ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **13**: Προβλήματα Ροών σε Δίκτυα

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Προβλήματα Ροών σε Δίκτυα

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δίκτυα

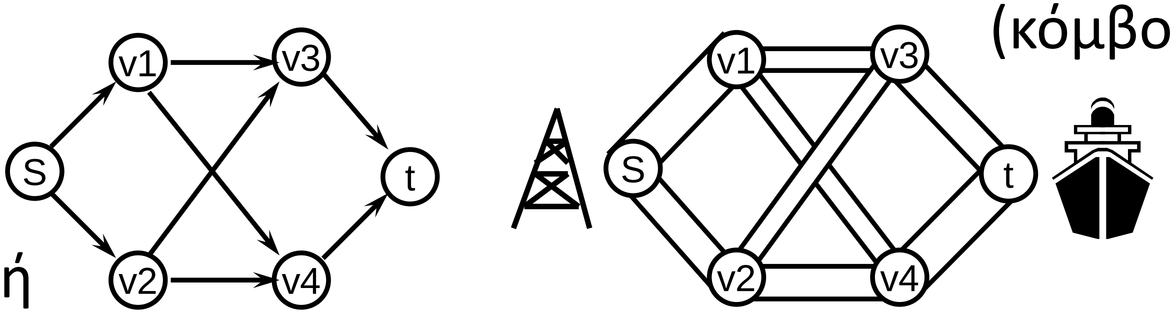
- Πρακτικά παραδείγματα δικτύων
  - Ρευστά σε σωλήνες
  - κομμάτια σε γραμμές παραγωγής
  - ρεύμα σε ηλεκτρικό δίκτυο
  - πληροφορία σε δίκτυο επικοινωνίας
  - μεταφορά αγαθών σε δρόμους…

Δίκτυα Παράδειγμα

Δίκτυο ροών: κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)

Παράδειγμα: σωλήνες πετρελαίου

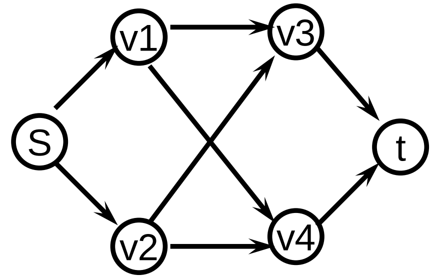
Προορισμός
(κόμβος απόληξης)



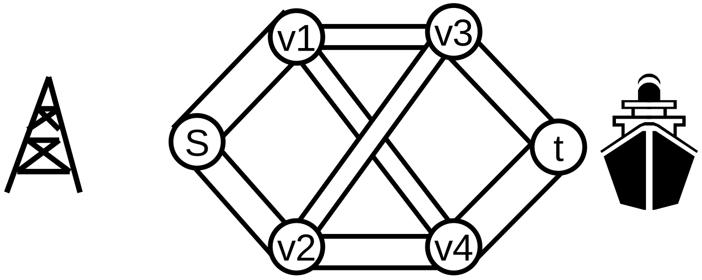
Πηγή
(κόμβος προέλευσης)

Το Πρόβλημα Μέγιστης Ροής Άτυπος Ορισμός

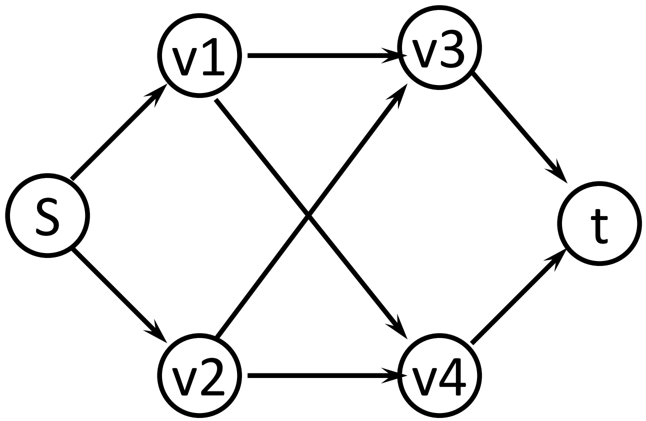
- Άτυπος ορισμός προβλήματος μέγιστης ροής:

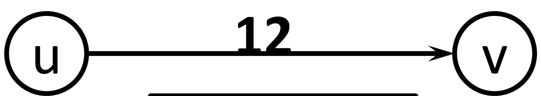


Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ρυθμός αποστολής υλικού από την πηγή στον προορισμό χωρίς παραβίαση των περιορισμών χωρητικότητας;

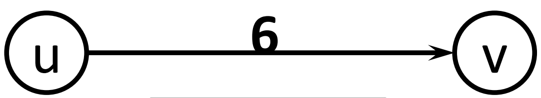


Χωρητικότητα Ι

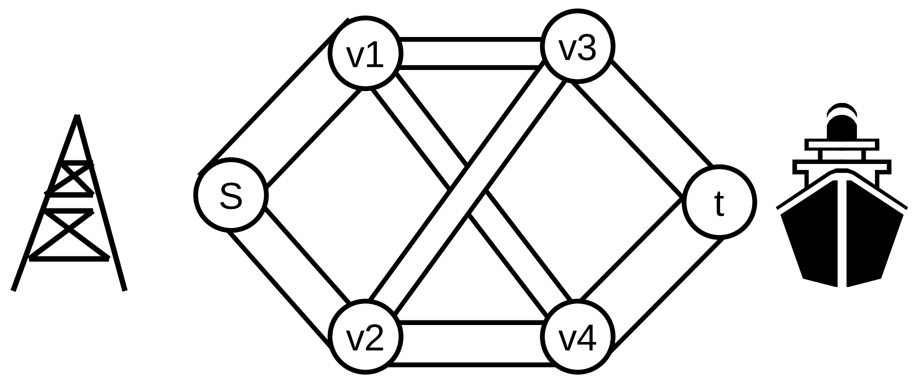


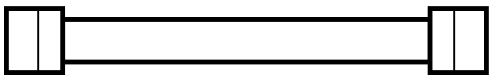


c(u,v)=12

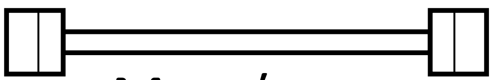


c(u,v)=6



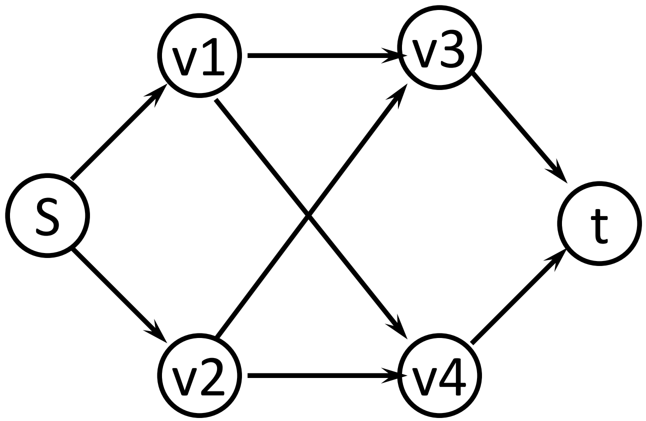


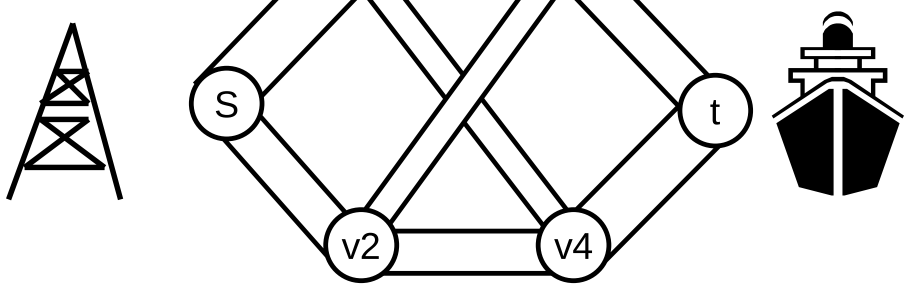
Μεγάλος σωλήνας



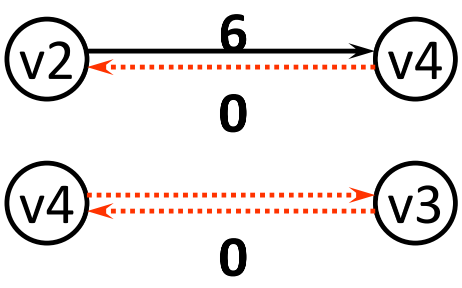
Μικρός σωλήνας

Χωρητικότητα ΙΙ

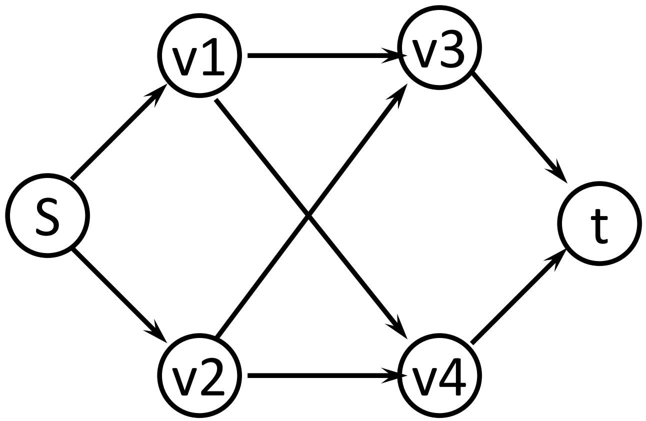


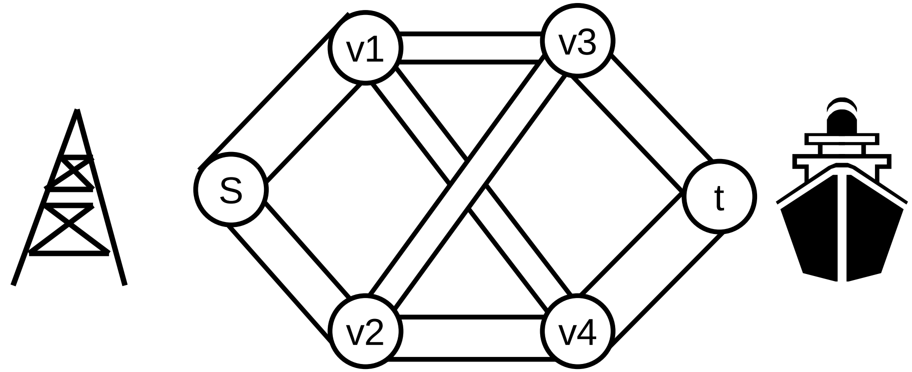


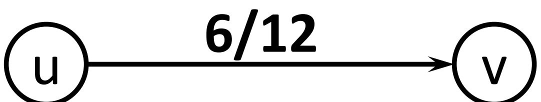
Αν $(u,v) \notin E \Rightarrow c(u,v) = 0$



Χωρητικότητα – Ροή

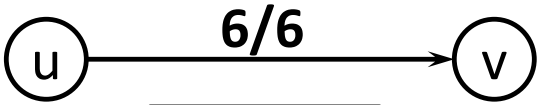






$\boxed{f(u,v)=6}$

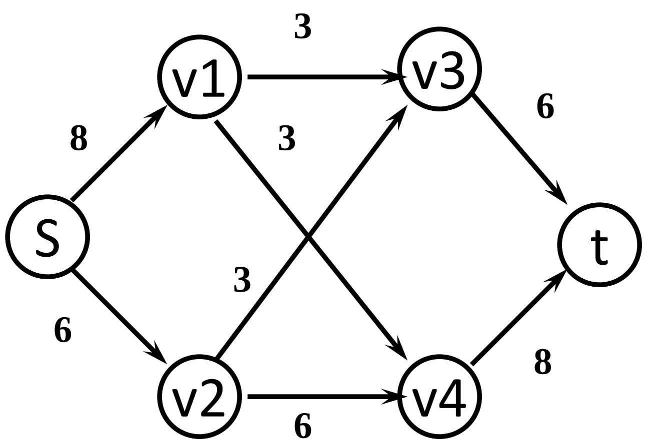
Ροή μικρότερη της χωρητικότητας

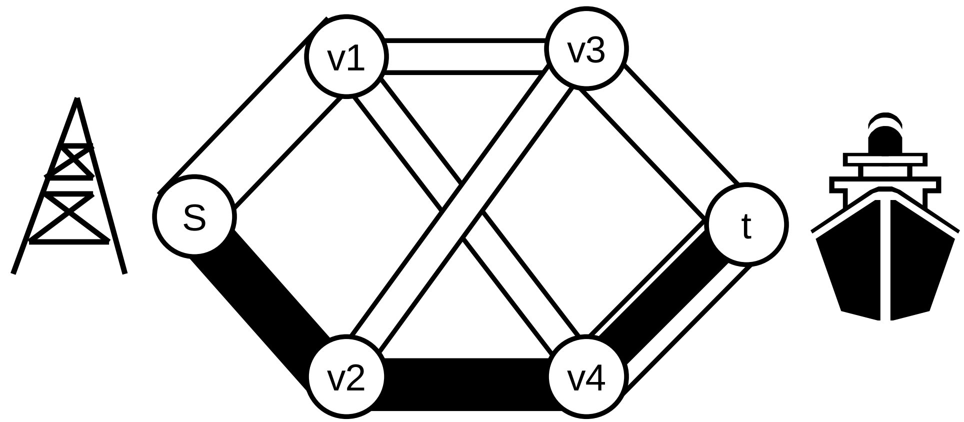


$\boxed{f(u,v)=6}$

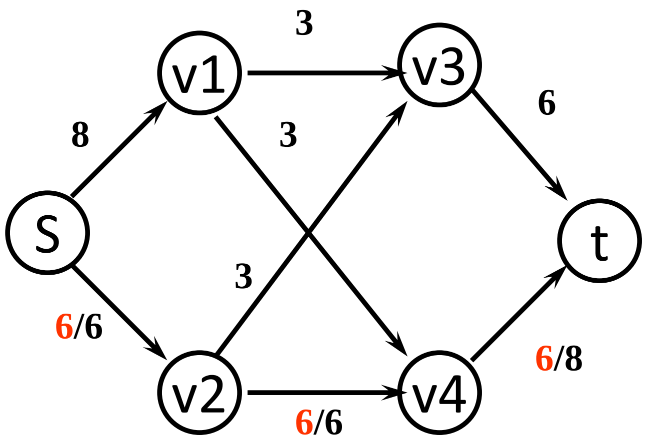
Μέγιστη Ροή

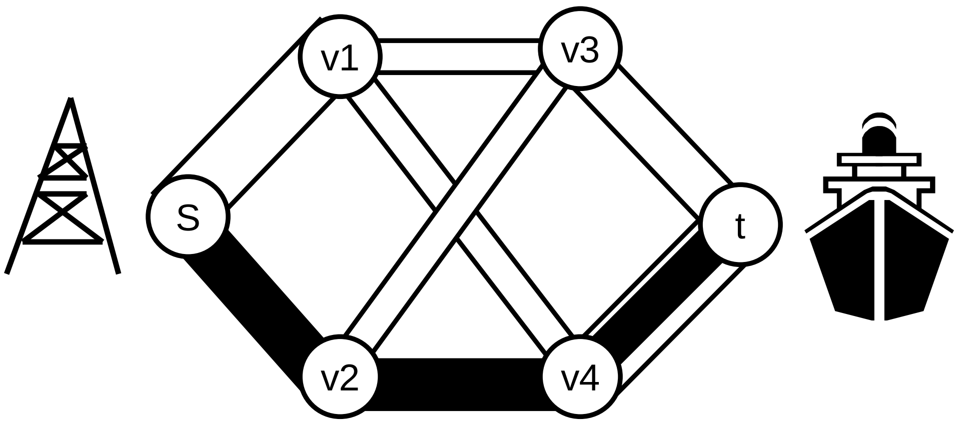
Ροή Ι



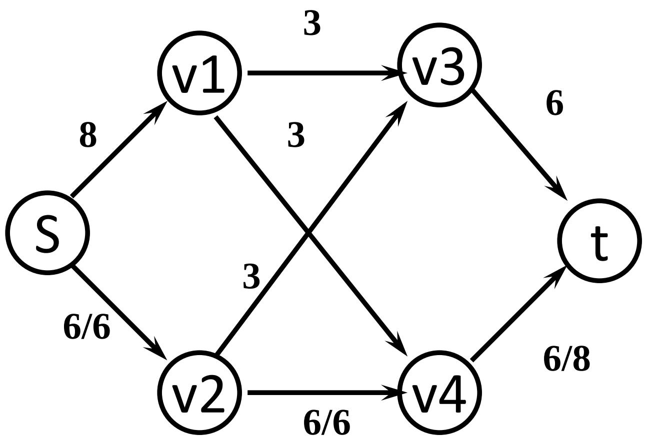


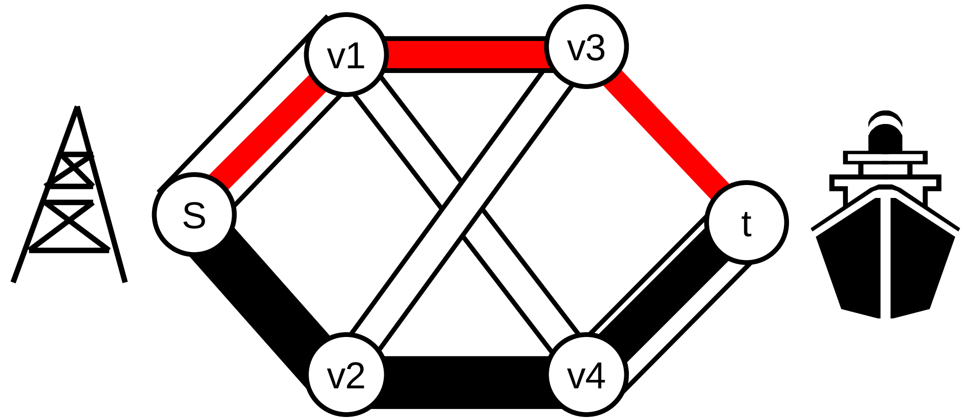
Ροή II



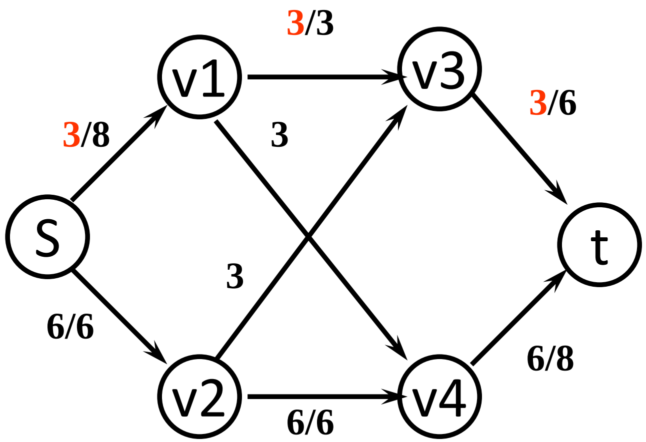


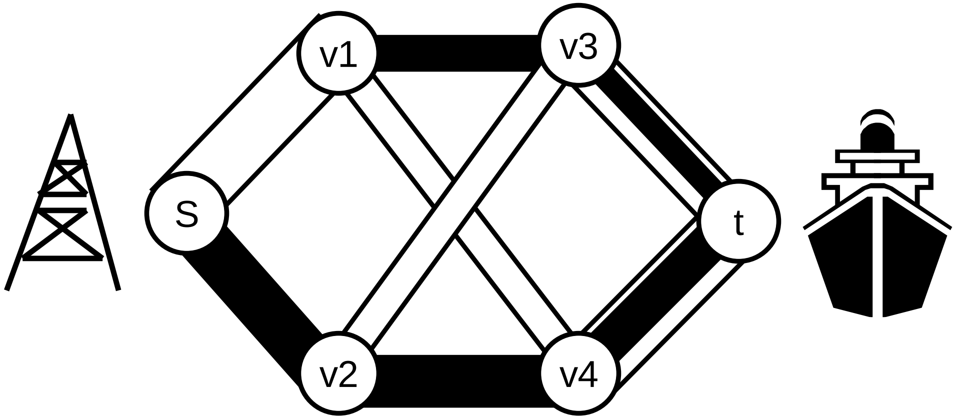
Ροή ΙΙΙ



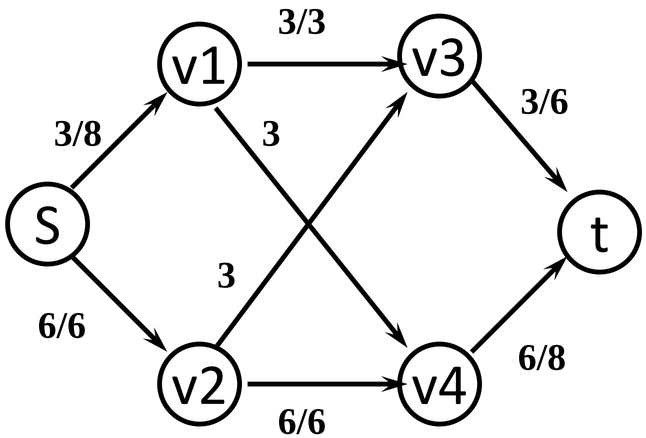


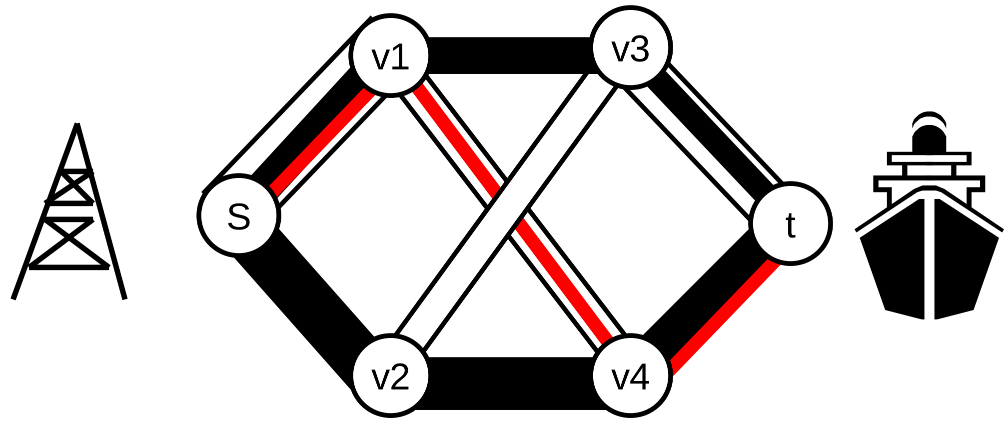
Ροή IV



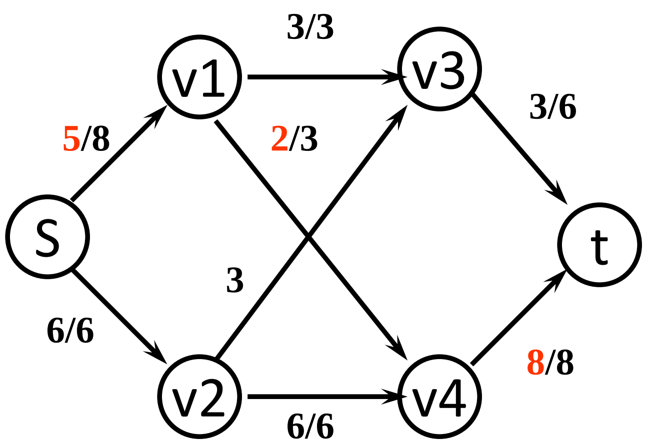


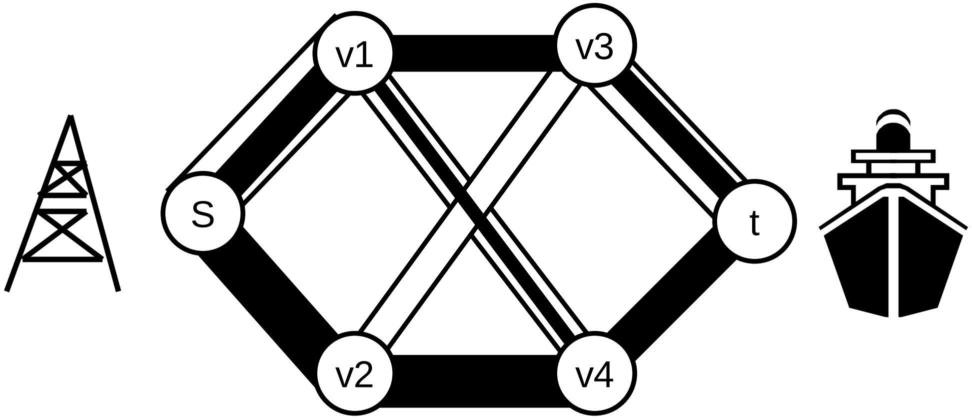
Ροή V



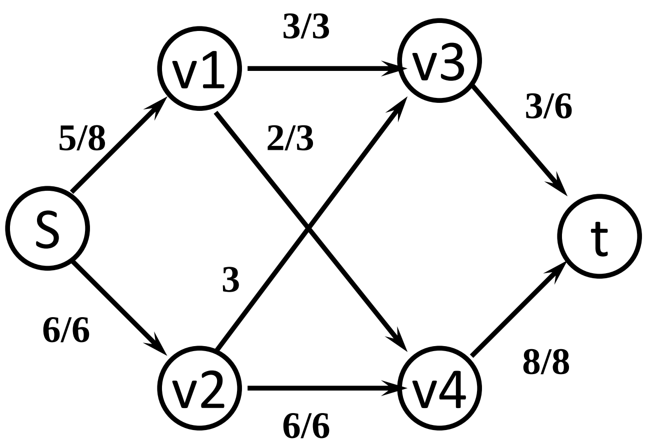


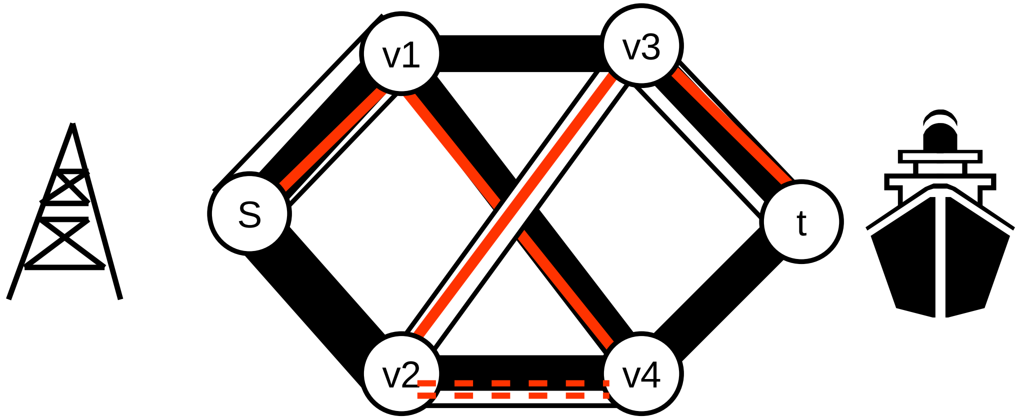
Ροή VI



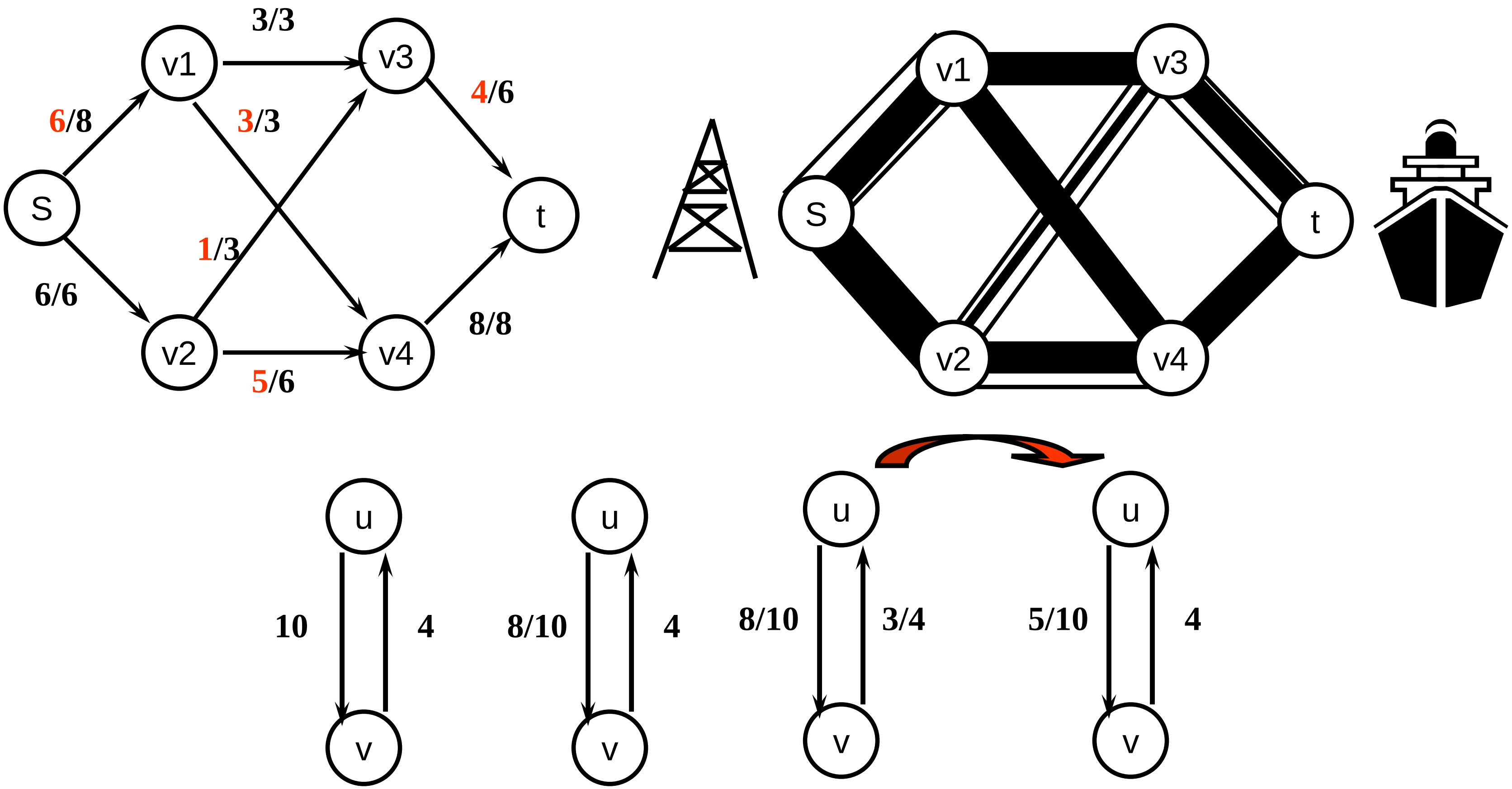


Ακύρωση Ι





Ακύρωση II

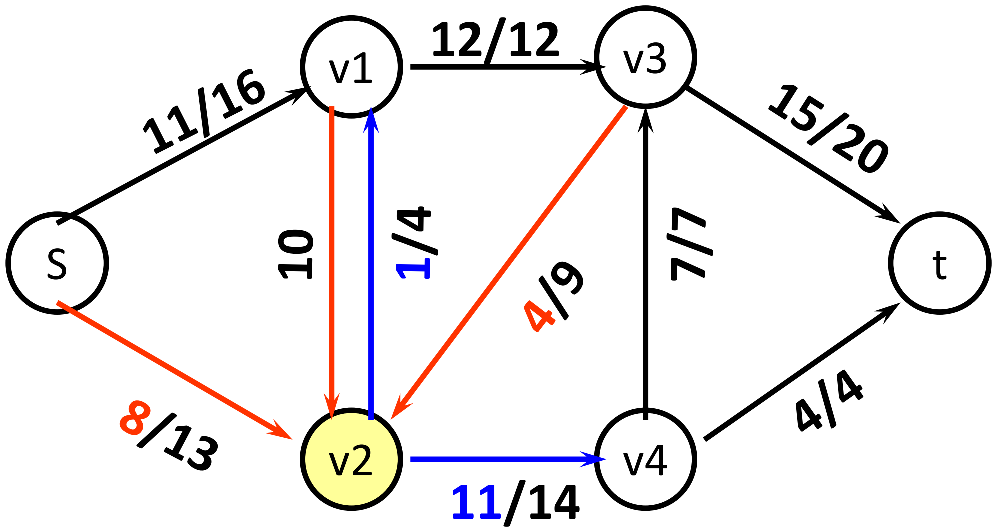


Ιδιότητες Ροών

Ροή σε $G = (V, E)$: $f: V \times V \rightarrow R$ με 3 ιδιότητες:

1. Περιορισμός χωρητικότητας: $\forall u, v \ \in V: 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
2. Συμμετρία: $\forall u, v \ \in V: f(u, v) = -f(v, u)$
3. Διατήρηση ροής: $\forall u, v \ \in V\{s, t\}$: $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

Ιδιότητες Ροών – Παράδειγμα

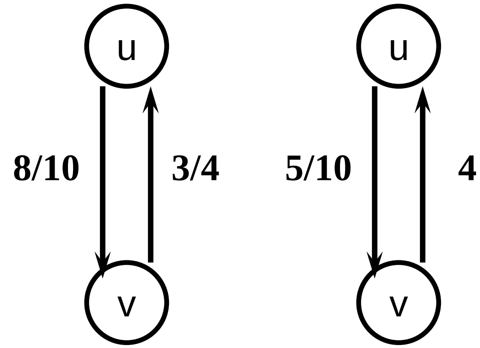


- Δίκτυο ροών G=(V,E)
- Προσοχή:

  Λόγω συμμετρίας
  f(v3,v1) = - 12

Συνολική Ροή και Τιμή Ροής

Συνολική ροή:
Θετική ή αρνητική
τιμή της f(u,v)

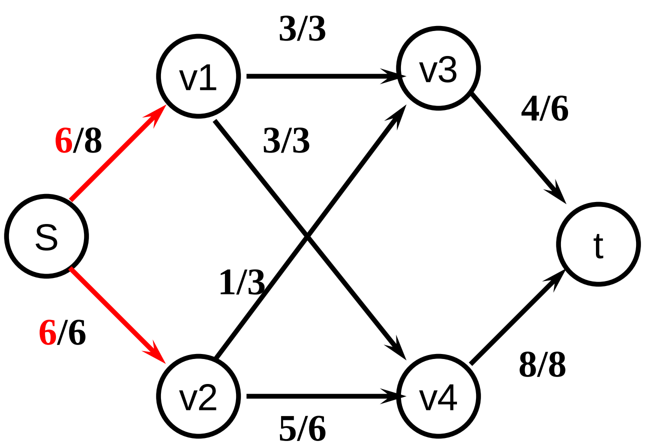


f(u,v) = 5

f(v,u) = -5

Τιμή ροής f:
Ορισμός :

$$\boxed{|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)}$$



Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής

- Άτυπος ορισμός προβλήματος μέγιστης ροής:

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ρυθμός αποστολής υλικού από την πηγή στον προορισμό χωρίς παραβίαση των περιορισμών χωρητικότητας;

- Τυπικός ορισμός του προβλήματος μέγιστης ροής:

Το πρόβλημα μέγιστης ροής είναι η εύρεση νόμιμης ροής για δοθέντα ζυγισμένο κατευθυνόμενο γράφο G, που έχει τη μέγιστη τιμή από όλες τις ροές.

Η Μέθοδος Ford-Fulkerson, ένας τρόπος εύρεσης μέγιστης ροής

- Υποθέσεις:

1. Θεωρούμε θετικές ακέραιες χωρητικότητες (C η τιμή της μέγιστης)
2. Η πηγή (κόμβος προέλευσης) δεν έχει εισερχόμενη ακμή
3. Ο προορισμός (κόμβος απόληξης) δεν έχει εξερχόμενη ακμή

- Αυτή η μέθοδος περιέχει 3 σημαντικές ιδέες:
   1. Υπολειπόμενος γράφος (residual network)
   2. Διαδρομές επαύξησης
   3. Αποκοπές δικτύων ροής

Ford-Fulkerson – ψευδοκώδικας

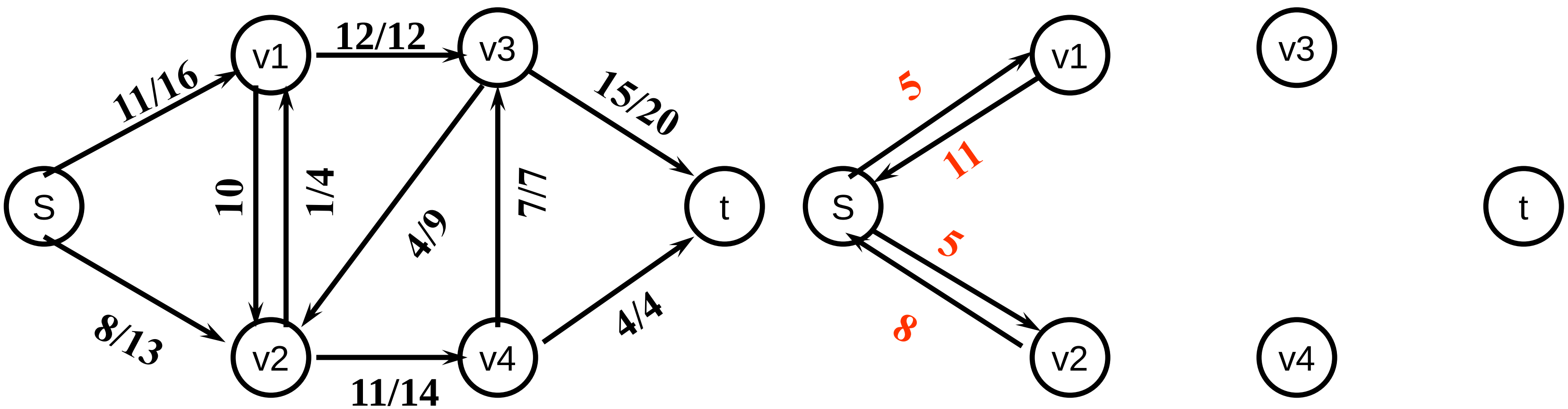
1. Αρχικοποίηση τιμής ροής f σε 0
2. Όσο υπάρχει διαδρομή επαύξησης p
3.   δώσε ροή f στη διαδρομή p
4. Επίστρεψε f

Ford Fulkerson – Υπολειπόμενα Δίκτυα Ι

- Το υπολειπόμενο δίκτυο G_f ενός δικτύου ροών G με νόμιμη ροή f αποτελείται από τις ίδιες κορυφές v ∈ V, όπως στο G, που συνδέονται με ακμές υπολοίπων (u,v) ∈ E_f που μπορούν να δεχθούν αυστηρά περισσότερη συνολική ροή.
- Η υπολειπόμενη χωρητικότητα c_f αναπαριστά το βάρος κάθε ακμής E_f και είναι η επιπρόσθετη συνολική ροή f(u,v) πριν ξεπερασθεί η χωρητικότητα c(u,v)

Ford Fulkerson – Υπολειπόμενα Δίκτυα II

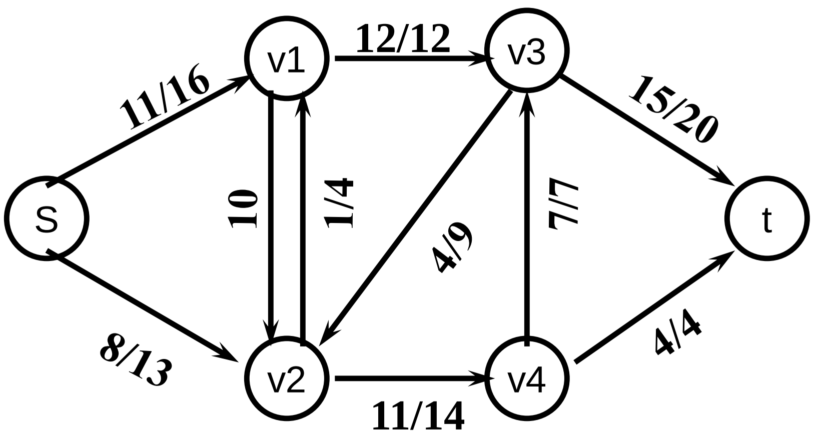
Δίκτυο ροών G = (V,E) Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V, E_f)$



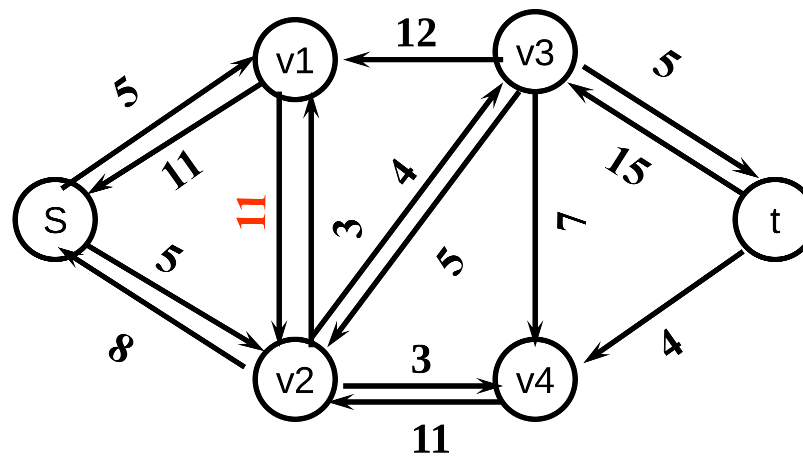
$c_f(u,v) = c(u,v) – f(u,v)$

Ford Fulkerson – Υπολειπόμενα Δίκτυα ΙΙΙ

Δίκτυο ροών G = (V,E)



Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$



$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

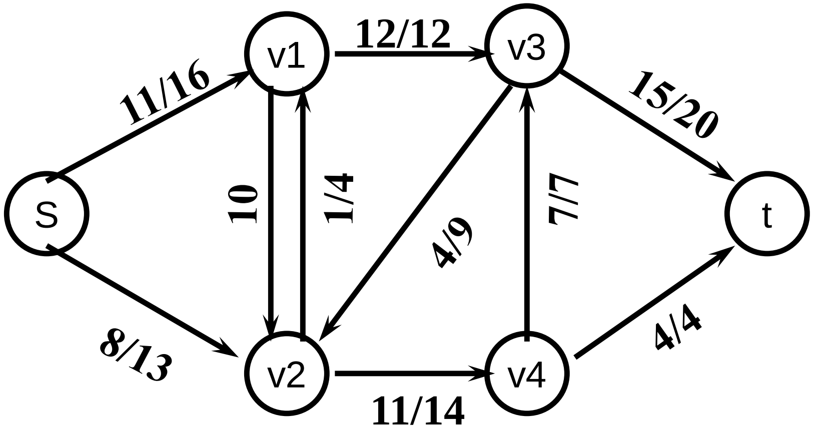
Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης Ι

- Ορισμός: Μία διαδρομή επαύξησης p είναι μία απλή (χωρίς κύκλους) διαδρομή από το s στο t στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f
- Υπολειπόμενη χωρητικότητα του p

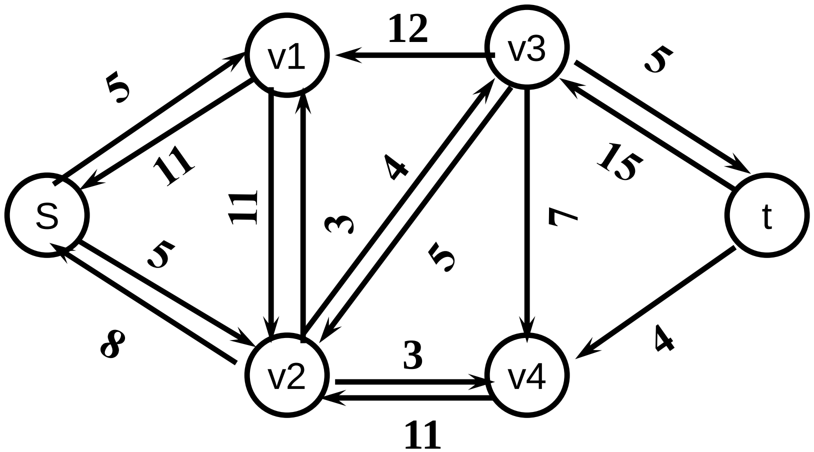
$$c_f(p) = \min\{c_f\,(u,v) : (u,v) \text{ ανήκει στο } p\}$$

Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης ΙΙ

Δίκτυο ροών G = (V,E)

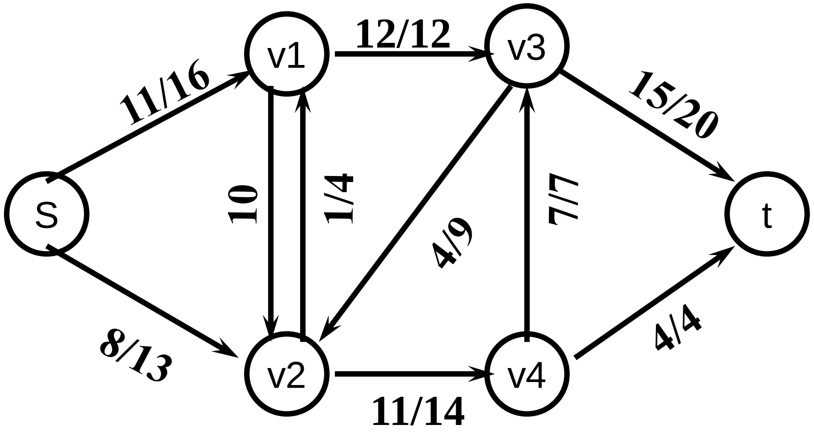


Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$

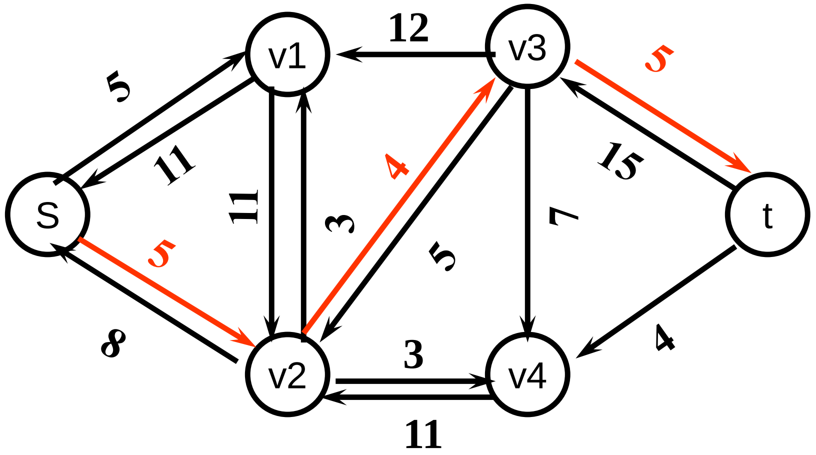


Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης ΙΙΙ

Δίκτυο ροών G = (V,E)



Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$



Διαδρομή Επαύξησης

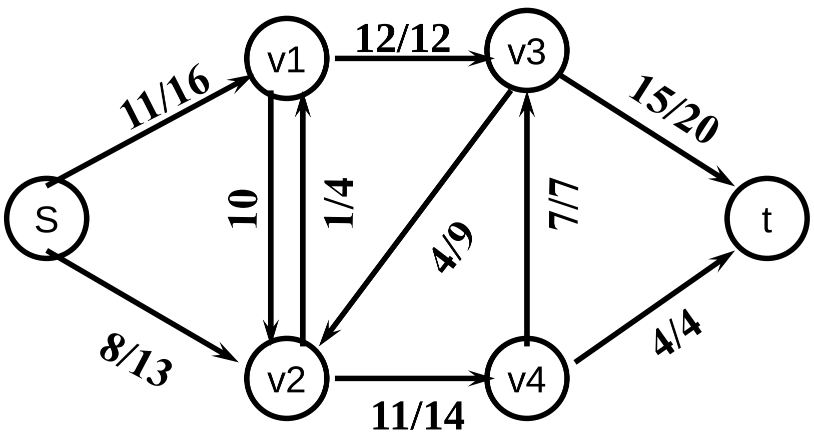
Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης IV

- Ορίζουμε μία ροή: fp: V x V → R έτσι ώστε:

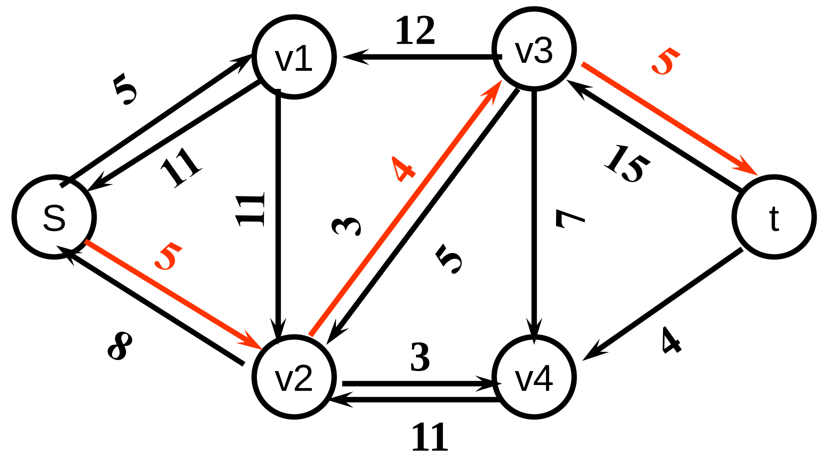
$$f_p(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} c_f(p)\ \alpha\nu\ (u,v)\ \alpha\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau o\ p \\ -c_f(p)\ \alpha\nu\ (v,u)\ \alpha\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau o\ p \\ 0\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{array} \right\}$$

Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης V

Δίκτυο ροών G = (V,E)

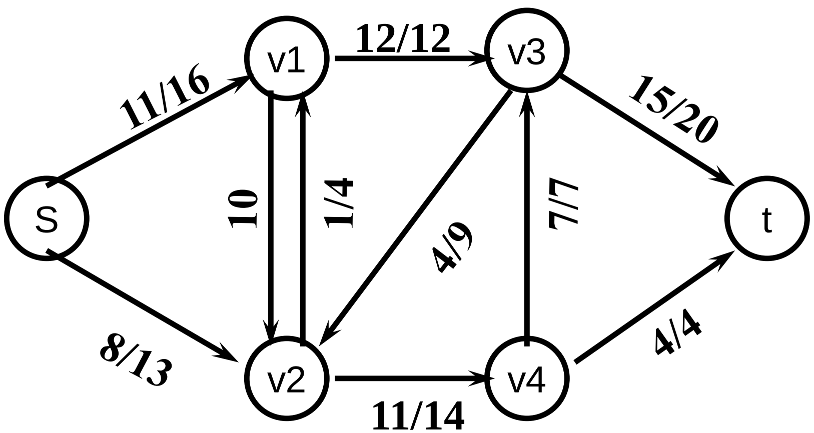


Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$

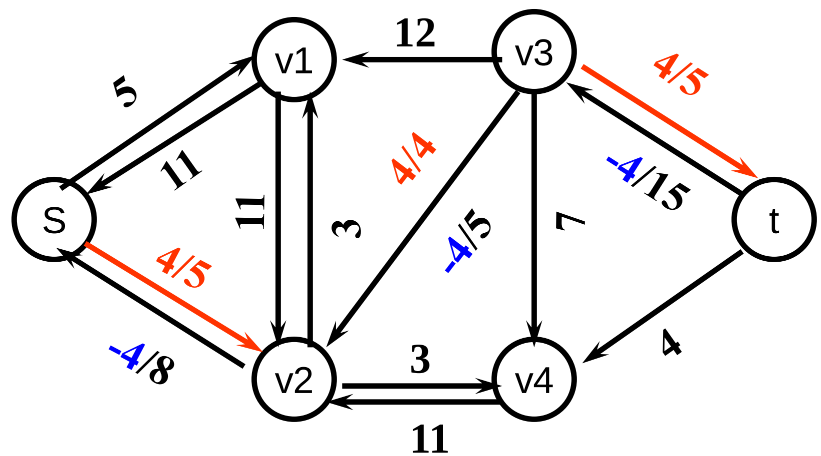


Ford Fulkerson – Διαδρομές Επαύξησης VI

Δίκτυο ροών G = (V,E)



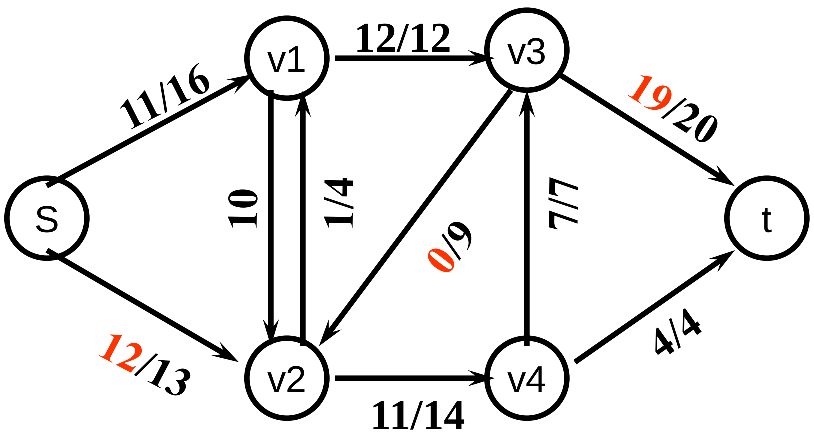
Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$



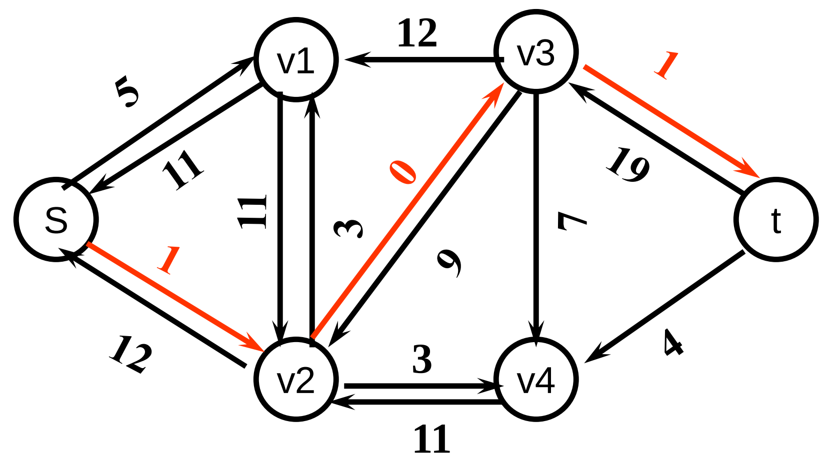
Η ιδεατή ροή f_p στη διαδρομή επαύξησης *p* στο G_f

Ford Fulkerson – Αυξάνοντας τη Ροή

Δίκτυο ροών G = (V,E)



Υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = (V,E_f)$



Νέα Ροή: $\boxed{f': V \times V \to R : \; f'=f + f_p}$

Η ιδεατή ροή f_p στη διαδρομή επαύξησης *p* στο G_f

Ford Fulkerson – Νέα ροή Περιορισμός Χωρητικότητας

<u>Λήμμα</u>:

$f' : V \times V \in R : \quad f' = f + f_p$ στο G

$c_f(p) = \min\{c_f(u,v): (u,v) \text{ is on } p\}$

$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

Περιορισμός χωρητικότητας:

Για κάθε $u,v \in V$, απαιτούμε $f(u,v) < c(u,v)$

- *Απόδειξη:*

$f_p(u,v) \leq c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

$\Rightarrow (f + f_p)(u,v) = f(u,v) + f_p(u,v) \leq c(u,v)$

Ford Fulkerson – Νέα ροή Συμμετρία

Λήμμα:

$f' : V \times V \in R$: $f' = f + f_p$ στο G

Συμμετρία:

Για κάθε $u,v \in V$, απαιτούμε $f(u,v) = -f(v,u)$

- *Απόδειξη:*

$(f + f_p)(u,v) = f(u,v) + f_p(u,v) = -f(v,u) - f_p(v,u) =$
$-(f(v,u) + f_p(v,u)) = -(f + f_p)(v,u)$

Ford Fulkerson – Νέα ροή Διατήρησης Ροής

<u>Λήμμα</u>:

f΄ : V x V ∈ R : f΄ = f + f_p στο G

Διατήρηση Ροής:

Για κάθε u ∈ V \ {s,t} : Σ f(u,v) = 0

- *Απόδειξη:*

$$u \in V - \{s,t\} \Rightarrow \sum_{v \in V} (f + f_p)(u,v) =$$

$$\sum_{v \in V} \left(f(u,v) + \right.$$

Ford Fulkerson – Αποκοπές Δικτύων Ροών

- Νέα έννοια: αποκοπή (S,T) ενός δικτύου ροών
- Μία αποκοπή (S,T) ενός δικτύου ροών G=(V,E) είναι μία διαμέριση του V σε S και T = V \ S έτσι ώστε $s \in S$ και $t \in T$.

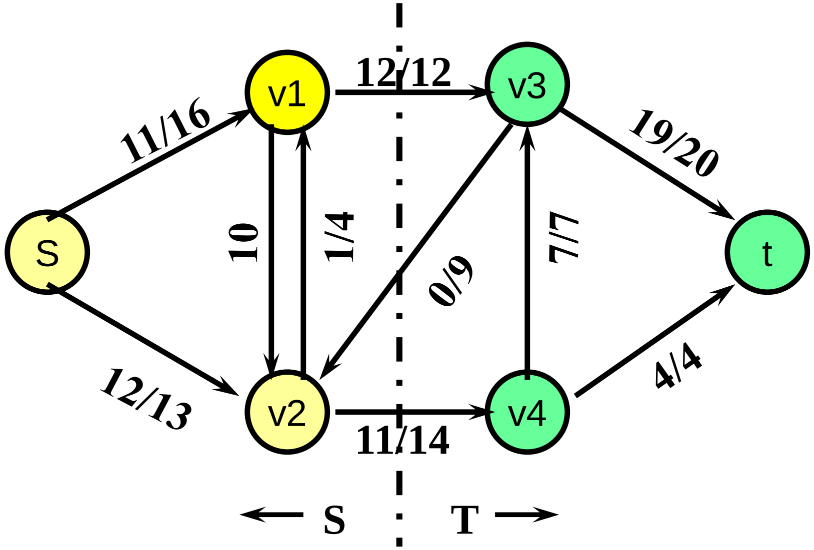
Ford Fulkerson – Αποκοπές Δικτύων Ροών Παράδειγμα

S = {s,v1,v2) , T = {v3,v4,t}

Συνολική ροή f(S ,T) =
f(v1,v3) + f(v2,v4) + f(v2,v3) =
12 + 11 + (-0) = 23

Χωρητικότητα c(S,T) =
c(v1,v3) + c(v2,v4) =
12 + 14 = 26

Με σημειογραφία αθροίσματος: $f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)$

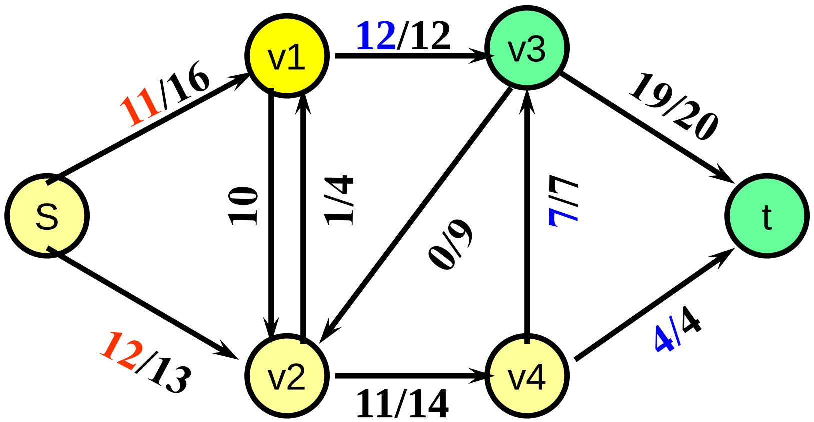


Ford Fulkerson – Αποκοπές Δικτύων Ροών Λήμμα

Λήμμα:

Η τιμή μίας ροής σε ένα δίκτυο είναι ίση με τη συνολική ροή σε οποιαδήποτε αποκοπή του δικτύου

f (S ,T) = | f |



Ford Fulkerson – Αποκοπές Δικτύων Ροών Λήμμα (Απόδειξη)

- Απόδειξη Λήμματος

f (S, T) = f (S, V\S)

= f (S, V) – f (S, S)

= f (S, V) = f (s ⍰ [S\s], V)

= f (s, V) + f (S\s, V)

= f (s, V) = | f |

Ford Fulkerson – Αποκοπές Δικτύων Ροών – Ιδιότητες Ρόων

- Ιδιότητες ροών:

$X,Y,Z \subseteq V$ and $X \cap Y = \varnothing$

$f(X, Y) = \sum \sum f(x, y)$

$f(X, X) = 0$

$f(X, Y) = - f(Y, X)$

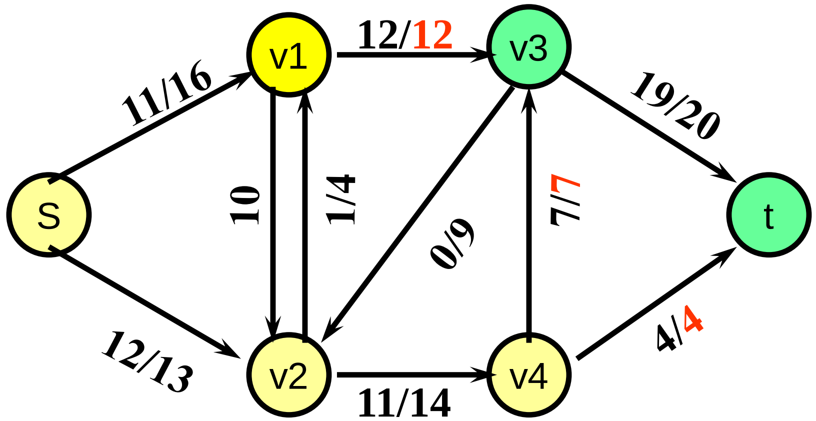
$f(u, V) = 0$ for all $u \in V \setminus \{s, t\}$

$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$

$f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$

Ford Fulkerson – Αποκοπές

Η τιμή κάθε ροής f σε ένα δίκτυο ροών G φράσσεται από επάνω από τη χωρητικότητα οποιασδήποτε αποκοπής του G



Λήμμα:

$| f | \leq c(S, T)$

Ford Fulkerson – Αποκοπές Λήμμα (Απόδειξη)

- Απόδειξη Λήμματος

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \le \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$
$$= c(S,T)$$

Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής

- Αν f είναι μία ροή στο δίκτυο G = (V,E) με πηγή s και προορισμό t, τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

  1. Η f είναι μέγιστη ροή στο G.
  2. Το υπολειπόμενο δίκτυο G_f δεν περιέχει διαδρομές επαύξησης.
  3. | f | = c (S, T) για <u>κάποια</u> αποκοπή (S, T) του G.

Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής (Απόδειξη Ι)

- *Απόδειξη:*

(1) $\Rightarrow$ (2):

Υποθέτουμε ότι η f είναι μέγιστη ροή στο G αλλά υπάρχει διαδρομή επαύξησης p στο G_f.

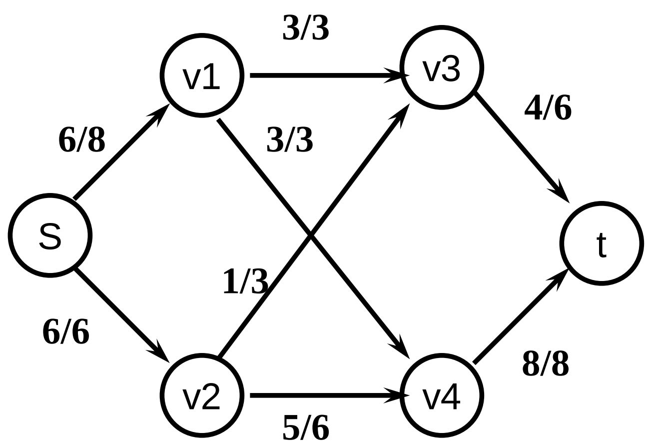
Τότε, μπορούμε να αυξήσουμε τη ροή στο G σύμφωνα με το τύπο : $f' = f + f_p$. Αυτό θα δημιουργούσε μία νέα ροή f΄ που θα ήταν αυστηρά μεγαλύτερη από την f που είναι αντίφαση μιας και η f είναι μέγιστη ροή.

Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής (Απόδειξη ΙΙ)

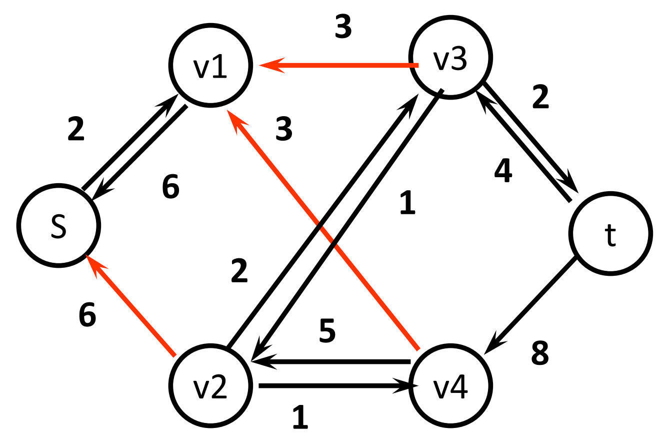
Απόδειξη:

(2) $\Rightarrow$ (3):

Αρχικό δίκτυο G



Υπολειπόμενο δίκτυο G_f



Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής (Απόδειξη ΙΙΙ)

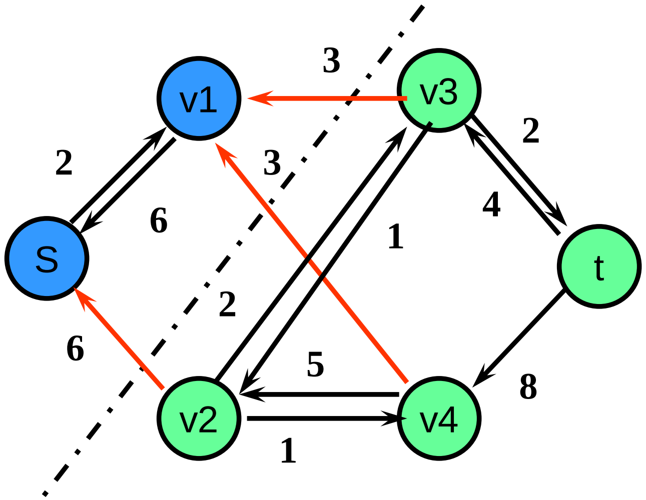
Απόδειξη:

(2) $\Rightarrow$ (3): Ορίζουμε

$S = \{v \in V \mid \exists$ διαδρομή p από s σε v στο $G_f\}$

$T = V \setminus S$ (το $t \notin S$ σύμφωνα με (2))

Υπολειπόμενο δίκτυο G_f



Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής (Απόδειξη IV)

Απόδειξη:

(2) $\Rightarrow$ (3): Ορίζουμε

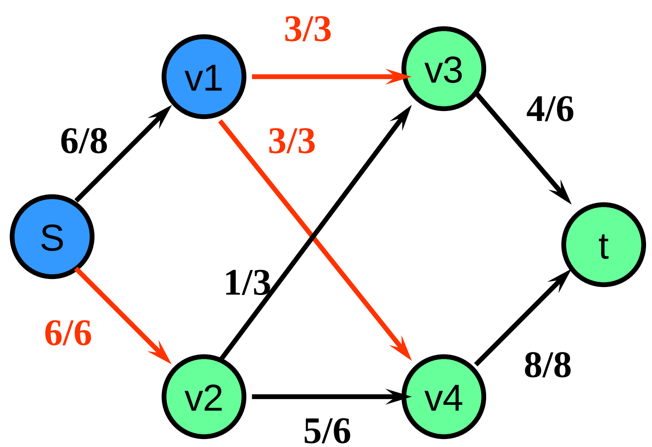
$S = \{v \in V \mid \exists$ διαδρομή p από s σε v στο $G_f \}$

$T = V \setminus S$ (το $t \notin S$ σύμφωνα με (2))

$\Rightarrow \forall\, u \in S, v \in T$: $f(u, v) = c(u, v)$ (διαφορετικά $(u, v) \in E_f$ και $v \in S$)

$\Rightarrow |f| = f(S, T) = c(S, T)$

Αρχικό δίκτυο G



Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Αποκοπής (Απόδειξη V)

- *Απόδειξη:*

(3) $\Rightarrow$ (1): όπως αποδείξαμε πριν $|f| = f(S, T) \leq c(S, T)$

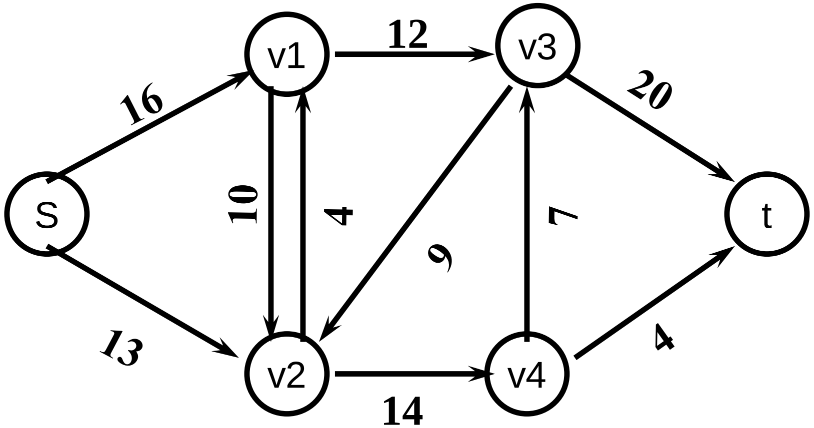
Το (3) ορίζει : $|f| = c(S, T)$ που σημαίνει ότι f είναι μέγιστη ροή

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson

1. **for** *each edge (u, v)* $\in$ *E [G]*
2.   **do** f [u, v] = 0
3.   f [v, u] = 0
4. **while** *there exists a path p from s to t in the residual network* G_f
5.   **do** c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}
6.   **for** *each edge (u, v) in p*
7.   **do** f [u, v] = f [u, v] + c_f (p)
8.   f [v, u] = - f [u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης I

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



for each edge (u, v) ∈ E [G]

  do f [u, v] = 0

    f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

  do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

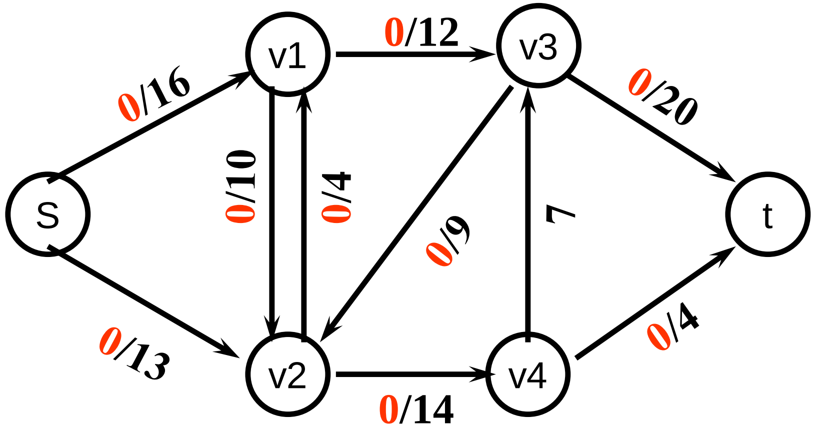
    for each edge (u, v) in p

      do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

      f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης ΙΙ

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



for each edge (u, v) ∈ E [G]

    do f [u, v] = 0

        f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

    do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

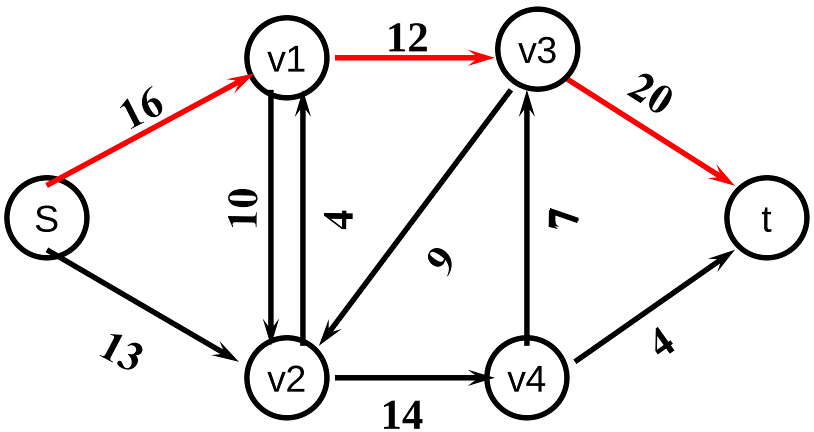
        for each edge (u, v) in p

            do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

            f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης ΙΙΙ

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



for each edge (u, v) ∈ E [G]

  do f [u, v] = 0

    f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

  do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

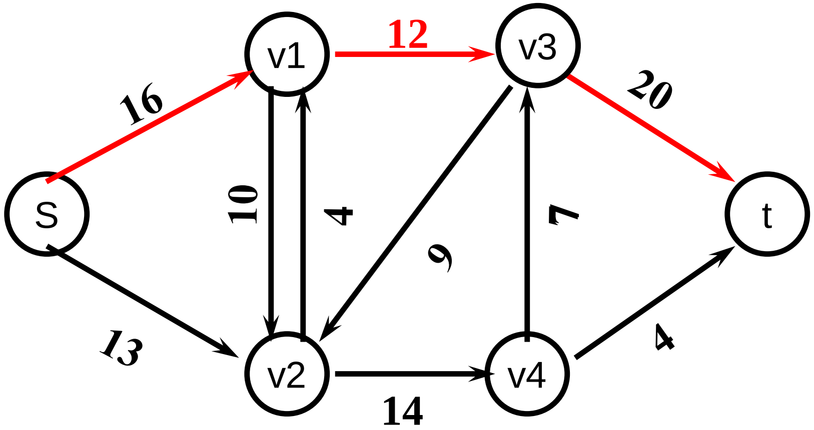
    for each edge (u, v) in p

      do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

      f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης IV

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

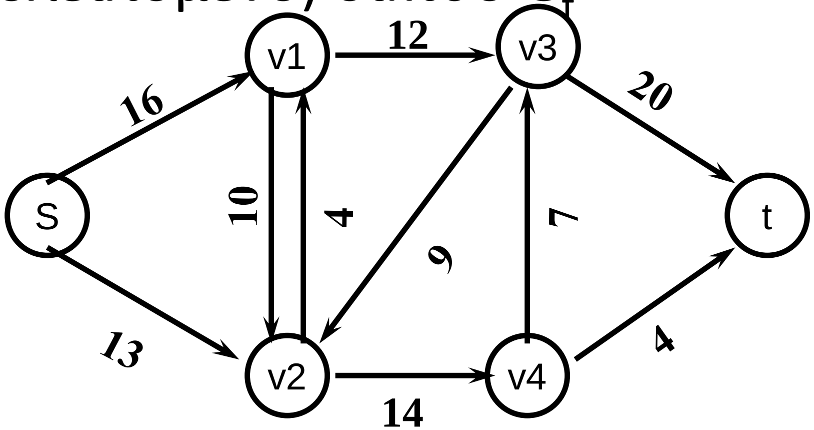
for each edge (u, v) in p

do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

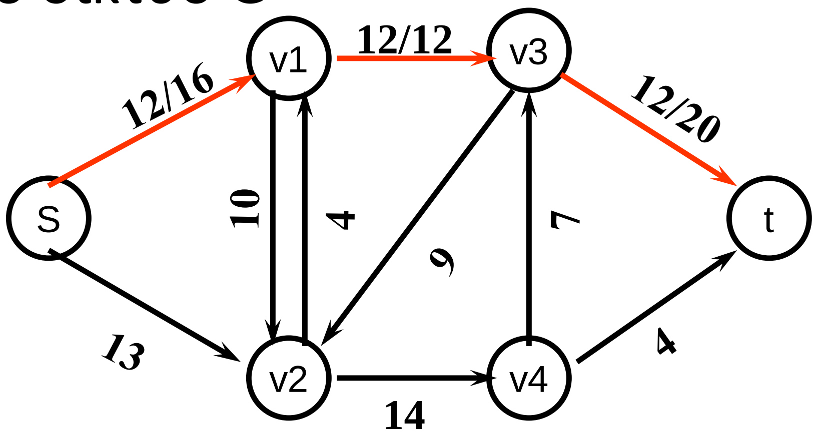
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης V

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



[..]

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

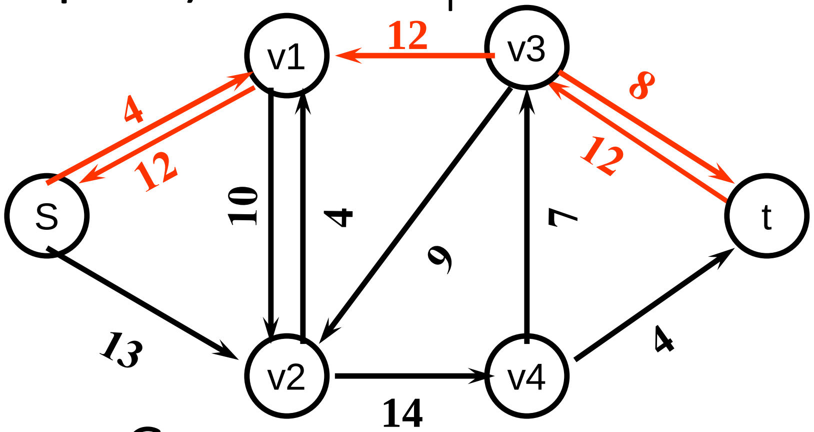
f [v, u] = - f[u, v]

Προσωρινή Μεταβλητή:

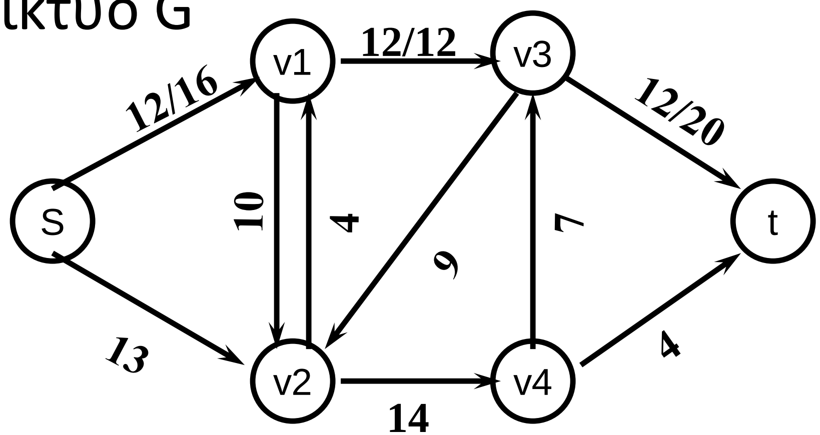
c_f (p) = 12

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης VI

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

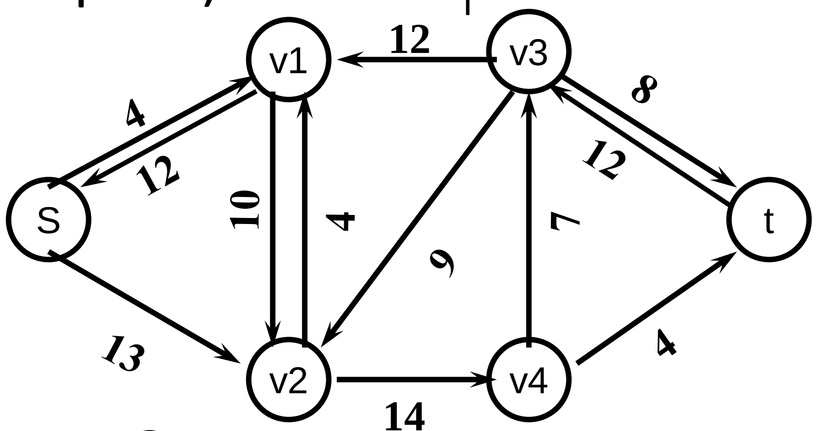
for each edge (u, v) in p

do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

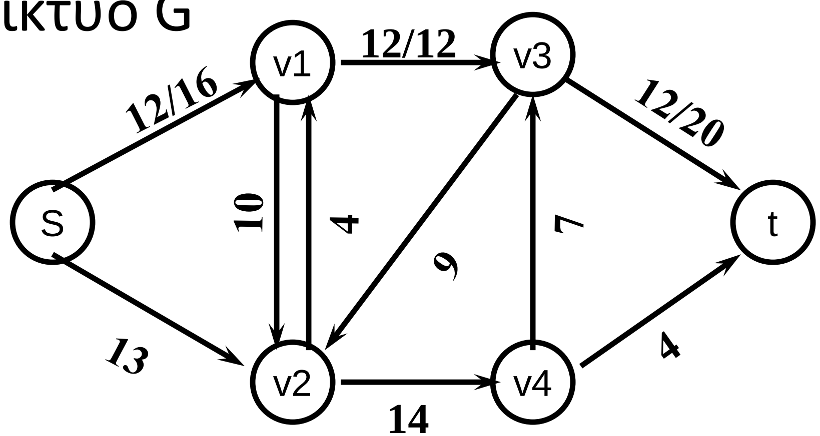
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης VII

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

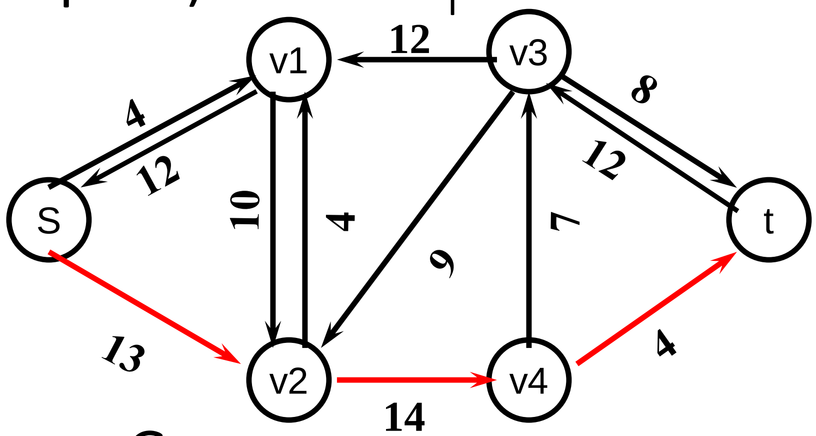
do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

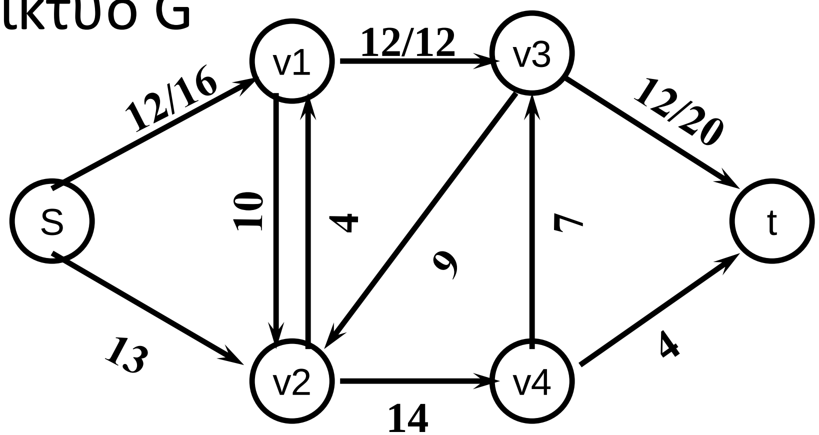
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης VIII

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

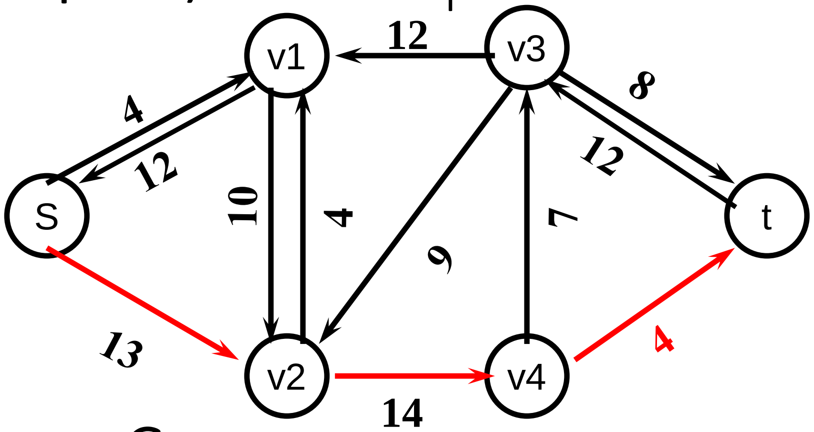
do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

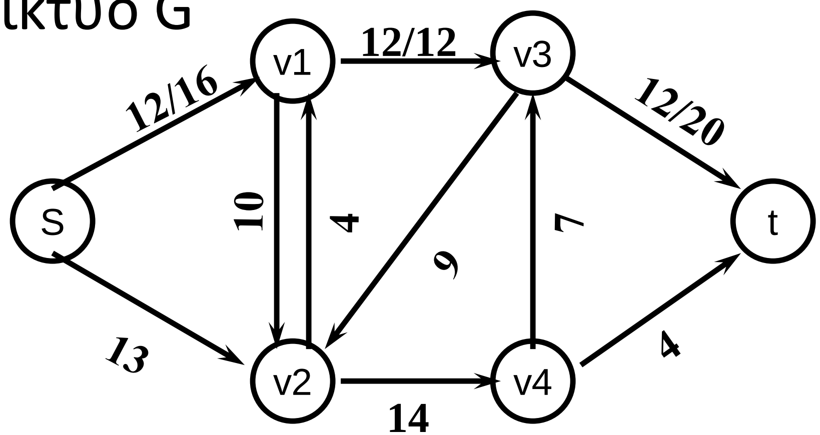
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης IX

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



[..]

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

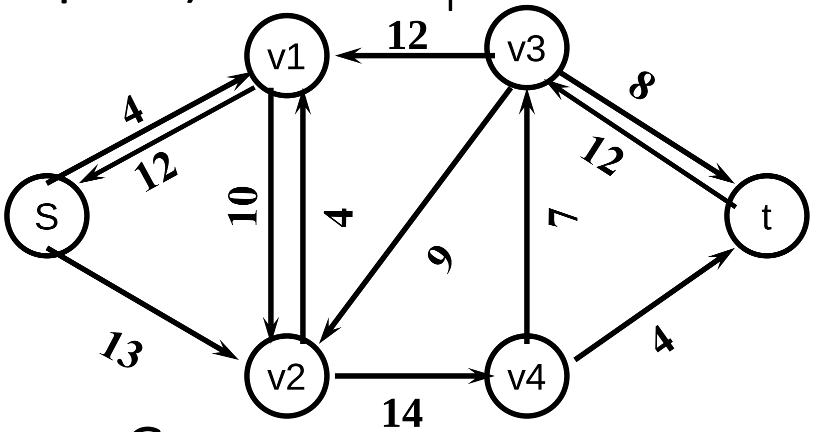
f [v, u] = - f[u, v]

Προσωρινή Μεταβλητή:

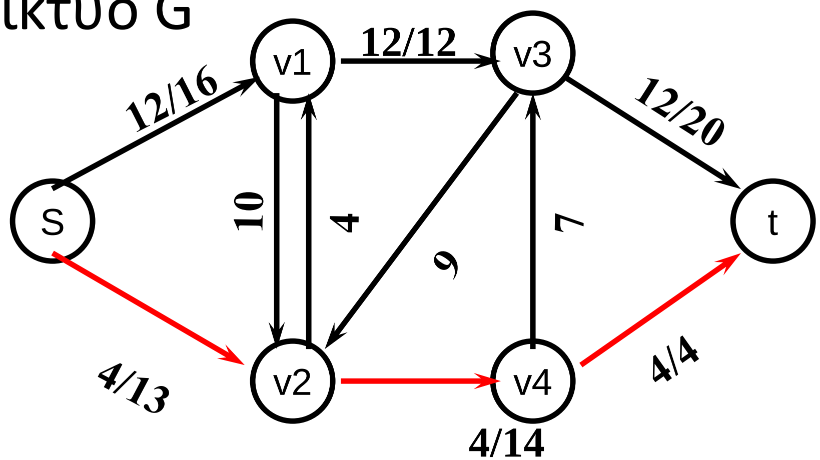
c_f (p) = 4

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης X

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



[..]

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

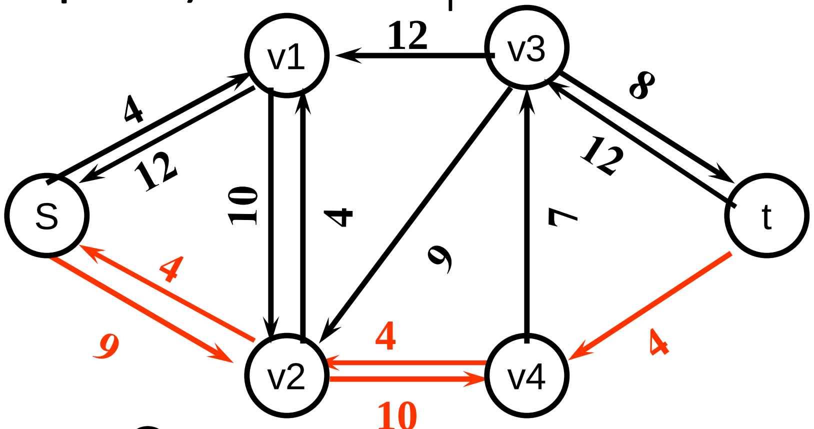
f [v, u] = - f[u, v]

Προσωρινή Μεταβλητή:

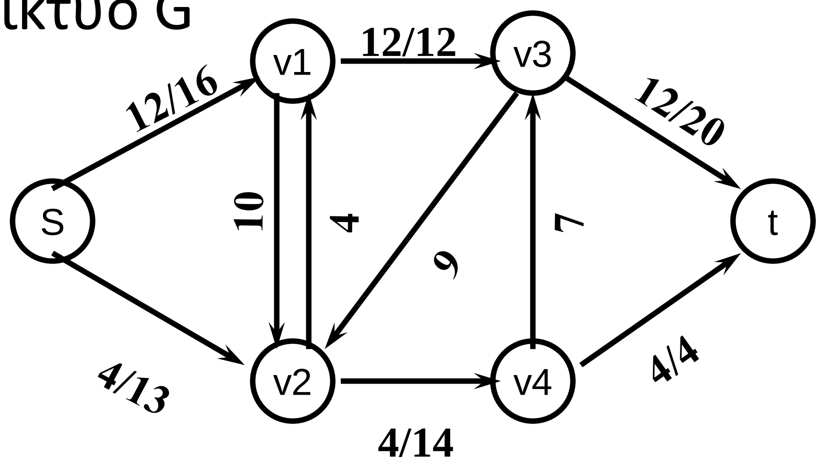
c_f (p) = 4

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XI

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

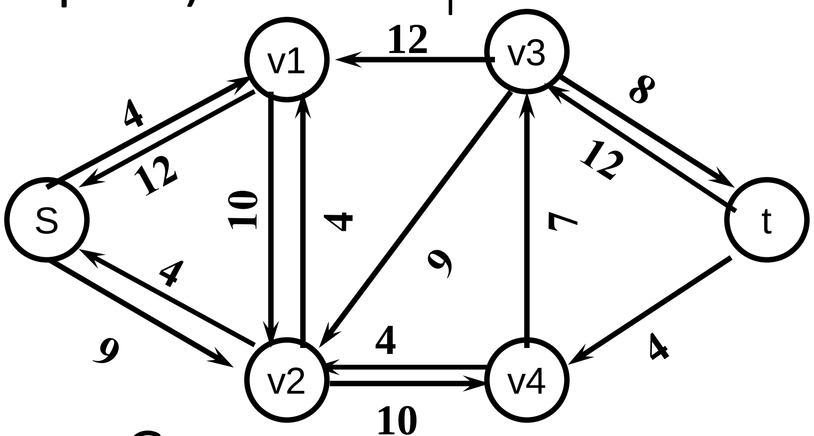
for each edge (u, v) in p

do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

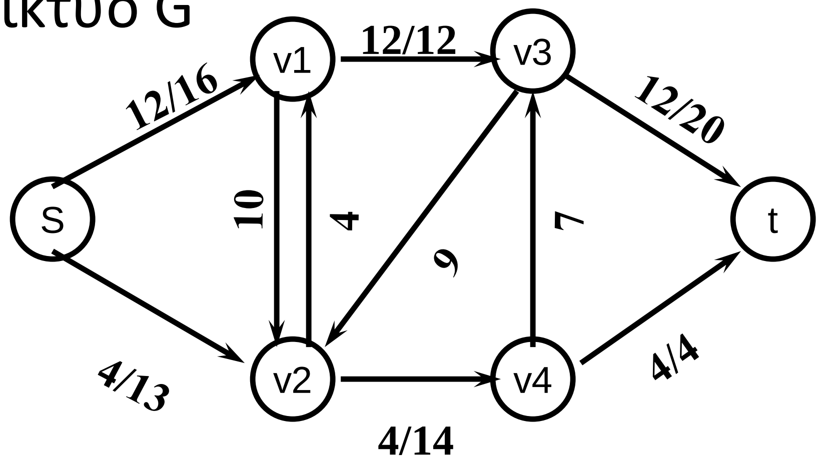
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XII

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

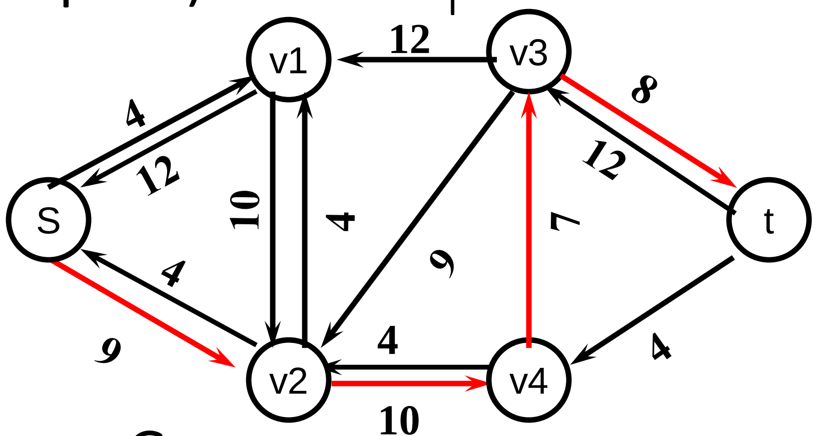
for each edge (u, v) in p

do f [u, v] = f [u,v] + c_f (p)

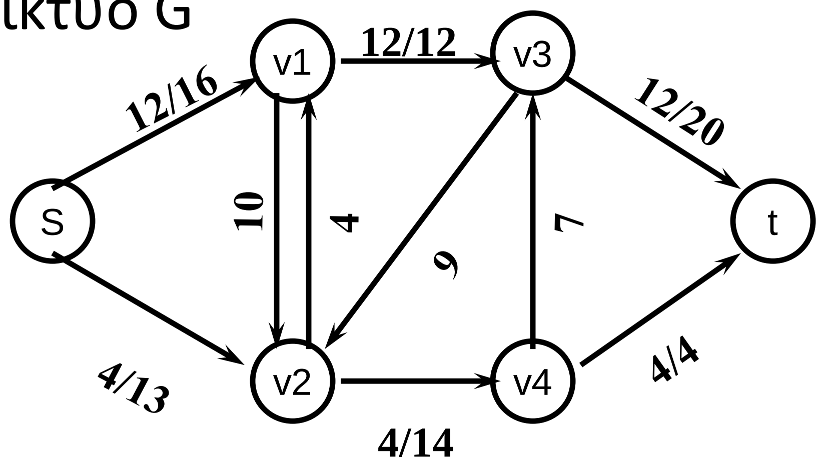
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XIII

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

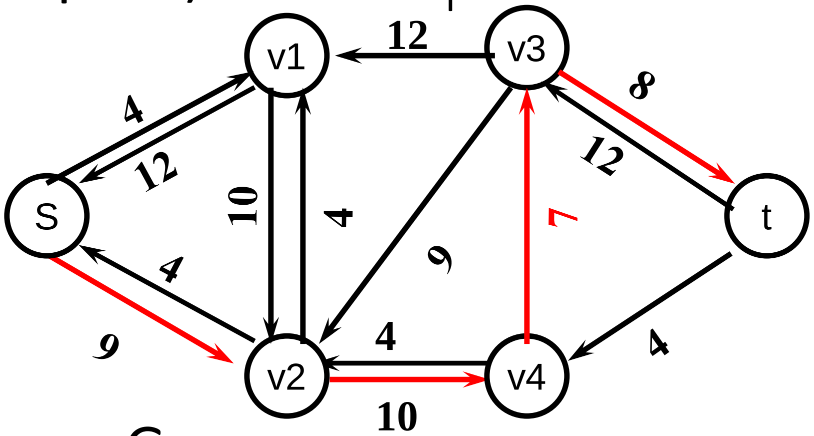
do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

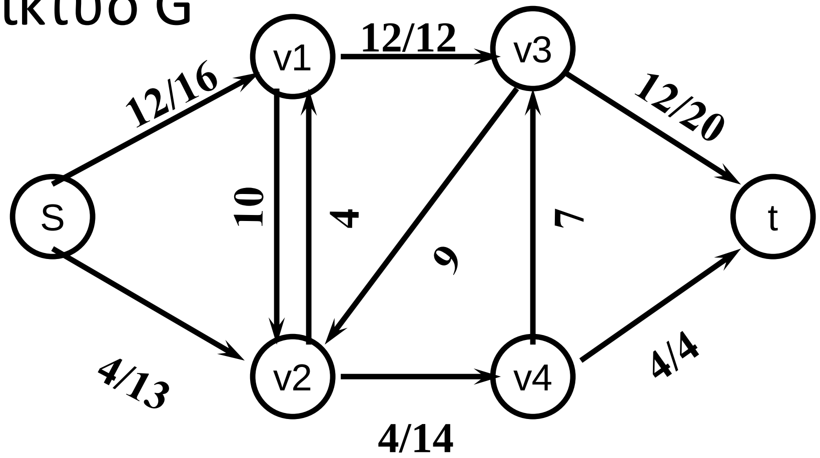
f [v, u] = - f[u, v]

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XIV

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



[..]

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

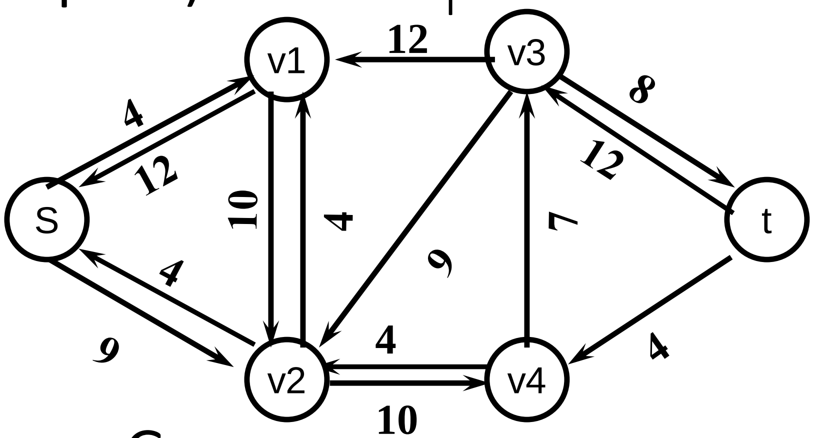
f [v, u] = - f[u, v]

Προσωρινή Μεταβλητή:

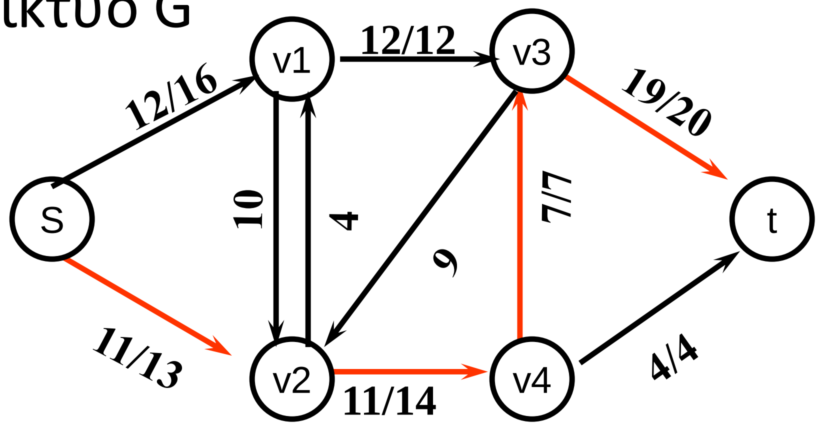
c_f (p) = 7

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XV

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



[..]

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

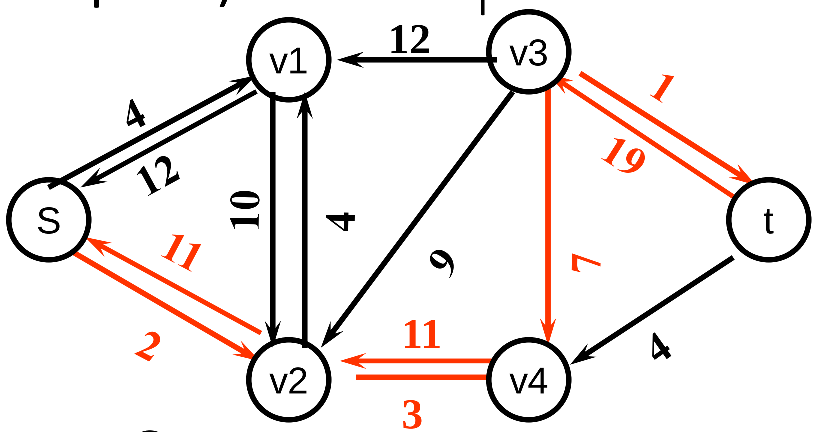
f [v, u] = - f[u, v]

Προσωρινή Μεταβλητή:

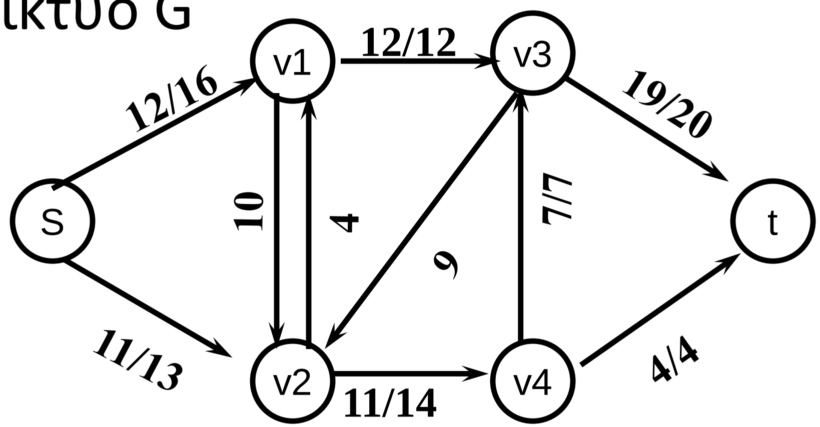
c_f (p) = 7

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XVI

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



for each edge $(u, v) \in E[G]$

do $f[u, v] = 0$

$f[v, u] = 0$

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v)$ is in p$\}$

for each edge (u, v) in p

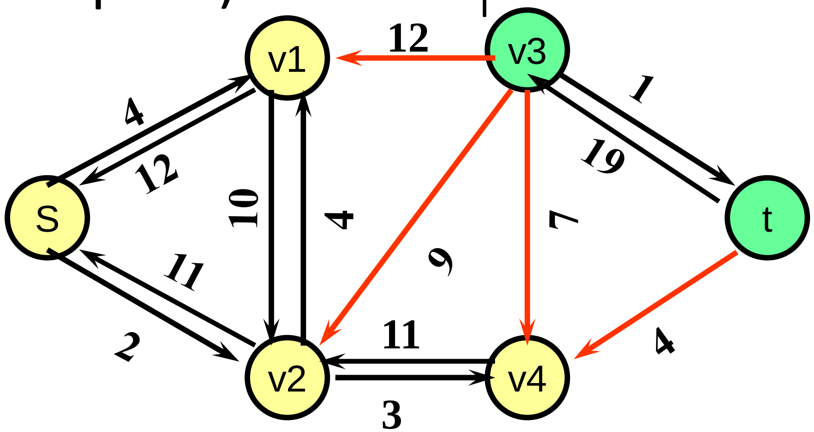
do $f[u, v] =$

$f[u,v] + c_f(p)$

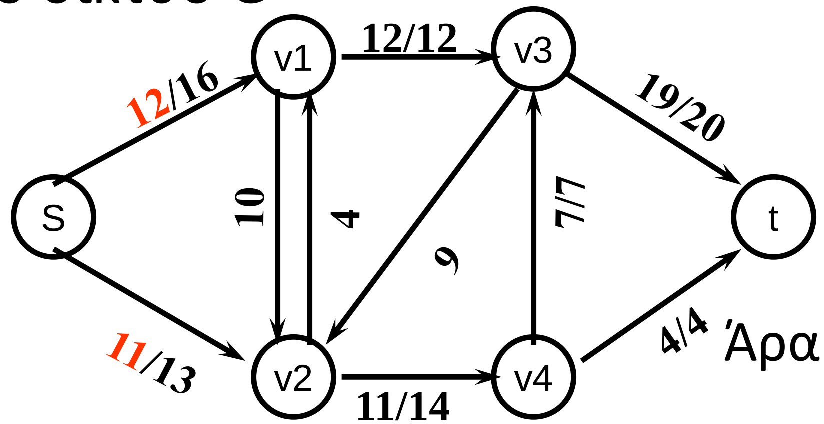
$f[v, u] = - f[u, v]$

Ο αλγόριθμος του Ford Fulkerson – Παράδειγμα Εκτέλεσης XVII

(υπολειπόμενο) δίκτυο G_f



Νέο δίκτυο G



Άρα:

$| f | = f (s, V) = 23$

for each edge (u, v) ∈ E [G]

do f [u, v] = 0

f [v, u] = 0

while there exists a path p from s to t in the residual network G_f

do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}

for each edge (u, v) in p

do f [u, v] =

f [u,v] + c_f (p)

f [v, u] = - f[u, v]

Ανάλυση

1. for each edge $(u, v) \in E[G]$
2. do $f[u, v] = 0$
3. $f[v, u] = 0$
4. while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
5. do $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ is in } p\}$
6. for each edge (u, v) in p
7. do $f[u, v] = f[u, v] + cf(p)$
8. $f[v, u] = -f[u, v]$

- Ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται από τον τρόπο ορισμού των αυξητικών μονοπατιών p στη γραμμή 4.

Ford Fulkerson – Ανάλυση I

- **Λήμμα**:

| (f + f_p) | = | f | + | f_p |

Η τιμή της ροής είναι πάντα ακέραιος αριθμός.

Τιμής ροής f: $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$

- Απόδειξη

$$|f + f_p| = \sum_{v \in V} (f + f_p)(s,v) = \sum_{v \in V} \left(f(s,v) + f_p(s,v) \right)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s,v) + \sum_{v \in V} f_p(s,v) = |f| + |f_p$$

Ford Fulkerson – Ανάλυση II

- Συνέπεια:

$f' : V \times V \rightarrow R : \quad f' = f + f_p$ στο G

$| (f + f_p) | = | f | + | f_p | > | f |$

- Το λήμμα δείχνει:

Αν μπορεί να βρεθεί μία διαδρομή επαύξησης τότε η αύξηση της ροής θα δώσει καλύτερη ροή.

Ανάλυση - Χρόνος Εκτέλεσης (αυθαίρετη επιλογή p) I

```
for each edge (u, v) ∈ E [G]
    do f [u, v] = 0                                         O(|E|)
        f [v, u] = 0
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
    do c_f (p) = min {c_f (u, v) | (u, v) is in p}          O(|E| |f_max|)
        for each edge (u, v) in p
            do f [u, v] = f [u, v] + cf (p)                 O(|E|)
                f [v, u] = - f [u, v]
```

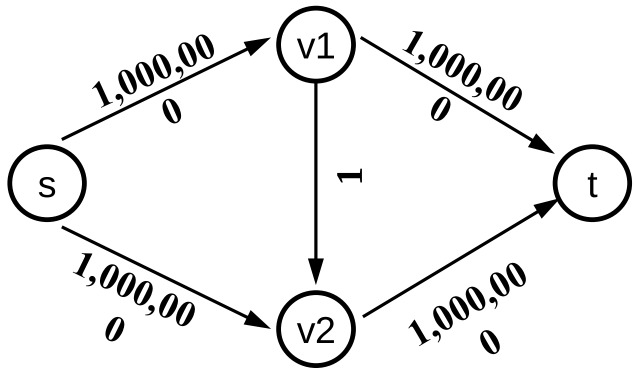
Χρόνος εκτέλεσης: O (|E| |fmax|) με fmax τη μέγιστη ροή

(1) Η διαδρομή επαύξησης επιλέγεται αυθαίρετα και όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι

Ανάλυση - Χρόνος Εκτέλεσης (αυθαίρετη επιλογή p) II

- Συνέπειες αυθαίρετης επιλογής:

Παράδειγμα αν |f*| είναι μεγάλο:



- Χρόνος εκτέλεσης: O (|E| $|f_{max}|$)

με f_{max} τη μέγιστη ροή

(1) Η διαδρομή επαύξησης επιλέγεται αυθαίρετα και όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι

Ανάλυση - Χρόνος Εκτέλεσης (αυθαίρετη επιλογή p) III

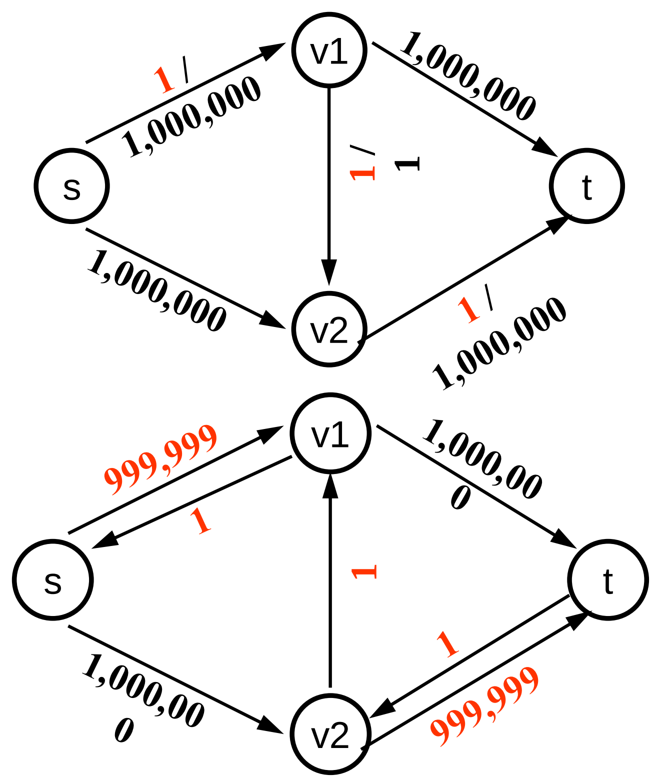
- Συνέπειες αυθαίρετης επιλογής:

Παράδειγμα αν |f*| είναι μεγάλο:

- Χρόνος εκτέλεσης: O(|E| $|f_{max}|$)

με f_{max} τη μέγιστη ροή

(1) Η διαδρομή επαύξησης επιλέγεται αυθαίρετα και όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι



Ανάλυση - Χρόνος Εκτέλεσης (αυθαίρετη επιλογή p) ΙΙΙ

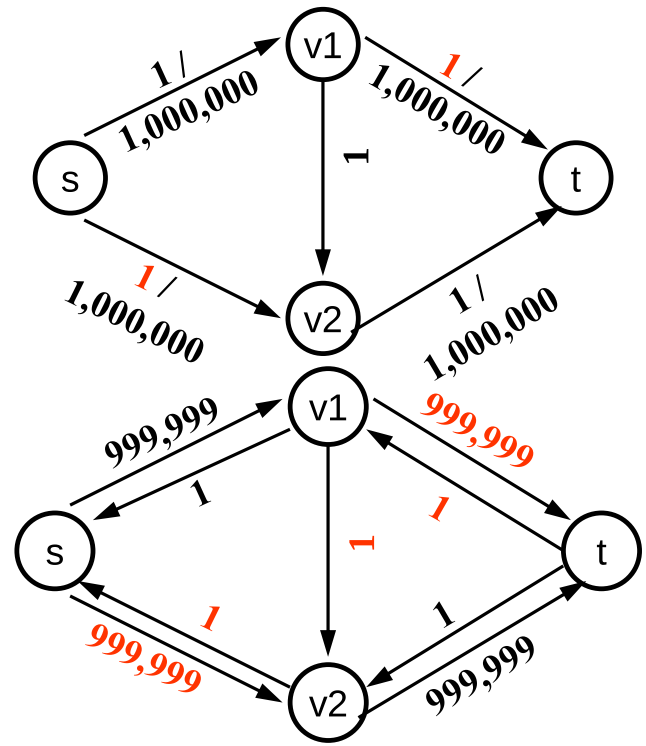
- Συνέπειες αυθαίρετης επιλογής:

Παράδειγμα αν |f*| είναι μεγάλο:

- Χρόνος εκτέλεσης:
  O (|E| $|f_{max}|$)

με f_{max} τη μέγιστη ροή

(1) Η διαδρομή επαύξησης επιλέγεται αυθαίρετα και όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι



Καλές Διαδρομές Επαύξησης Ι

- Προσοχή στην επιλογή των διαδρομών
  - Μερικές επιλογές (όπως πριν) οδηγούν σε εκθετικούς αλγόριθμους.
  - Έξυπνες επιλογές δίνουν πολυωνυμικούς αλγόριθμους.
  - Αν οι χωρητικότητες είναι άρρητοι, τότε ο αλγόριθμος μπορεί να μην τερματίσει!
- Στόχος: επιλογή διαδρομών ώστε:
  - Αποδοτική εύρεση των διαδρομών επαύξησης.
  - Λίγες επαναλήψεις.

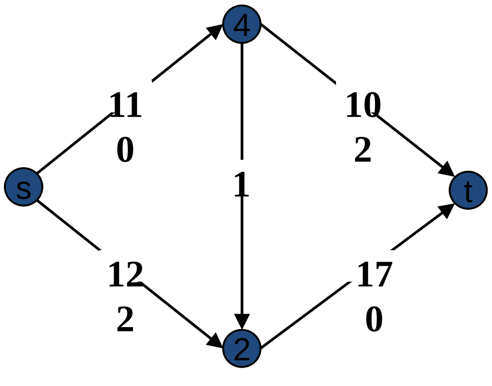
Καλές Διαδρομές Επαύξησης ΙΙ

- Επιλογή διαδρομών με: [Edmonds-Karp 1972, Dinitz 1970]
  - Μέγιστη υπολειπόμενη χωρητικότητα.
  - Αρκετά μεγάλη υπολειπόμενη χωρητικότητα.
  - Ελάχιστο πλήθος ακμών.

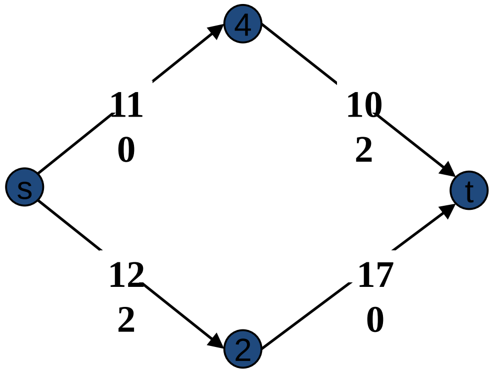
Κλιμάκωση Χωρητικότητας Ι

- Διαίσθηση: Η εύρεση της διαδρομής με μέγιστη υπολειπόμενη χωρητικότητα αυξάνει τη ροή κατά τη μέγιστη τιμή.
  - Δεν χρειάζεται να μπλέξουμε με το μέγιστο (δαπανηρό).
  - Παράμετρο κλιμάκωσης Δ.
  - Έστω G_f (Δ) ο υπογράφος του υπολειπόμενου γράφου με ακμές με χωρητικότητα τουλάχιστον Δ.

Κλιμάκωση Χωρητικότητας ΙΙ



G_f



$G_f\,(100)$

Κλιμάκωση Χωρητικότητας ΙΙΙ

```
Scaling-Max-Flow(G, s, t, c) {
  Για κάθε e ∈ E  f(e) ← 0
  Δ ← μεγαλύτερη δύναμη του 2 που είναι μικρότερη από τη μέγιστη
          χωρητικότητα ακμών που εξέρχονται του s
  G_f ← υπολειπόμενος γράφος
  while (Δ ≥ 1) {
    G_f(Δ) ← Δ-υπολειπόμενος γράφος
    while (υπάρχει διαδρομή επαύξησης P στο G_f(Δ)) {
      f ← augment(f, c, P)
      ενημέρωση G_f(Δ)
         }
    Δ ← Δ / 2
  }
  return f
}
```

Κλιμάκωση Χωρητικότητας: Ορθότητα

- Υπόθεση: Όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι στο [1,C].
- Αμετάβλητη Ιδιότητα: Όλες οι ροές και υπολειπόμενες χωρητικότητες είναι ακέραιοι.

Ορθότητα: Αν ο αλγόριθμος τερματίζει, τότε το f είναι μέγιστη ροή.

Απόδειξη:

i. Όταν $\Delta = 1 \Rightarrow G_f(\Delta) = G_f$.

ii. Όταν τερματίζει στην φάση $\Delta = 1$, τότε δεν υπάρχουν διαδρομές επαύξησης.

Κλιμάκωση Χωρητικότητας: Πολυπλοκότητα Ι

Λήμμα 1: Το εξωτερικό while επαναλαμβάνεται $1 + \lceil \log_2 C \rceil$ φορές.

Απόδειξη: Αρχικά $\Delta \leq C$. Το Δ υποδιπλασιάζεται σε κάθε επανάληψη.

Λήμμα 2: Έστω f η ροή στο τέλος μίας φάσης Δ-κλιμάκωσης. Τότε η μέγιστη τιμή συνολικής ροής είναι $| f | + m \cdot \Delta$.

Κλιμάκωση Χωρητικότητας: Πολυπλοκότητα ΙΙ

Λήμμα 3: Υπάρχουν το πολύ 2m επαυξήσεις σε κάθε φάση κλιμάκωσης.

- Έστω f η ροή στο τέλος της προηγούμενης φάσης κλιμάκωσης.
- Κάθε επαύξηση σε μία Δ-φάση κλιμάκωσης αυξάνει το | f | κατά $\geq \Delta$.
- Λήμμα 2 $\Rightarrow$ $| f^* | \leq | f | + m (2\Delta)$.

Θεώρημα: Ο αλγόριθμος μέγιστης ροής με κλιμάκωση ανακαλύπτει τη μέγιστη ροή σε O(m log C) επαύξησης. Μπορεί να υλοποιηθεί ώστε να τρέχει σε $O(m^2 \log C)$ χρόνο.

Κλιμάκωση Χωρητικότητας: Πολυπλοκότητα ΙΙΙ

Λήμμα 2: Έστω f η ροή στο τέλος μίας φάσης Δ-κλιμάκωσης. Τότε η μέγιστη τιμή συνολικής ροής είναι $|f| + m \cdot \Delta$.

Απόδειξη: (σχεδόν ίδια με το θεώρημα μέγιστης ροής ελάχιστης αποκοπής)

- Θα δείξουμε ότι στο τέλος της Δ-φάσης, υπάρχει αποκοπή (A, B) έτσι ώστε $c(A, B) \leq |f| + m \cdot \Delta$.
- Το A είναι το σύνολο κόμβων που φτάνει ο s στο $G_f(\Delta)$.
- $s \in A$.
- $t \notin A$.

Κλιμάκωση Χωρητικότητας: Πολυπλοκότητα IV

$$|f| = \sum_{e\ out\ of\ A} f(e) - \sum_{e\ in\ to\ A} f(e)$$

$$\geq \sum_{e\ out\ of\ A} (c(e) - \Delta) - \sum_{e\ in\ to\ A} \Delta$$

$$= \sum_{e\ out\ of\ A} c(e) - \sum_{e\ out\ of\ A} \Delta - \sum_{e\ in\ to\ A} \Delta(e)$$

$$\geq c(A, B) - m\Delta$$

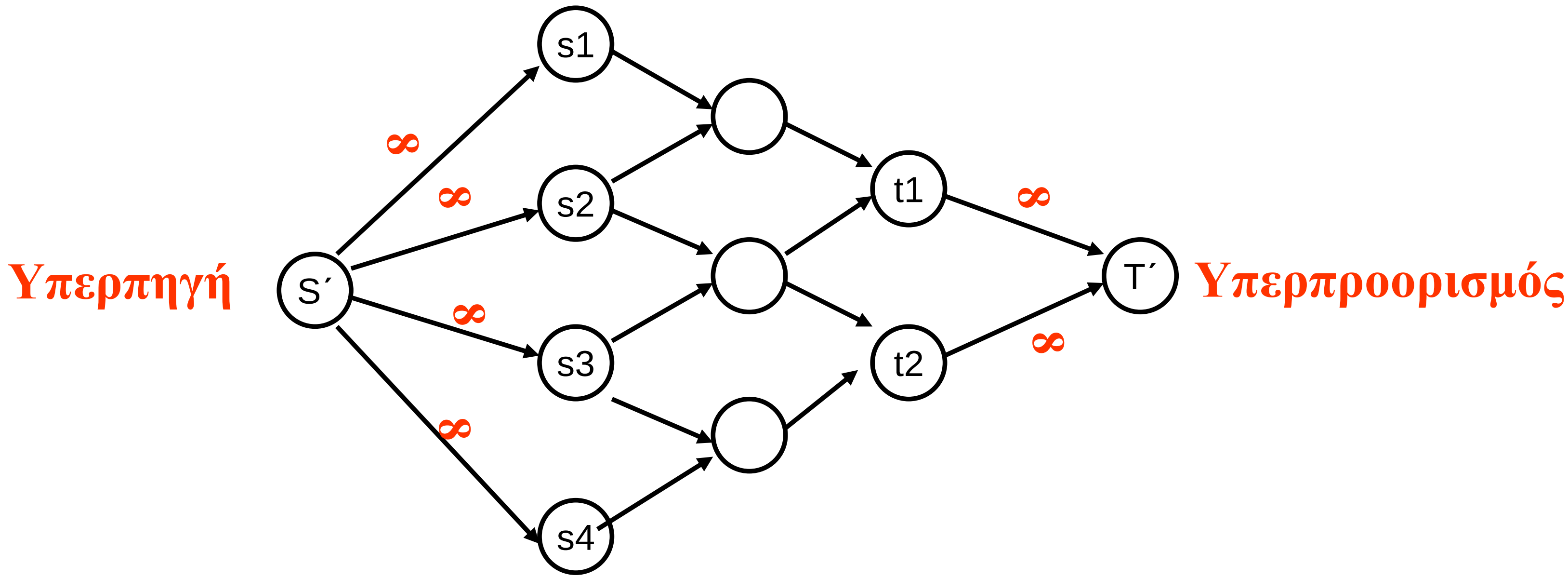
Πολυπλοκότητες

- Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson: O(m C) (Εκθετικός/Ψευδοπολυωνυμικός)
- Μέγιστη Ροή με Κλιμάκωση: $O(m^2 \log C)$ (Ασθενώς πολυωνυμικός)
- Edmonds-Karp (συντομότερες διαδρομές ως διαδρομές επαύξησης): $O(nm^2)$ (ισχυρά πολυωνυμικός)

Παραλλαγές Μέγιστης Ροής

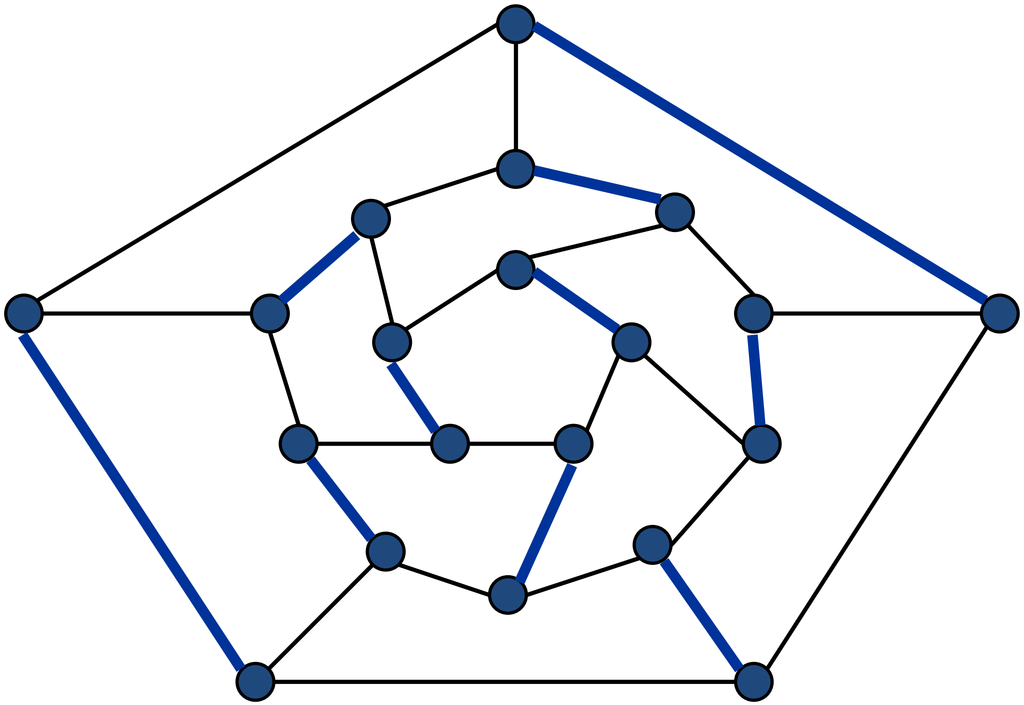
- Μία 2η συνάρτηση χωρητικότητας για κάτω φράγμα με $b(u,v) < f(u,v) < c(u,v)$
- Μία συνάρτηση κόστους όπου κάθε ακμή (u,v) έχει και ένα δεύτερος βάρος cost(u,v) και έχουμε το πρόβλημα μέγιστης ροής ελαχίστου κόστους
- Δίκτυα με πολλαπλές πηγές και προορισμούς

Πολλαπλές Πηγές και Προορισμοί

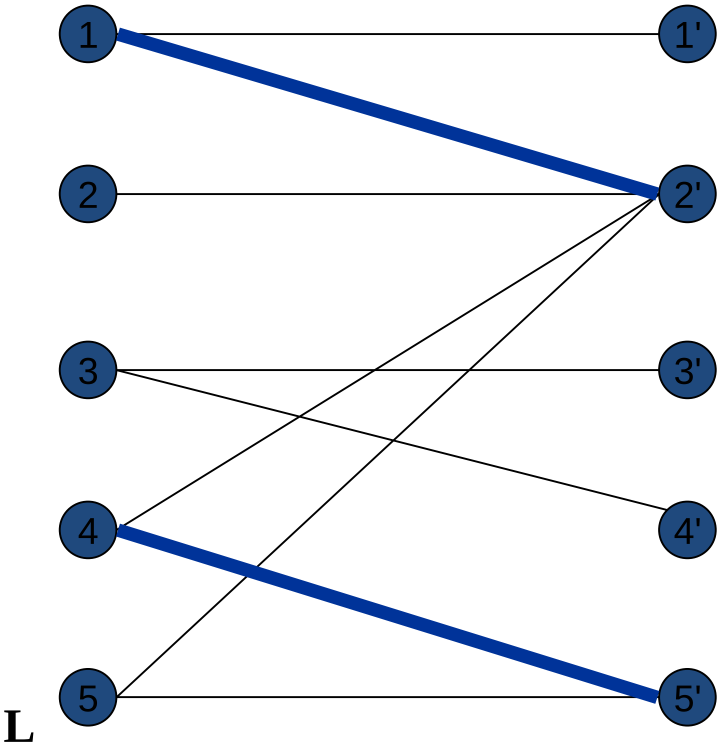


Ταίριασμα

- Είσοδος: μη κατευθυνόμενος γράφος G = (V, E).
- M $\subseteq$ E είναι ένα ταίριασμα αν κάθε κόμβος εμφανίζεται σε μία το πολύ ακμή του M.
- Μέγιστο Ταίριασμα: εύρεση ταιριάσματος μέγιστου πλήθους ακμών.



Διμερές Ταίριασμα Ι



ταίριασμα

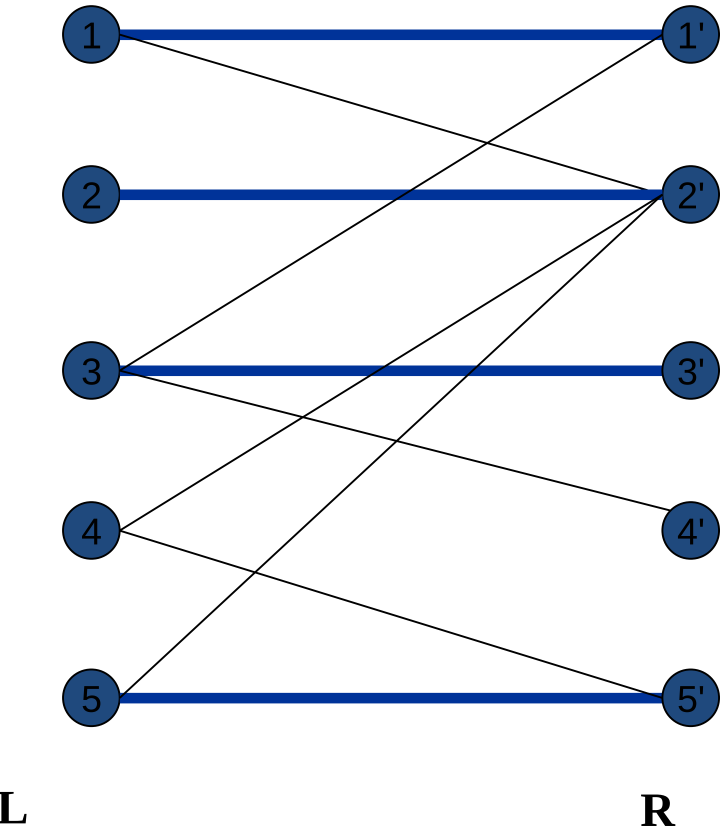
1-2',

3-1',

4-5'

- Είσοδος: μη κατευθυνόμενος διγράφος G = (L∪R, E).
- M ⊆ E είναι ένα ταίριασμα αν κάθε κόμβος εμφανίζεται σε μία το πολύ ακμή του M.
- Μέγιστο Ταίριασμα: εύρεση ταιριάσματος μέγιστου πλήθους ακμών.

Διμερές Ταίριασμα ΙΙ



<u>ταίριασμα</u>

1-1',

2-2',

3-3΄,

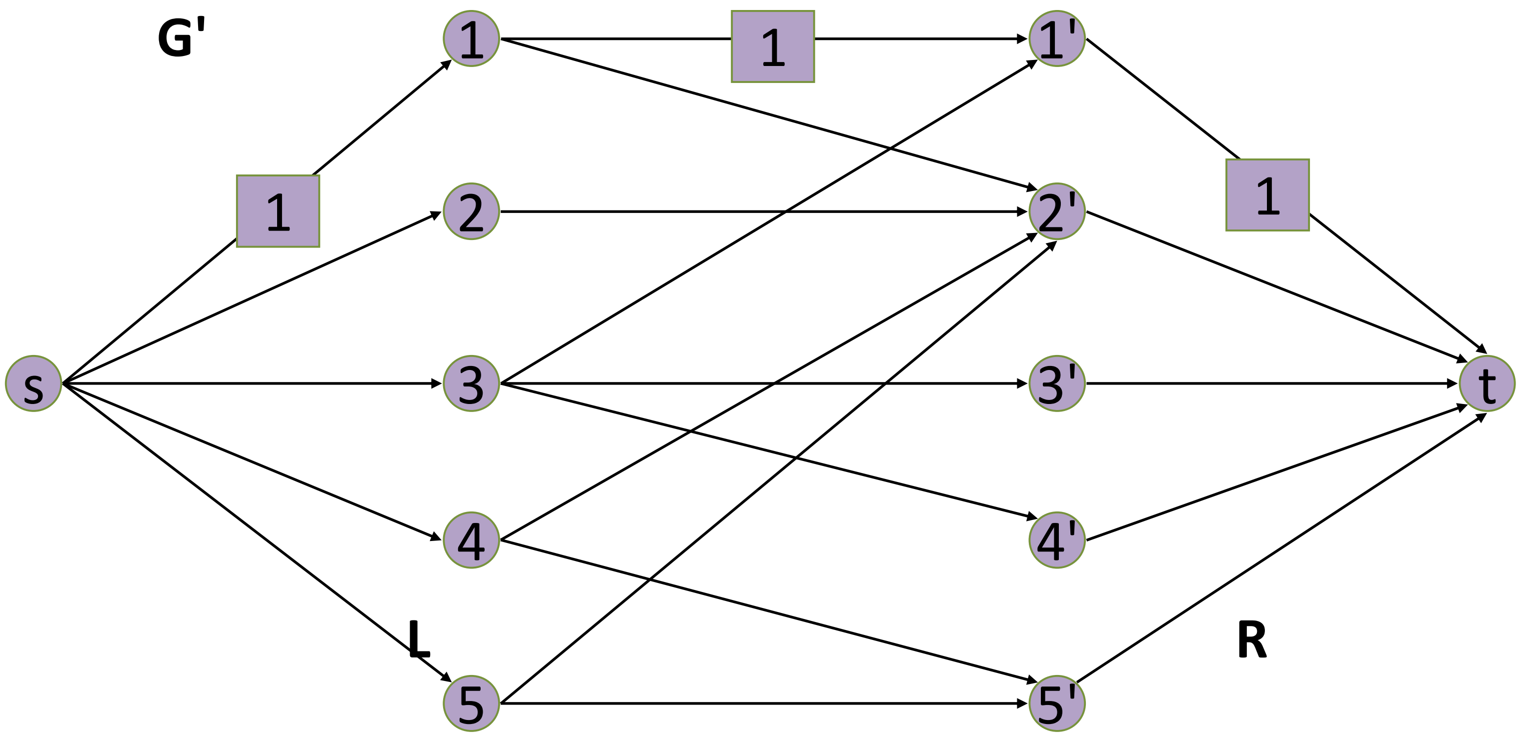
4-4'

- Είσοδος: μη κατευθυνόμενος διγράφος G = (L∪R, E).
- M ⊆ E είναι ένα ταίριασμα αν κάθε κόμβος εμφανίζεται σε μία το πολύ ακμή του M.
- Μέγιστο Ταίριασμα: εύρεση ταιριάσματος μέγιστου πλήθους ακμών.

Διμερές Ταίριασμα III

- Χρήση Μέγιστης Ροής.
  - Κατασκευή κατευθυνόμενου γράφου $G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$.
  - Όλες οι ακμές θα δείχνουν από το L στο R, και δώσε χωρητικότητα 1 σε κάθε μία.
  - Πρόσθεση πηγής s, με ακμές προς L με χωρητικότητα 1.
  - Πρόσθεση προορισμού t, με ακμές από R με χωρητικότητα 1.

Διμερές Ταίριασμα IV



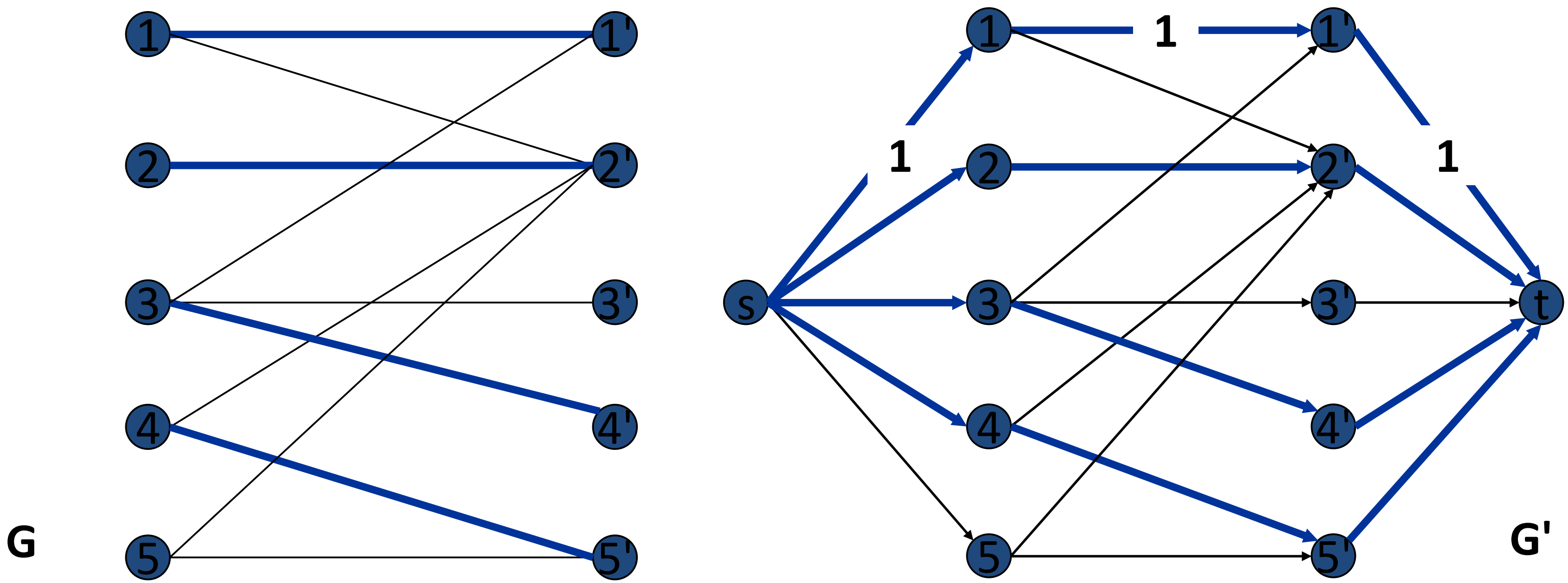
Διμερές Ταίριασμα: Ορθότητα Ι

Θεώρημα: Μέγιστο Ταίριασμα στο G = τιμή μέγιστης ροής στο G'.

Απόδειξη: ≤

– Δοθέντος μέγιστου ταιριάσματος Μ μεγέθους k.
– Έστω η ροή που στέλνω 1 μονάδα από αυτές τις k διαδρομές.
– Η f είναι μία ροή και έχει τιμή k.

Διμερές Ταίριασμα: Ορθότητα ΙΙ



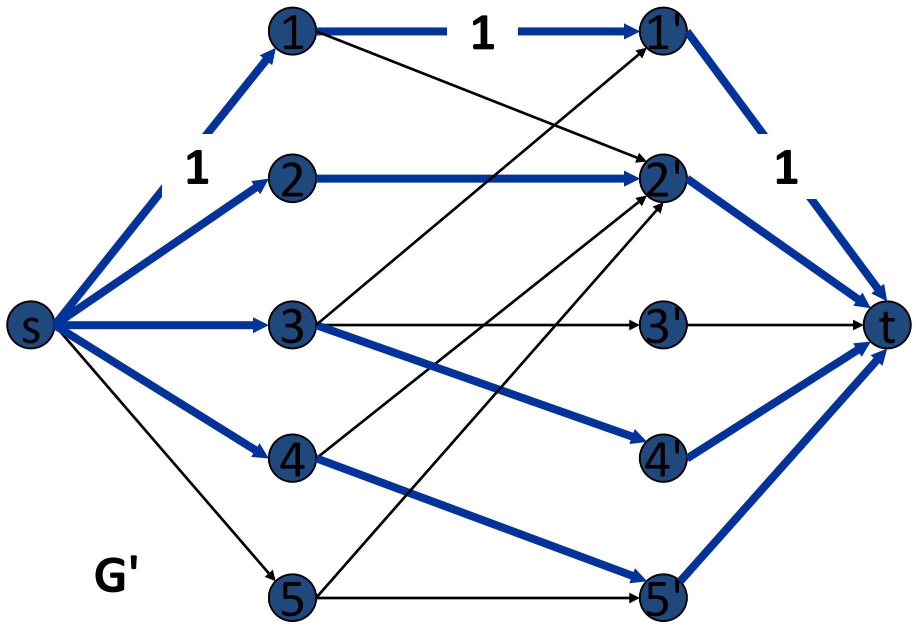
Διμερές Ταίριασμα: Ορθότητα ΙΙΙ

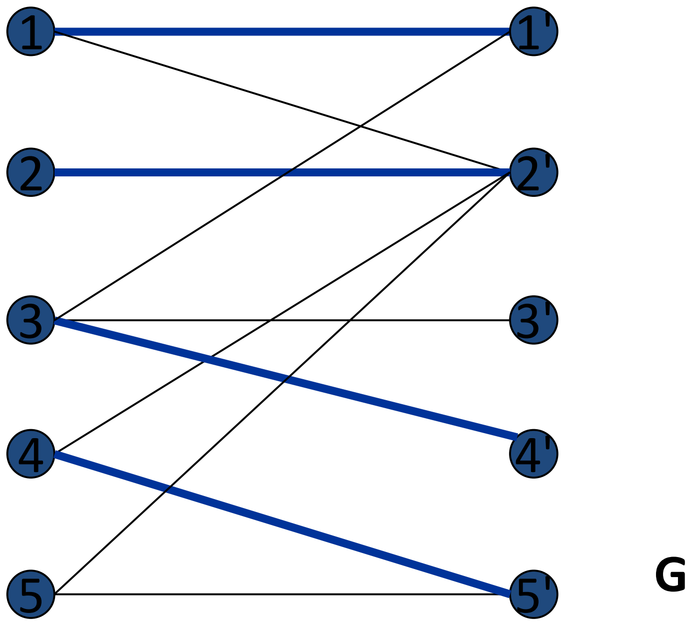
Θεώρημα: Μέγιστο Ταίριασμα στο G = τιμή μέγιστης ροής στο G'.

Απόδειξη. $\geq$

- Έστω f η μέγιστη ροή στο G' με τιμή k.
- Το k είναι ακέραιος και η ροή σε κάθε ακμή είναι 0-1.
- M = σύνολο ακμών e από το L στο R με f(e) = 1.
  - Κάθε κόμβος στο L και R συμμετάσχει σε το πολύ μία ακμή του M
  - $|M| = k$: θεωρήστε την αποκοπή $(L \cup s, R \cup t)$

Διμερές Ταίριασμα: Ορθότητα IV





Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ιωάννης Μανωλόπουλος. «Αλγοριθμική Θεωρία Γράφων. Προβλήματα Ροών σε Δίκτυα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS264/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.