ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **12**: Αντιστοιχίσεις και καλύμματα

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

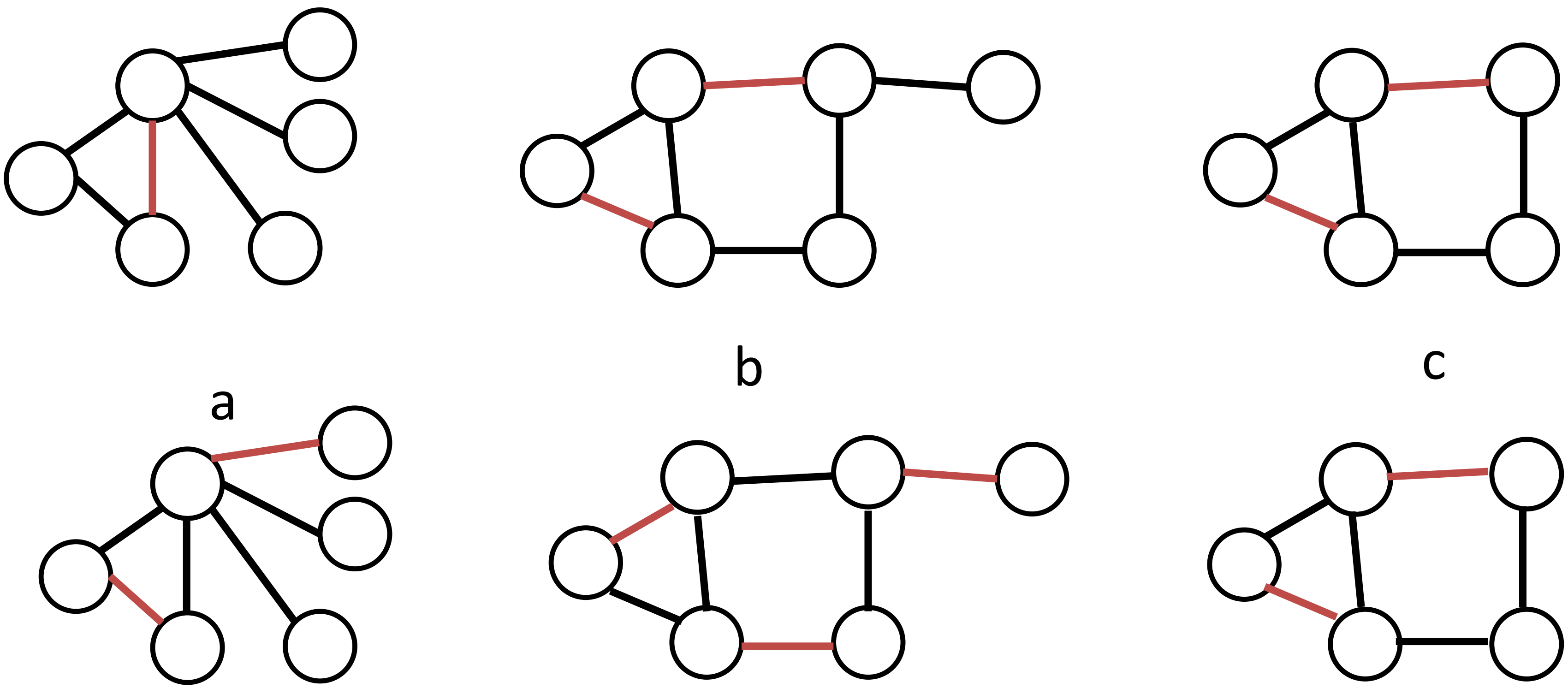
Αντιστοιχίσεις και καλύμματα

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή Ι

- **Αντιστοίχιση** (matching) από το σύνολο κορυφών V1 στο σύνολο κορυφών V2 ενός γράφου G(V1 U V2, E) είναι ένα σύνολο ακμών, που δεν είναι ανά δύο προσκείμενες.
- **Μέγιστη αντιστοίχιση** (maximal matching) είναι μία αντιστοίχιση όταν δεν μπορεί να προστεθεί κάποια ακμή.
- **Μεγαλύτερη μέγιστη αντιστοίχιση** (largest maximal matching) είναι η μέγιστη αντιστοίχιση με το μεγαλύτερο αριθμό ακμών, που ονομάζεται **αριθμός αντιστοίχισης** (matching number).

Εισαγωγή ΙΙ



Εισαγωγή ΙΙΙ

- Μία αντιστοίχιση με όλες τις κορυφές ενός γράφου ονομάζεται **τέλεια** (perfect).
- Μία τέλεια αντιστοίχιση λέγεται και **1-παράγοντας** (1-factor).
- Μία ακμή λέγεται **αδύναμη σε σχέση με μία αντιστοίχιση M** (weak with respect to a matching M), αν δεν ανήκει στην αντιστοίχιση M.
- Μία κορυφή λέγεται αδύναμη σε σχέση με μία αντιστοίχιση M, αν πρόσκειται σε αδύναμες ακμές σε σχέση με την αντιστοίχιση M.

Εισαγωγή IV

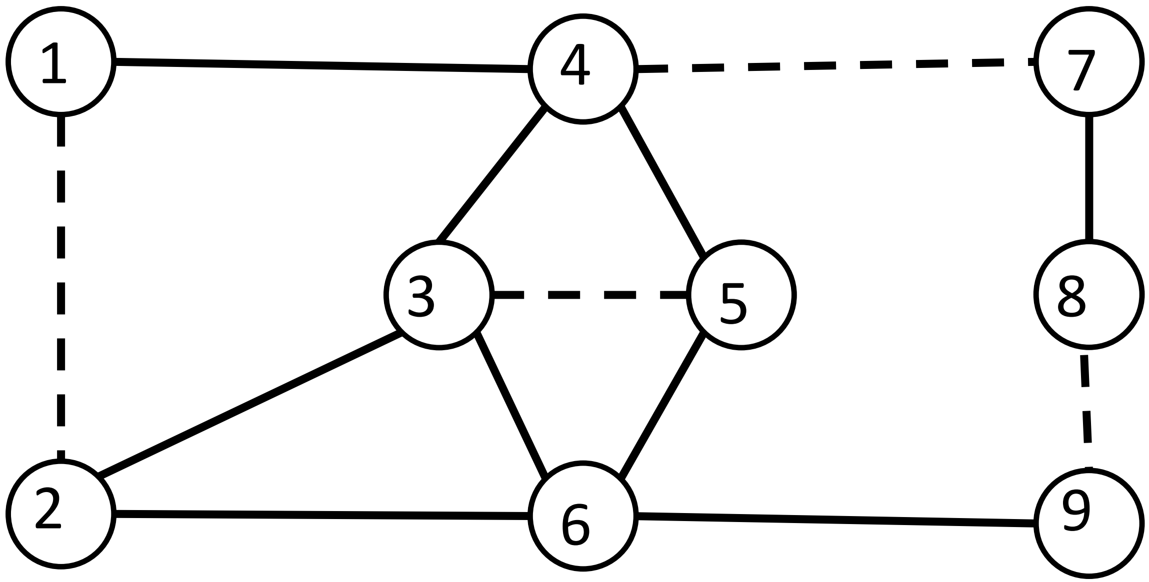
Θεώρημα. Έστω M1 και M2 δύο αντιστοιχίσεις του γράφου G. Τότε κάθε συνιστώσα του υπογράφου H με E(H)= (M1–M2) U (M2 –M1) ανήκει σε μία από τις εξής 3 κατηγορίες:

- είναι απομονωμένη κορυφή, ή
- είναι κύκλος άρτιου μήκους με ακμές που ανήκουν διαδοχικά στις αντιστοιχίσεις M1 και M2, είτε
- είναι ένα μονοπάτι με ακμές που ανήκουν διαδοχικά στις αντιστοιχίσεις M1 και M2, τέτοιο ώστε κάθε τερματική κορυφή του είναι αδύναμη σε σχέση με μία και μόνο μία αντιστοίχιση.

Εισαγωγή V

- **Εναλλασσόμενο μονοπάτι** (alternating path) λέγεται ένα μονοπάτι, όπου διαδοχικά οι ακμές είναι αδύναμες και δεν είναι αδύναμες (ή το αντίστροφο) σε σχέση με μία αντιστοίχιση M.
- **Αυξανόμενο μονοπάτι** (augmenting path) λέγεται ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι, όπου οι τερματικές κορυφές είναι αδύναμες σε σχέση με μία αντιστοίχιση M.
- **Θεώρημα** (Berge, 1957). Μία αντιστοίχιση M ενός γράφου G είναι μέγιστη, αν και μόνο αν δεν υπάρχει κάποιο αυξανόμενο μονοπάτι στο γράφο G.

Εισαγωγή VI



M: (2,3), (5,4), (7,8)

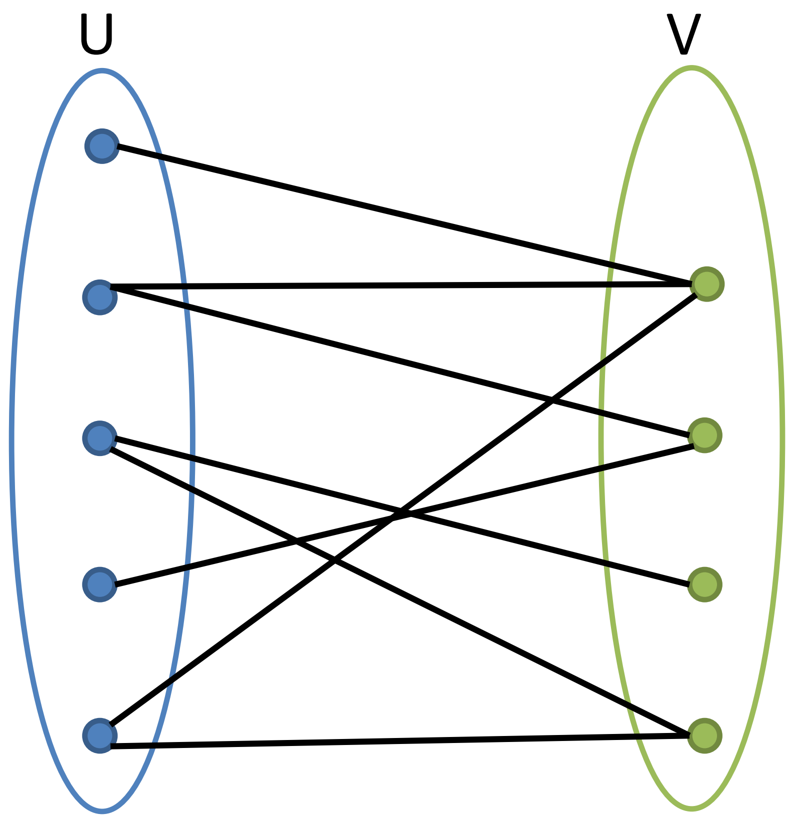
Αντιστοιχίσεις και διγράφοι I

- Έστω ένας διγράφος με δύο διακριτά σύνολα κορυφών V1 και V2, όπου |V1| ≤ |V2|.
- **Πλήρης αντιστοίχιση** (complete matching) των κορυφών του συνόλου V1 στο σύνολο V2 είναι η αντιστοίχιση όπου για κάθε κορυφή του συνόλου V1 υπάρχει μία προσπίπτουσα ακμή.
- Η πλήρης αντιστοίχιση είναι μεγαλύτερη μέγιστη, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει γενικά.

Αντιστοιχίσεις και διγράφοι II

<u>Θεώρημα</u> (Hall, 1935).

Έστω ένας διγράφος G(V1 U V2, E). Το σύνολο V1 μπορεί να αντιστοιχισθεί σε ένα υποσύνολο του V2 αν και μόνο αν $|N(S)| \geq |S|$ δια παν S υποσύνολο του V1



Αντιστοιχίσεις και διγράφοι III

- Δοθέντων των συνόλων S1, S2, ..., Sk λέγεται ότι το στοιχείο xi ϵ Si είναι ένας **αντιπρόσωπος** (representative) του συνόλου Si.
- Σκοπός είναι η εύρεση μίας συλλογής διακριτών αντιπροσώπων από τα σύνολα Si (όπου 1 ≤ i ≤ k).
- Αυτή η συλλογή ονομάζεται **σύστημα διακριτών αντιπροσώπων** (system of distinct representatives) ή **εγκάρσια** (transversal) συλλογή των συνόλων.
- *Παράδειγμα: S1*={1,2,3}, *S2*={1,4,5} *S3*={3,5}, όπου *S*={*S1*,*S2*,*S3*}. Ένα σύστημα διακριτών αντιπροσώπων είναι {1,4,5} (επίσης {2,1,3}).

Αντιστοιχίσεις και διγράφοι IV

- **<u>Θεώρημα</u>** (Το θεώρημα του συστήματος διακριτών αντιπροσώπων). Ένα πεπερασμένο σύνολο μη κενών συνόλων S1,S2, ..., Sk (όπου $k \geq 1$) έχει ένα σύστημα διακριτών αντιπροσώπων, αν και μόνο αν η ένωση οποιωνδήποτε t από αυτά τα σύνολα περιέχει τουλάχιστον t διακριτά στοιχεία για κάθε $1 \leq t \leq k$.
- **<u>Θεώρημα</u>.** Έστω ένας πίνακας m x n με 0 και 1. Μπορεί να βρεθεί μία κατάσταση όπου σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη υπάρχει μόνο ένα 1, αν και μόνο αν κάθε ομάδα από r γραμμές έχουν 1 σε τουλάχιστον r στήλες, για κάθε r.

Αντιστοιχίσεις και διγράφοι V

- **Θεώρημα** (Το Θεώρημα των γάμων)

  Ικανή και αναγκαία συνθήκη για λύση στο πρόβλημα των γάμων m ανδρών και w > m γυναικών είναι κάθε σύνολο από t άνδρες να γνωρίζουν συλλογικά τουλάχιστον t γυναίκες (όπου $1 \leq t \leq m$).

Αντιστοιχίσεις και διγράφοι VI

- Αν είναι αδύνατο να βρεθεί μία πλήρης αντιστοίχιση σε ένα γράφο G, τότε πολλές φορές θεωρείται αναγκαίο να βρεθεί μία μέγιστη αντιστοίχιση.
- Για τους διμερείς γράφους εισάγεται ένας νέος όρος, το **έλλειμμα** (deficiency), που συμβολίζεται με δ(G).
- Έστω ότι από το σύνολο V1 επιλέγεται ένα υποσύνολο r κορυφών που είναι γειτονικές προς q κορυφές που ανήκουν στο σύνολο των V2 κορυφών. Τότε, το έλλειμμα του διγράφου ισούται με τη μέγιστη τιμή του αριθμού r–q για κάθε τιμή του r=1,2,... και όλα τα υποσύνολα του V1.
- **Θεώρημα**. Σε ένα διγράφο G υπάρχει μία πλήρης αντιστοίχιση, αν και μόνο αν δ(G) ≤ 0.

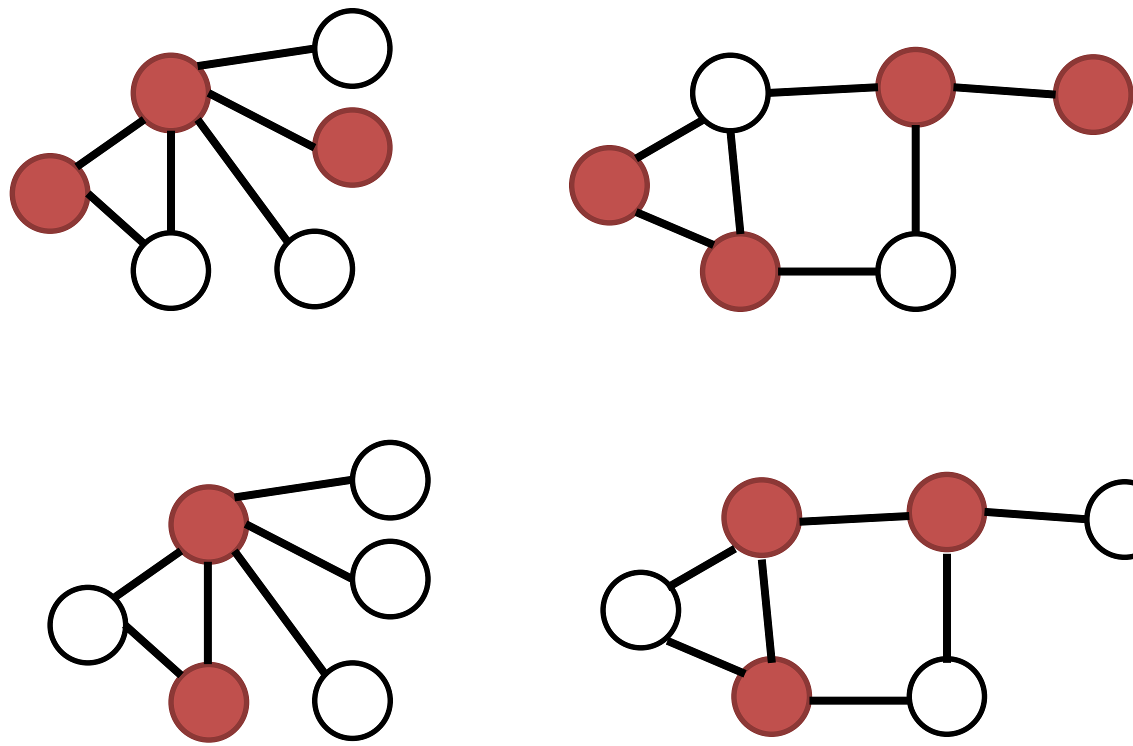
Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα I

- Λέγεται ότι μία κορυφή **καλύπτει** (covers) μία ακμή ή ότι μία ακμή καλύπτει μία κορυφή αν η ακμή είναι προσπίπτουσα στην κορυφή.
- Ένα υποσύνολο των κορυφών ενός γράφου G που καλύπτει όλες τις ακμές του γράφου ονομάζεται **κάλυμμα κορυφών** (vertex cover), ή απλά κάλυμμα.
- Αντίστοιχα, ένα υποσύνολο των ακμών ενός γράφου G που καλύπτει όλες τις κορυφές του γράφου ονομάζεται **κάλυμμα ακμών** (edge cover).

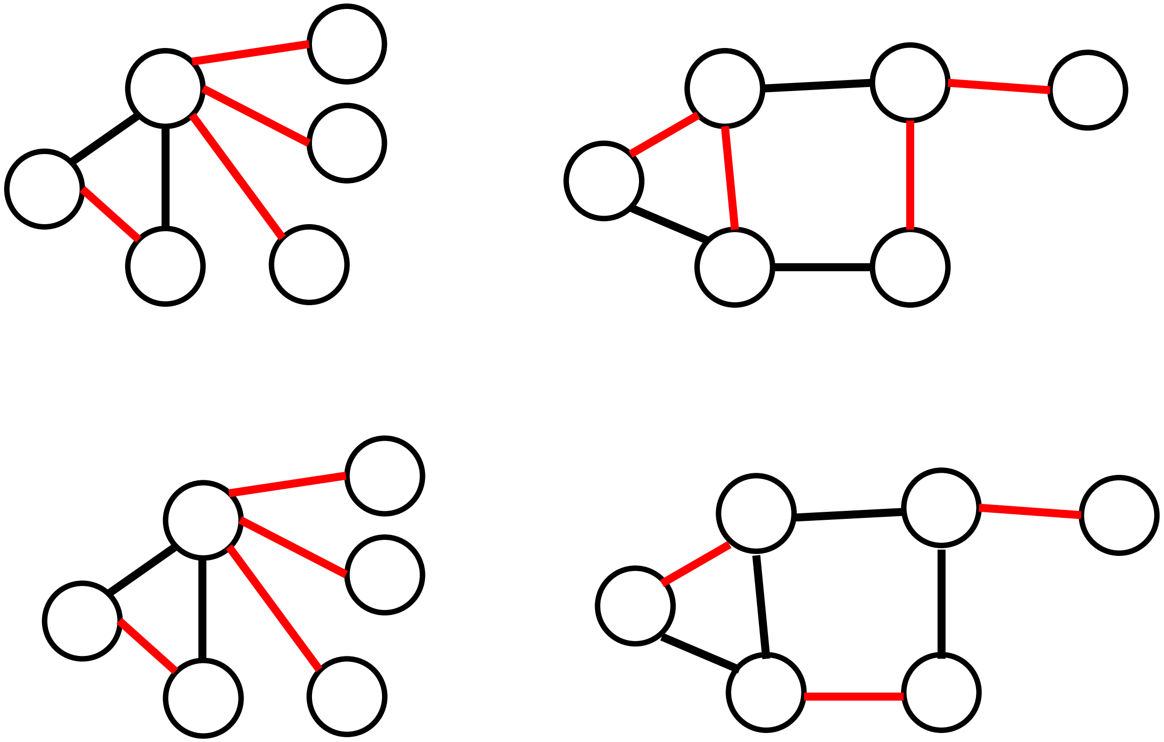
Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα ΙΙ

- Ένα κάλυμμα κορυφών (ακμών) ονομάζεται **ελάχιστο** (minimal) αν η εξαίρεση μίας οποιασδήποτε κορυφής (ακμής) καταστρέφει το κάλυμμα.
- Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών από όλα τα ελάχιστα καλύμματα ενός γράφου ονομάζεται **καλύπτων αριθμός** (covering number), α0(G).
- Σε ένα γράφο G ως **καλύπτων αριθμός ως προς τις ακμές** (edge covering number), α1(G), ορίζεται ο ελάχιστος αριθμός ακμών από όλα τα ελάχιστα καλύμματα ακμών.
- Ένα κάλυμμα κορυφών ή ακμών ονομάζεται **μικρότερο ελάχιστο** (smallest minimum) αν αποτελείται από α0 κορυφές ή α1 ακμές, αντίστοιχα.
- Ισχύει α0(Kn)=n-1 και α1(Kn)= $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα III



Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα IV



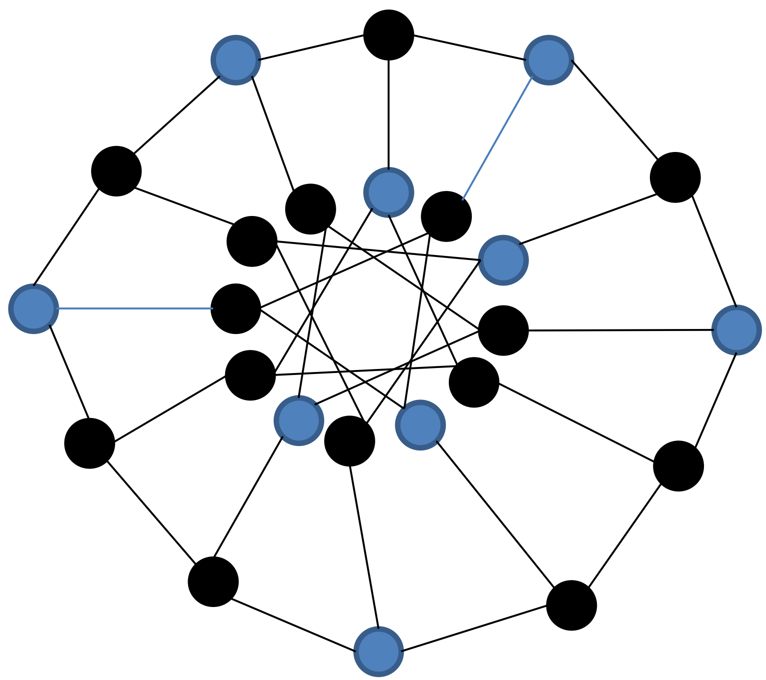
Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα V

- Ένα σύνολο κορυφών ενός γράφου G ονομάζεται **ανεξάρτητο** (independent) αν δύο οποιεσδήποτε κορυφές του συνόλου αυτού δεν είναι γειτονικές και επομένως θα μπορούσαν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα.
- Ένα ανεξάρτητο σύνολο ονομάζεται **μέγιστο** (maximum), αν ο γράφος G δεν έχει άλλο ανεξάρτητο σύνολο με περισσότερες κορυφές.
- Το πλήθος των κορυφών του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου ονομάζεται **αριθμός ανεξαρτησίας κορυφών** (vertex independence number) και συμβολίζεται με β0(G).

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα VI

- Ένα **ανεξάρτητο σύνολο ακμών** (independent set of edges) ενός γράφου G αποτελείται από ακμές που δεν είναι προσκείμενες ανά δύο.
- Ο μεγαλύτερος αριθμός ακμών από τα ανεξάρτητα σύνολα ακμών ενός γράφου ονομάζεται **αριθμός ανεξαρτησίας ακμών** (edge independence number) και συμβολίζεται με β1(G).
- Για παράδειγμα, ισχύει β0(Kn)=1 και β1(Kn)= $\lfloor n/2 \rfloor$
- Σε ένα διγράφο η ποσότητα β1(G) ταυτίζεται με τον αριθμό αντιστοίχισης.

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα VII



- Οι 9 μπλε κορυφές είναι το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο για το γράφο των 24 κορυφών (β0=9).

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα VIII

- **<u>Θεώρημα</u>** (Galai, 1959)

  Σε κάθε συνδεδεμένο γράφο G με n ακμές και d(G)>0 ισχύει:

  $$\alpha 0 + \beta 0 = n = \alpha 1 + \beta 1$$

- **<u>Θεώρημα</u>** (Koenig+Egervary, 1931)

  Αν G(V1 U V2,E) είναι ένας διγράφος, τότε ισχύει:

  $$\beta 1(G) = \alpha 0(G)$$

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα IX

Είναι εύκολο να εντοπισθούν ασήμαντα καλύμματα ακμών, όπως το σύνολο E(G), το E(T), όπου T ένα ζευγνύον δένδρο του, ή οι ακμές ενός Hamiltonian κύκλου. Επίσης ισχύει:

– Σε ένα γράφο υπάρχει κάλυμμα ακμών, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν απομονωμένες κορυφές,
– Κάθε ακμή προσπίπτουσα σε εκκρεμή κορυφή περιλαμβάνεται στο κάλυμμα ακμών,
– Σε ένα συνδεδεμένο γράφο με n κορυφές το κάλυμμα ακμών έχει τουλάχιστον $\lceil n/2 \rceil$ ακμές

Καλύμματα & ανεξάρτητα σύνολα Χ

- Ένα ελάχιστο κάλυμμα ακμών δεν περιέχει κύκλους. Άρα, ένα ελάχιστο κάλυμμα ακμών δεν έχει περισσότερο από n-1 ακμές,
- Κάθε κάλυμμα ακμών περιέχει ένα ελάχιστο κάλυμμα,
- Ένα σύνολο ακμών g είναι κάλυμμα ακμών, αν και μόνο αν για κάθε κορυφή v, ο βαθμός της κορυφής αυτής στο γράφο G-g είναι μικρότερος από το βαθμό της ίδιας κορυφής στο γράφο G

Αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφους I

- **Είσοδος**: Ένας διγράφος G(V1 U V2,E) και μία αντιστοίχιση M.
- **Έξοδος**: Μία αντιστοίχιση μεγαλύτερη από τη M ή η απάντηση ότι η παρούσα αντιστοίχιση M είναι η μέγιστη.
- **Μέθοδος**: Τοποθέτηση επιγραφών και δημιουργία αυξανόμενων μονοπατιών.

1. Οι κορυφές του V1 που είναι αδύναμες σε σχέση με την αντιστοίχιση M λαμβάνουν την επιγραφή *. Τα Βήματα 2 και 3 εκτελούνται διαδοχικά μέχρι να μην μπορούν να τοποθετηθούν άλλες επιγραφές.

Αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφους II

2. Επιλέγεται κάποια κορυφή του V1, έστω η v_1i, που στο προηγούμενο βήμα δέχθηκε επιγραφή και θέτουμε την επιγραφή v_1i στις κορυφές του N(v_1i) χωρίς επιγραφή, αν συνδέονται με ακμή που είναι αδύναμη ως προς τη M. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2 για κάθε κορυφή του V1 που δέχθηκε επιγραφή στο προηγούμενο βήμα.
3. Επιλέγεται κάποια κορυφή του V2, έστω η v_2i, που στο προηγούμενο βήμα δέχθηκε επιγραφή και θέτουμε την επιγραφή v_2i στις κορυφές του N(v_2i) χωρίς επιγραφή αν συνδέονται με μία ακμή που ανήκει στη M. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3 για κάθε κορυφή του V2 που δέχθηκε επιγραφή στο προηγούμενο βήμα.

Αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφους ΙΙΙ

Ο αλγόριθμος θα τερματίσει όταν θα συμβεί μία από τις δύο συνθήκες:

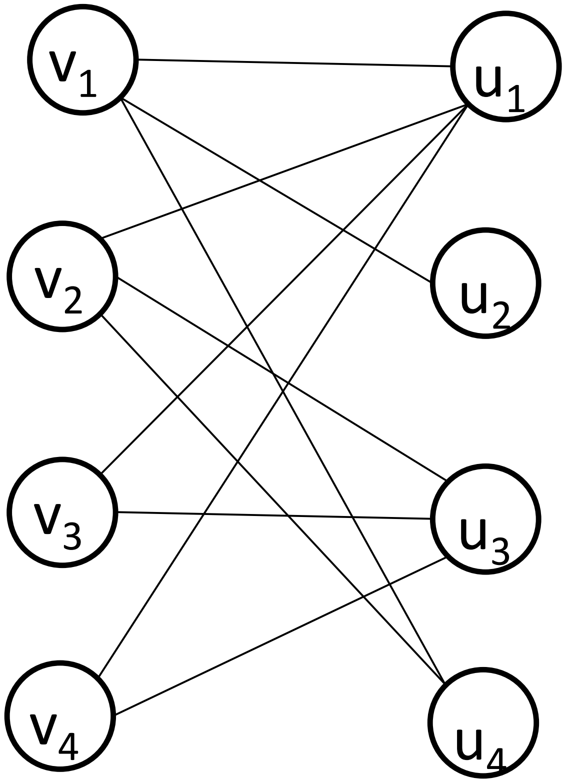
[Συνθήκη 1:] Μία αδύναμη κορυφή του V2 δέχεται επιγραφή,

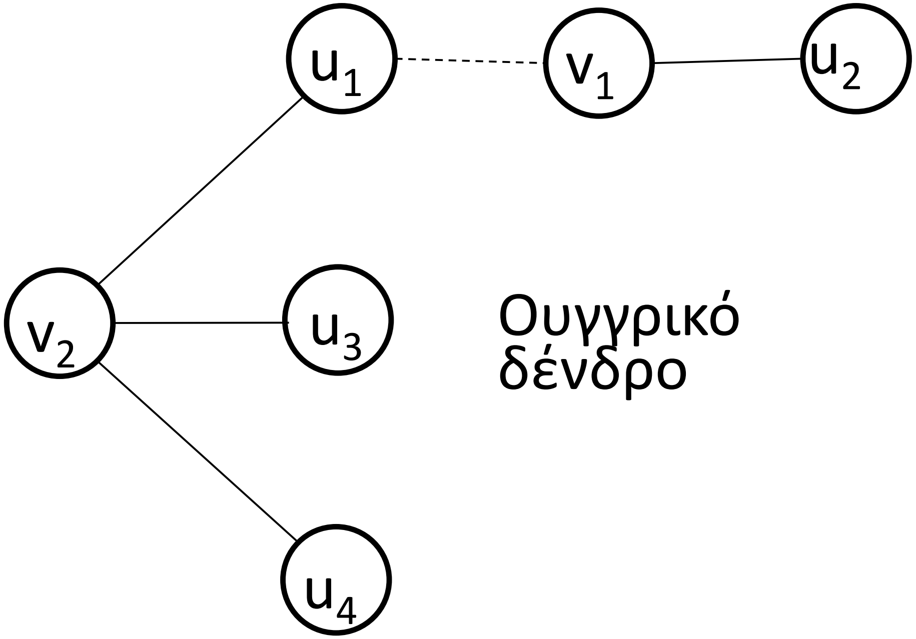
[Συνθήκη 2:] Δεν έχει συμβεί η Συνθήκη 1 και είναι αδύνατη η τοποθέτηση άλλων επιγραφών.

Αν συμβεί η Συνθήκη 1, τότε έχει βρεθεί ένα αυξανόμενο μονοπάτι που μπορεί να κατασκευασθεί ακολουθώντας κατά την αντίστροφη πορεία όλες τις κορυφές με επιγραφές μέχρι να βρεθεί μία κορυφή με επιγραφή *. Έτσι ορίζεται μία αντιστοίχιση μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Αν συμβεί η Συνθήκη 2, τότε έχει επιτευχθεί μία μέγιστη αντιστοίχιση (αποδεικνύεται).

Αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφους IV

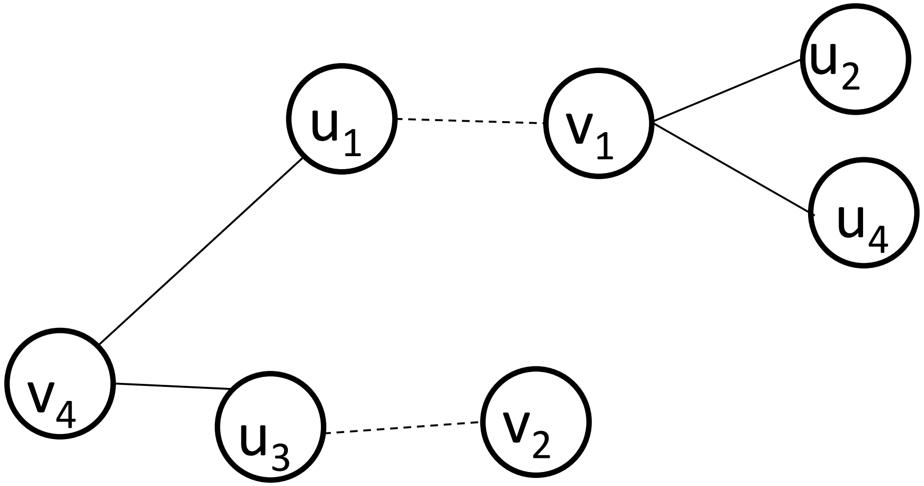
Παράδειγμα



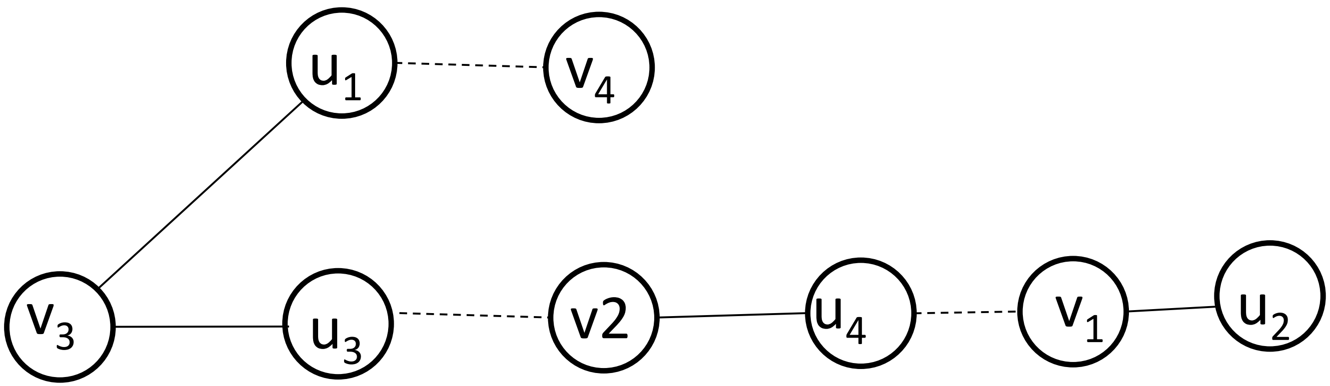


Ουγγρικό δένδρο

Αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφους V



Παράδειγμα



Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού Ι

- **Personnel assignment problem**. Μία εταιρεία ζητά να προσλάβει 4 υπαλλήλους με διαφορετικές αρμοδιότητες. Στην αγγελία απαντούν 4 πρόσωπα, το καθένα με προτιμήσεις για περισσότερες της μίας θέσεις. Ο υποψήφιος Α δεν ενδιαφέρεται για τις θέσεις 2 και 3, ο Β δεν ενδιαφέρεται για την 1, ο Γ για τις 1, 2 και 4, ενώ ο Δ δεν ενδιαφέρεται για τις θέσεις 3 και 4. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο εύρεσης μίας μέγιστης αντιστοίχισης σε διγράφο.

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού ΙΙ

Έστω ότι κάθε ενδιαφερόμενος κρίνεται με κάποιο κριτήριο ως περισσότερο ή λιγότερο ακατάλληλος για το αντικείμενο της κάθε θέσης. Έτσι οι ακμές του αντίστοιχου διγράφου είναι ζυγισμένες, και συνεπώς, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι μία βέλτιστη αντιστοίχιση με ελάχιστο συνολικό βάρος. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί μία νέα τεχνική που θα παρουσιασθεί με παράδειγμα.

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού ΙΙΙ

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	4	6	14	11
j_2	7	2	8	9
j_3	3	13	1	4
j_4	5	2	0	13

- Αφαιρώ από κάθε γραμμή το μικρότερο αριθμό

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	0	2	10	7
j_2	5	0	6	7
j_3	2	12	0	3
j_4	5	2	0	13

- Αφαιρώ από κάθε στήλη το μικρότερο αριθμό

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού IV

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	0*	2	10	4
j_2	5	0*	6	4
j_3	2	12	0	0*
j_4	5	2	0*	10

Βρίσκω 4 ανεξάρτητα μηδενικά

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού V

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	6	8	2	7
j_2	5	8	13	9
j_3	2	8	10	9
j_4	4	12	8	11

- Αφαιρώ από κάθε γραμμή και στήλη το μικρότερο αριθμό

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	4	3	0	1
j_2	0	0	8	0
j_3	0	3	8	3
j_4	0	5	4	3

- Δεν υπάρχουν 4 ανεξάρτητα μηδενικά

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού VI

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	4	3	0	1
j_2	0	0	8	0
j_3	0	3	8	3
j_4	0	5	4	3

- Τα μηδενικά βρίσκονται στις πρώτες δύο γραμμές και την πρώτη στήλη (διαγράφονται με 3 γραμμές).

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού VII

- Η διαδικασία συνεχίζει ως εξής:
  - Επιλέγεται η μικρότερη τιμή μεταξύ εκείνων που δεν ανήκουν στις διαγραμμένες γραμμές και στήλες,
  - Αφαιρείται η τιμή αυτή από όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν σε διαγραμμένες γραμμές ή στήλες,
  - Προστίθεται η τιμή στα στοιχεία που διαγράφονται δυο φορές.
  - Τα υπόλοιπα στοιχεία μένουν ανέπαφα.

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού VIII

U	a_1	a_2	a_3	a_4
j_1	7	3	0	1
j_2	3	0	8	0
j_3	0	0	5	0
j_4	0	2	1	0

Προφανώς η διαδικασία παράγει τουλάχιστον ένα επιπλέον μηδενικό. Θεωρητικά υπάρχει το ενδεχόμενο να μην υπάρχουν 4 ανεξάρτητα μηδενικά ούτε μετά από αυτή τη διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβά-νεται η διαδικασία των βημάτων αυτών μέχρις ότου παραχθούν ανεξάρτητα μηδενικά.

Το πρόβλημα επιλογής προσωπικού IX

- **<u>Θεώρημα</u>**. Έστω ότι S είναι ένας m x n πίνακας.
  Ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων μηδενικών που μπορούν να βρεθούν στον S ισούται με τον ελάχιστο αριθμό γραμμών ή στηλών που μαζί καλύπτουν όλα τα μηδενικά του S.

Το πρόβλημα των σταθερών γάμων Ι

- **Stable marriage problem**. Έστω ότι πρόκειται να ζευγαρώσουν ένα σύνολο ανδρών m_1, .., m_n με ένα σύνολο γυναικών w_1, .., w_n. Ο καθένας τους, όμως, έχει τις δικές του προτιμήσεις. Έστω, ότι ο m_1 νυμφεύεται την w_1, ενώ ο m_2 νυμφεύεται την w_2. Ωστόσο, ο m_1 θα προτιμούσε την w_2 καθώς και η w_2 θα προτιμούσε τον m_1. Προφανώς, η διαμορφωνόμενη κατάσταση δεν είναι σταθερή.

Το πρόβλημα των σταθερών γάμων II

Είσοδος: Πίνακες προτιμήσεων ανδρών και γυναικών.

Έξοδος: Ένα σύνολο σταθερών γάμων.

Μέθοδος των Gale-Shapley (1962): Με διαδοχικές προτάσεις και αντιπροτάσεις.

1. Κάθε άνδρας προτείνει την πρώτη του επιλογή.
2. Κάθε γυναίκα με δύο ή περισσότερες προτάσεις, τις απορρίπτει όλες πλην μίας, χωρίς όμως να τη δέχεται οριστικά.
3. Επιλέγουν εκ νέου οι άνδρες, που απορρίφθηκε η πρότασή τους, ενώ αυτοί που δεν απορρίφθηκε η επιλογή τους συνεχίζουν στην ίδια επιλογή.
4. Τα Βήματα 2 και 3 επαναλαμβάνονται μέχρι να μην υπάρχει αντίρρηση εκ μέρους των γυναικών.

Το πρόβλημα των σταθερών γάμων ΙΙΙ

men	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	1	2	3	4
m_2	1	4	3	2
m_3	2	1	3	4
m_4	4	2	3	1

- Προτιμήσεις ανδρών και γυναικών

women	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	3	3	2	3
m_2	4	1	3	2
m_3	2	4	4	1
m_4	1	2	1	4

Το πρόβλημα των σταθερών γάμων IV

proposals	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
m_1	1	1	1	1*	2*	3
m_2	1*	4	4	4	4	4
m_3	2	2	2*	1	1	1
m_4	4	4*	2	2	2	2

- Με αστερίσκο συμβολίζονται οι προτάσεις ανδρών που έχουν απορριφθεί.
- **Θεώρημα**. Πάντα υπάρχει ένα σύνολο σταθερών γάμων μεταξύ n ανδρών και n γυναικών.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ιωάννης Μανωλόπουλος. «Αλγοριθμική Θεωρία Γράφων. Αντιστοιχίσεις και καλύμματα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS264/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.