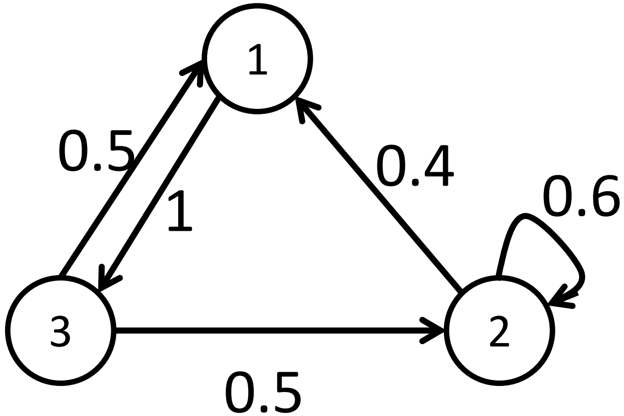
Αλυσίδες Markov IV

- **<u>Θεώρημα</u>**: Η πιθανότητα μετάβασης μετά από k βήματα από το state i→j ισούται με το ij-οστό στοιχείο του πίνακα p^k
- Παράδειγμα:
  - Π(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)
  - Π(1) = Π(0)*P = (0, 0, 1/2, 1/6, 1/3, 0)
  - Π(2) = Π(1)*P = (0, 1/4, 1/6, 13/36, 1/9, 1/9)

Αλυσίδες Markov V

- Απορροφώσα κατάσταση, παγιδεύουσα
- Μη ελαττώσιμη [irreducable] (μετάβαση από οποιαδήποτε προς οποιαδήποτε)
- Περιοδική κατάσταση με περίοδο t [$\neq$απεριοδική]
- Επίμονη-αναδρομική [$\neq$μεταβατική] (πιθανότητα 1 να ξαναγυρίσει)
- Εργοδική = επίμονη και απεριοδική

Αλυσίδες Markov VI



P=

0	0	1
0.4	0.6	0
0.5	0.5	0

P^{15}=

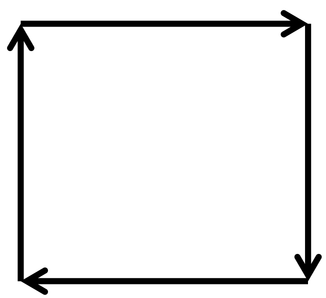
.3076	.3848	.3076
.3076	.3846	.3078
.3076	.3845	.3079

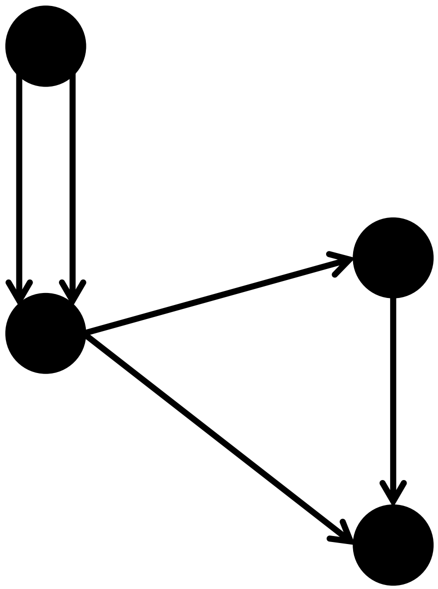
$P^{17}=P^{18}=P^{19}=P^{20}=$

.3077	.3846	.3077
.3077	.3846	.3077
.3077	.3846	.3077

Αλυσίδες Markov VII

- Αυτό συμβαίνει για την τακτική (regular) αλυσίδα Markov, που σημαίνει ότι από κάθε ακμή προς κάθε ακμή υπάρχει μονοπάτι μήκους k
- Τότε φτάνει σε steady state και δεν φαίνεται η επίδραση της αρχικής κατάστασης





Αλληλουχία εργασιών

- $J_1, J_2, \ldots, J_n$
- t_{ij}: χρόνος προετοιμασίας αν από $J_i \rightarrow J_j$
- Μορφή TSP και εύρεση Hamiltonian κύκλου με μικρότερο βάρος
- Ευριστική λύση: γράφος τουρνουά
  - τόξο (i,j) αν $t_{ij} <= t_{ji}$
  - ο γράφος έχει Hamiltonian μονοπάτι
- <u>Παράδειγμα:</u>

  $J_1 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

Κρυπτογραφία

- Ποιο είναι το μήκος κυκλικής ακολουθίας έτσι ώστε καμία υπακολουθία από r ψηφία να μην εμφανίζεται περισσότερο από μία φορά
- Σχεδιάζεται γράφος με 2^{r-1} κορυφές με labels υπο-ακολουθίες r-1 ψηφία
- Οι κορυφές αυτές έχουν $d^{-}=d^{+}=2$: ισορροπημένες
- Αν $\alpha_1= \alpha_2= \ldots= \alpha_{r-1}=0/1$, τότε βρόχος
- Υπάρχει Eulerian μονοπάτι 2^r που χαρακτηρίζεται από το πρώτο ψηφίο κάθε κορυφής

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.