ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **2**: Εισαγωγή (Ορισμοί)

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

Ορισμοί

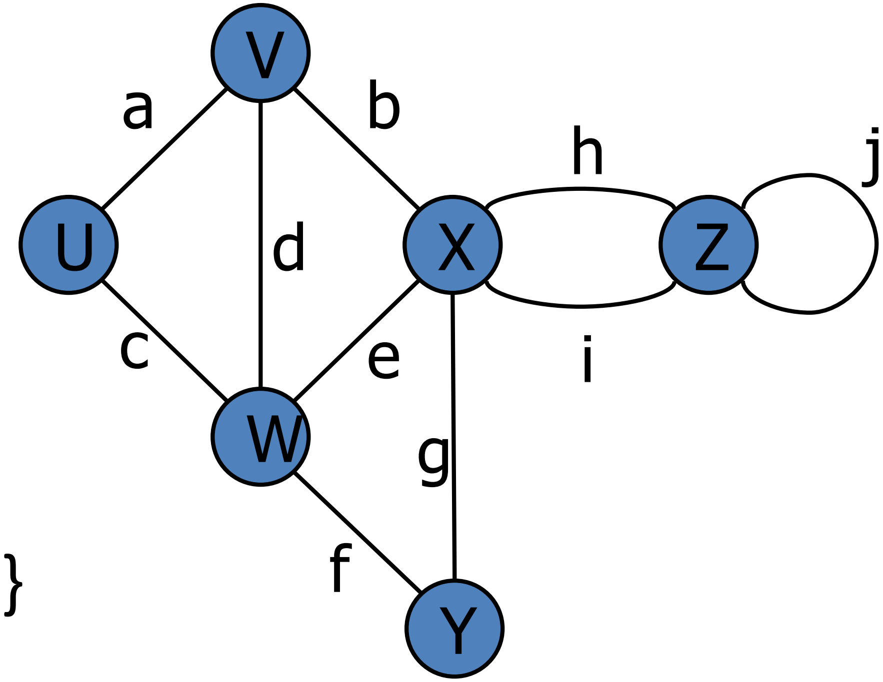
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Ορισμοί Γράφων
- Βασικά Θεωρήματα της Θεωρίας Γράφων

Τι είναι γράφος;

- Ορισμός: σύνολο κορυφών (ή κόμβων) που συνδέονται με ένα σύνολο ακμών
- Συμβολισμός: G(V,E), G=(V,E), (V(G),E(G))
- V={U, V, W, X, Y, Z}
- E={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}



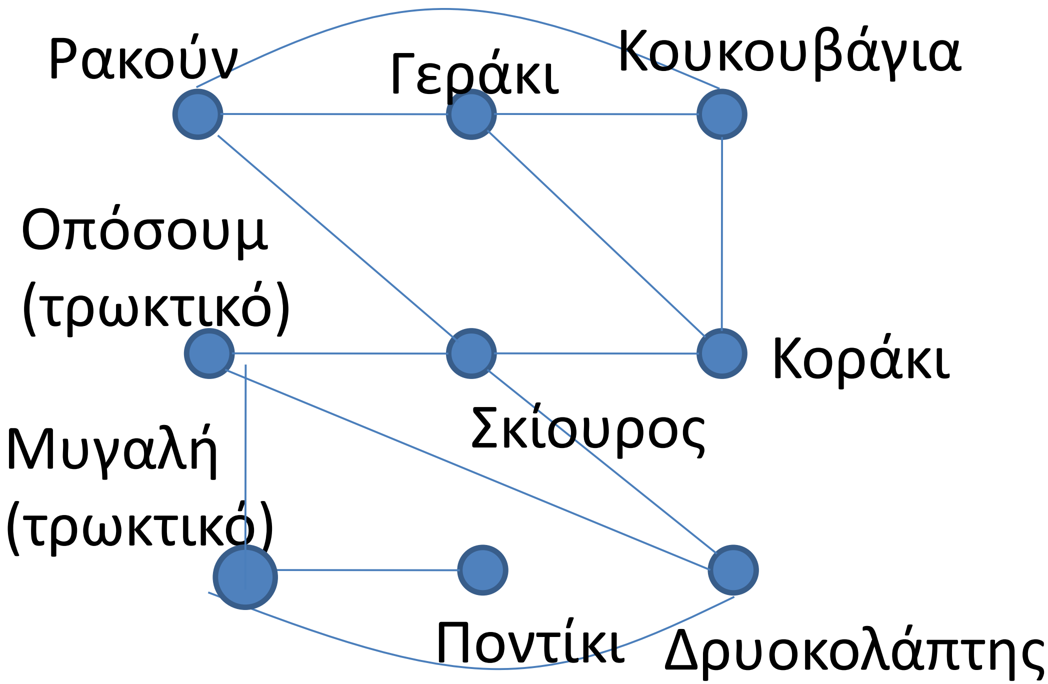
Ορισμοί

- τάξη-order, n, το πλήθος των κορυφών: $n=|V|$
- μέγεθος-size, m, το πλήθος των ακμών: $m=|E|$
- γράφος λέγεται αραιός-sparse αν $m \approx n$
- γράφος λέγεται πυκνός-dense αν $m \approx n^2$.
- γράφος λέγεται πεπερασμένος-finite, αν n,m πεπερασμένα
- γράφος λέγεται άπειρος-infinite, αλλιώς
- Ειδικές περιπτώσεις: $n=0$: κενός-empty

  $n=1$: ασήμαντος-trivial

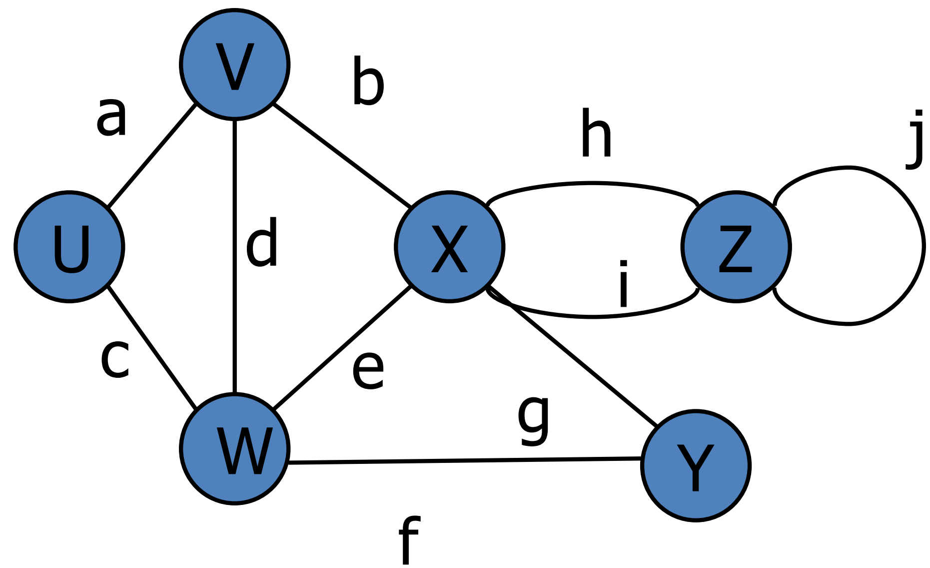
  $m=0$: μηδενικός-null (N_n)

Παράδειγμα γράφου



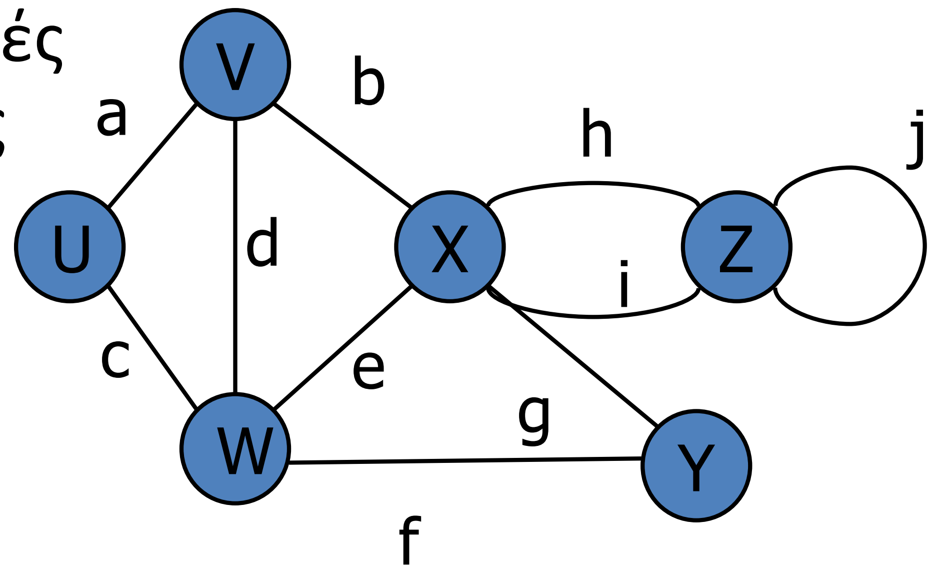
Ορισμοί για Κορυφές – Ακμές Ι

- **Τερματικά σημεία**–endpoints ακμής
  - τα U,V είναι τερματικά σημεία της a
- Ακμές **προσπίπτουσες**–incident σε κορυφή
  - οι a,d,b προσπίπτουν στην V
- **Γειτονικές**–neighbor κορυφές
  - οι U,V είναι γειτονικές



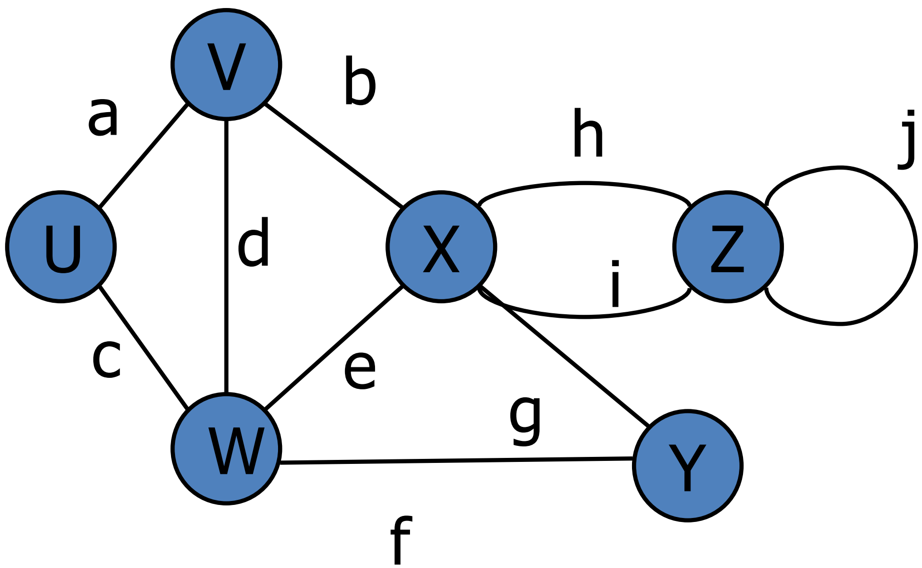
Ορισμοί για Κορυφές – Ακμές II

- **Ανεξάρτητες**–independent κορυφές
  - οι U,X είναι ανεξάρτητες
- **Γειτονιά κορυφής** – neighborhood
  - $N(v)=\{u\in V(G)\,|\,(v,u)\in E(G)\}$
  - $N(U)=\{V,W\}$
- **Παράλληλες**–parallel ακμές
  - οι h,i είναι παράλληλες

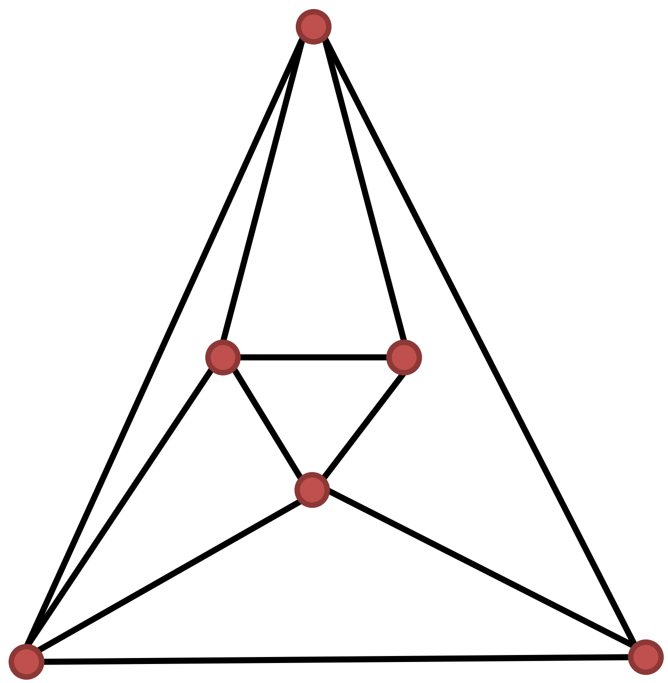


Ορισμοί για Κορυφές – Ακμές ΙΙΙ

- **Βρόγχος**–self-loop
  - η j είναι βρόχος
- **Βαθμός-**degree κορυφής:
  - d(U)=|N(v)|=2
- **Ελάχιστος** και **μέγιστος βαθμός γράφου**
  - d(G)=2, D(G)=5



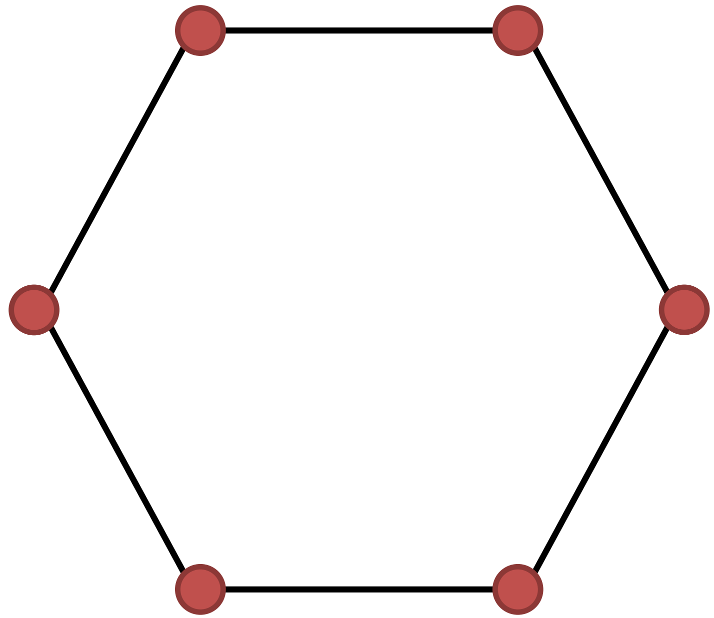
Τακτικοί γράφοι



Τακτικοί-regular γράφοι :

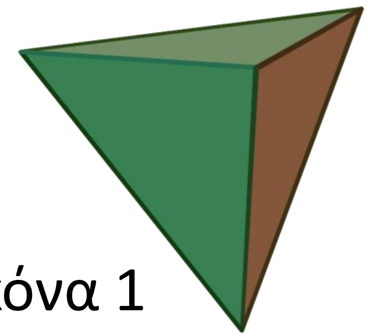
όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο d

Κυκλικοί γράφοι

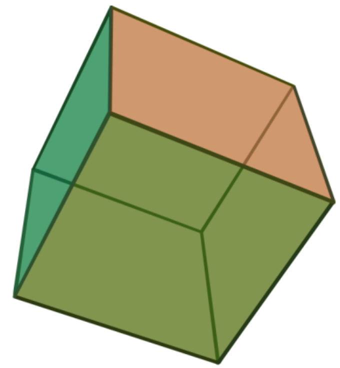


Κυκλικός-cyclic γράφος (C_n):
όλοι οι κορυφές έχουν d=2

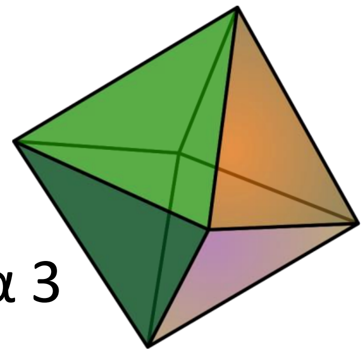
Πλατωνικοί γράφοι Ι



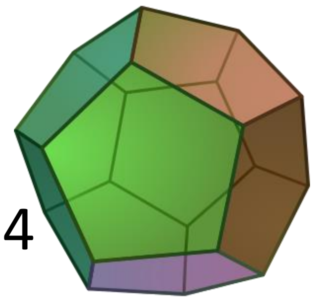
Εικόνα 1



Εικόνα 2



Εικόνα 3



Εικόνα 4

Πλατωνικά στερεά: τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο

Πλατωνικοί γράφοι ΙΙ

- Τετράεδρο
  - Όψεις (f): 4
  - Κορυφές (n): 4
  - Ακμές (m): 6
- Εξάεδρο
  - Όψεις (f): 6
  - Κορυφές (n): 8
  - Ακμές (m): 12

Πλατωνικοί γράφοι ΙΙΙ

- Οκτάεδρο
  - Όψεις (f): 8
  - Κορυφές (n): 6
  - Ακμές (m): 12
- Δωδεκάεδρο
  - Όψεις (f): 12
  - Κορυφές (n): 20
  - Ακμές (m): 30

Πλατωνικοί γράφοι IV

- Εικοσάεδρο
  - Όψεις (f): 20
  - Κορυφές (n): 12
  - Ακμές (m): 30

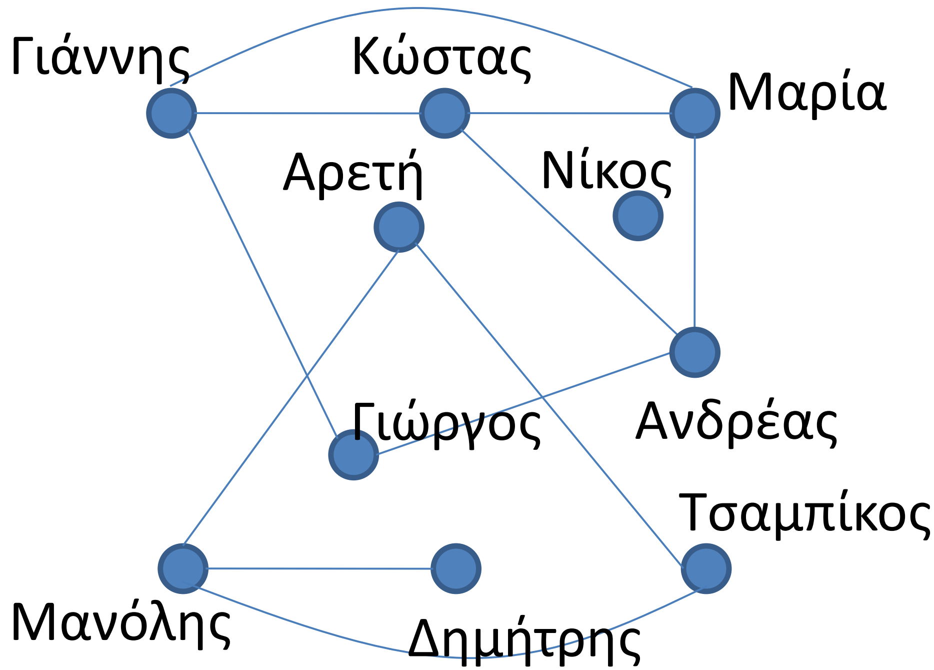
Επιπλέον βασικές έννοιες Ι

- **Απομονωμένη**-isolated κορυφή: d(v)=0
- **Εκκρεμής**-pendant κορυφή: d(v)=1
- Αν V1,…,Vk είναι ανεξάρτητα υποσύνολα κορυφών, τότε οι υπογράφοι G(V1),…,G(Vk) είναι οι συνδεδεμένες συνιστώσες – connected components του γράφου G
- **Συνδεδεμένος**-connected γράφος, αν αποτελείται από μία μόνο συνιστώσα

Επιπλέον βασικές έννοιες ΙΙ

- **Συνδεδεμένος κατά ελάχιστο τρόπο** – minimally connected, αν η διαγραφή μιας μόνο ακμής τον αποσυνδέει και δημιουργεί συνιστώσες
- **Σειρά**-rank: $r=n–k$, n η τάξη και k το πλήθος των συνιστωσών
- **Μηδενικότητα**-nullity: $\mu=m–n+k$

Κυκλικοί γράφοι

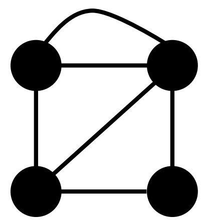


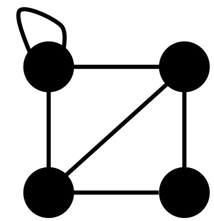
Απομονωμένες; Εκκρεμής; Συνιστώσες;
Κατ’ελάχιστο τρόπο; Σειρά; Μηδενικότητα;

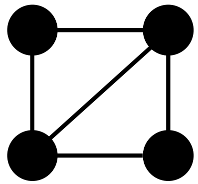
Περισσότερες Βασικές Έννοιες Ι

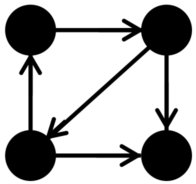
- **Παράλληλες**-parallel ακμές: ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών
- **Απλός**-simple γράφος: δεν περιλαμβάνει παράλληλες ακμές ή βρόχους
- **Ψευδογράφος**-pseudograph: περιλαμβάνει βρόχους
- **Πολυγράφος**-multigraph: με παράλληλες ακμές αλλά χωρίς βρόχους
- **Υποκείμενος**-underlying: ο γράφος που προκύπτει αν απαλειφθούν οι βρόχοι και οι παράλληλες ακμές
- **Κατευθυνόμενος**-directed ή **προσανατολισμένος**-oriented, D(V,A), είναι ο γράφος που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών και διατεταγμένα ζεύγη κορυφών που συνδέονται με τα **τόξα**-arcs.

Παράδειγμα









Τι είναι το καθένα;

Βασικά Θεωρήματα Ι

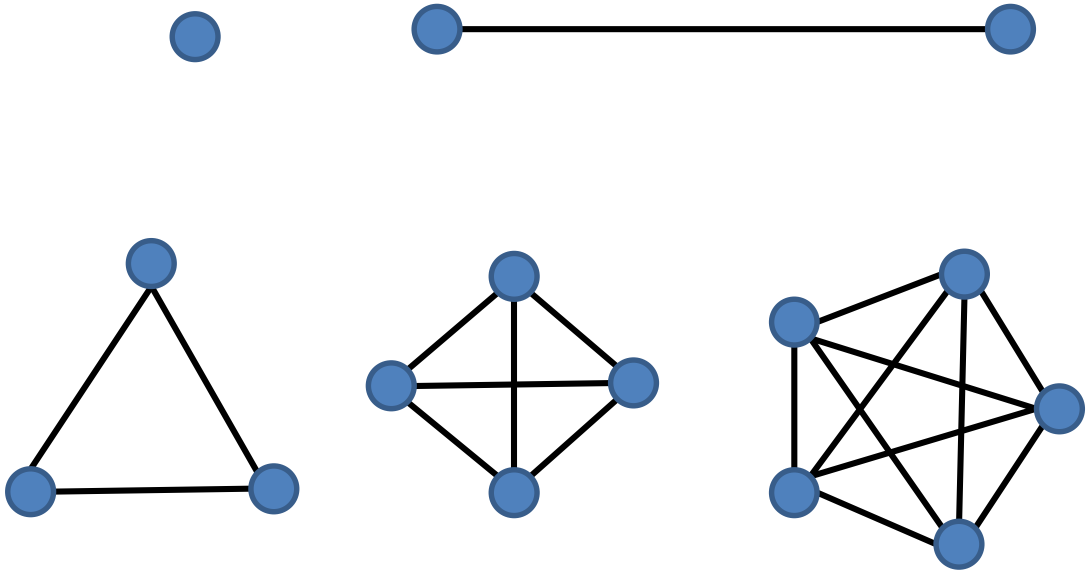
- **<u>Λήμμα</u>** των χειραψιών: $\sum_{\forall v \in V} d(v) = 2|E|$
- Τακτικός γράφος βαθμού k: $|V| \times k = 2|E|$
- Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού ενός πεπερασμένου γράφου είναι άρτιος αριθμός.

Βασικά Θεωρήματα II

- **Γραμμικός**-linear γράφος L(G) ενός γράφου G: m κορυφές, μία για κάθε ακμή του G έτσι ώστε δύο κορυφές του να είναι γειτονικές αν οι αντίστοιχες ακμές του G προσπίπτουν στην ίδια κορυφή
- Το πλήθος των ακμών του γραμμικού γράφου L(G) είναι

$$\left|E\big(L(G)\big)\right| = \frac{1}{2}\sum_{\forall v \epsilon V} d(v)^2 - m$$

Πλήρης Γράφος



Πλήρης γράφος K_n: όλες οι κορυφές του ενώνονται.
Είναι και τακτικός γράφος βαθμού n-1

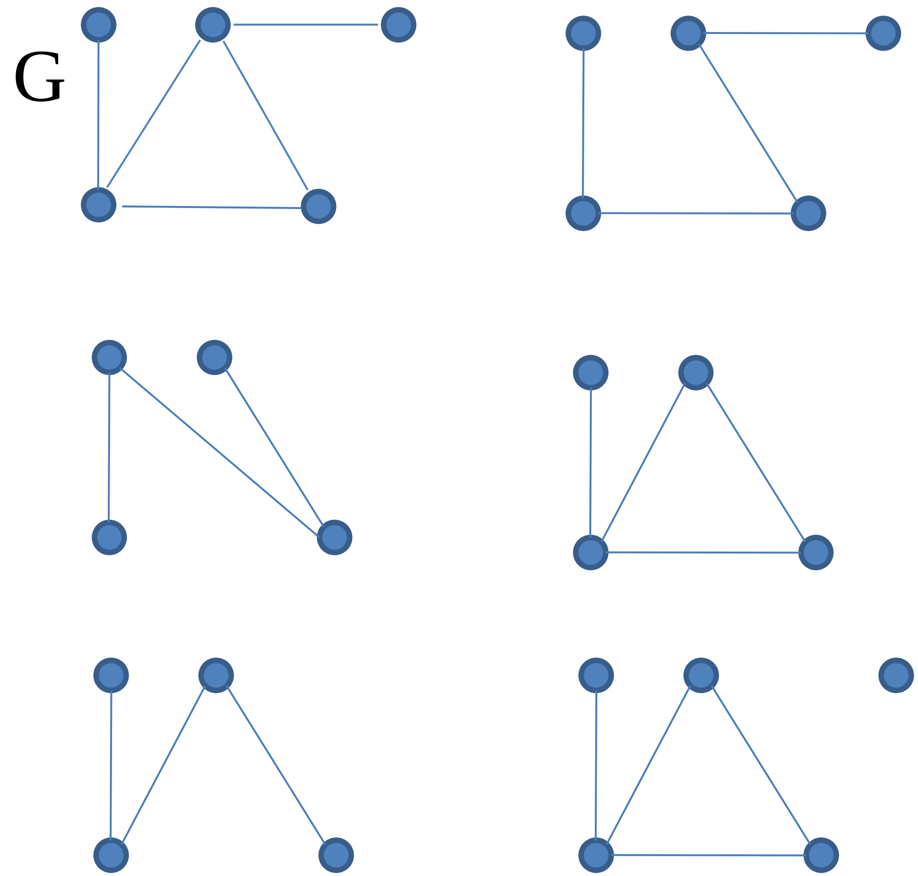
Γράφος με πλήρεις συνιστώσες

$2K_3$

Γράφος με m συνιστώσες τύπου K_n : mK_n

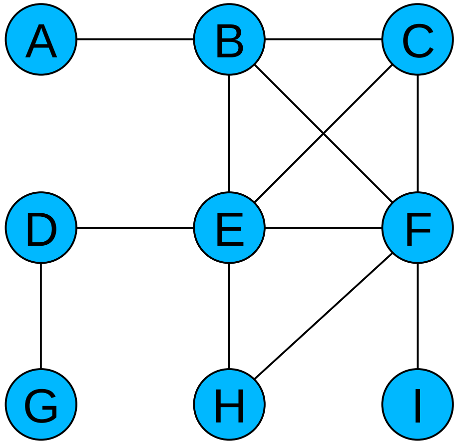
Υπογράφοι

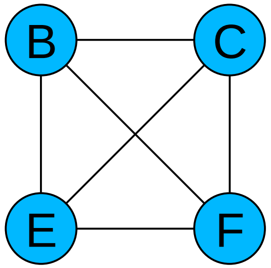
- **Υπογράφος**
- **Υπεργράφος**
- **Ζευγνύων υπογράφος**
- **Επηρεασμένος** από σύνολο κορυφών/ακμών



Γράφος Κλίκα

- **Κλίκα** H (clique) ενός γράφου G, είναι ένας υπογράφος με ένα σύνολο κορυφών S, έτσι ώστε ο H(S) να είναι πλήρης.
- **Αριθμός κλίκας** ω, λέγεται η τάξη της μέγιστης κλίκας.





S={B,C,E,F}, ω=4

Επιπλέον Θεωρήματα

- Ένας πλήρης γράφος K_n έχει $n(n-1)/2$ ακμές

- Για έναν απλό γράφο G με n κορυφές, m ακμές και k συνιστώσες ισχύει:

$$n-k \leq m \leq (n-k)\,(n-k+1)/2$$

- Κάθε απλός γράφος με n κορυφές και τουλάχιστον $(n-1)(n-2)/2$ ακμές είναι συνδεδεμένος

Απαρίθμηση

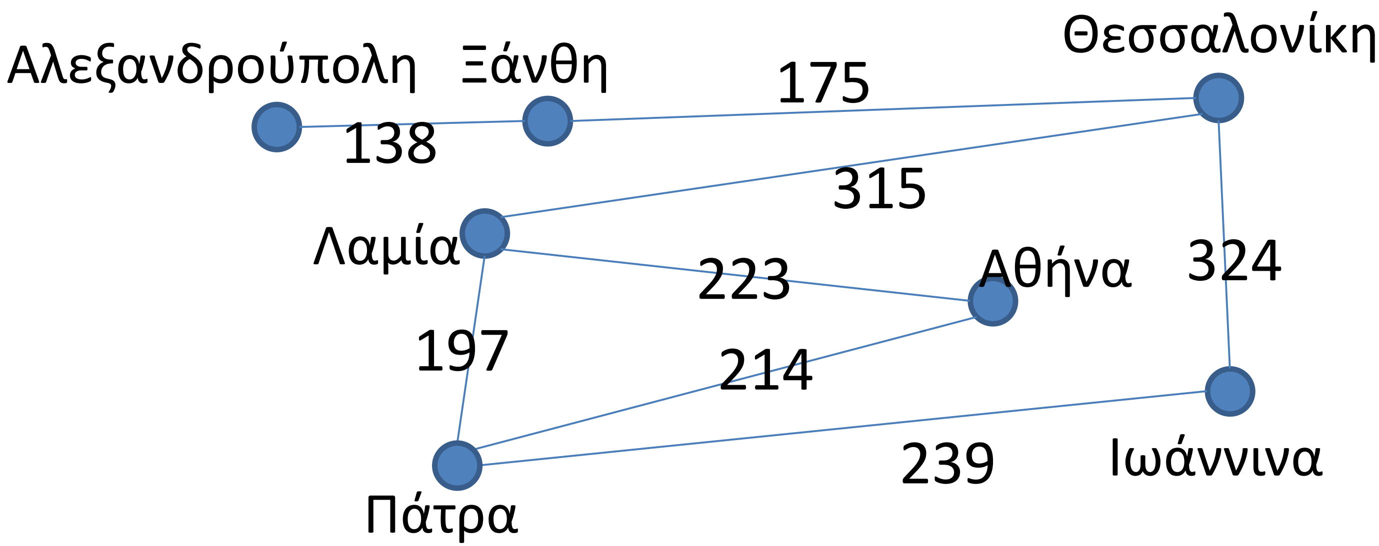
- Το πλήθος των απλών γράφων με ετικέτες που έχουν n κορυφές και m ακμές είναι

$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

- Το πλήθος των απλών γράφων με ετικέτες και n κορυφές είναι

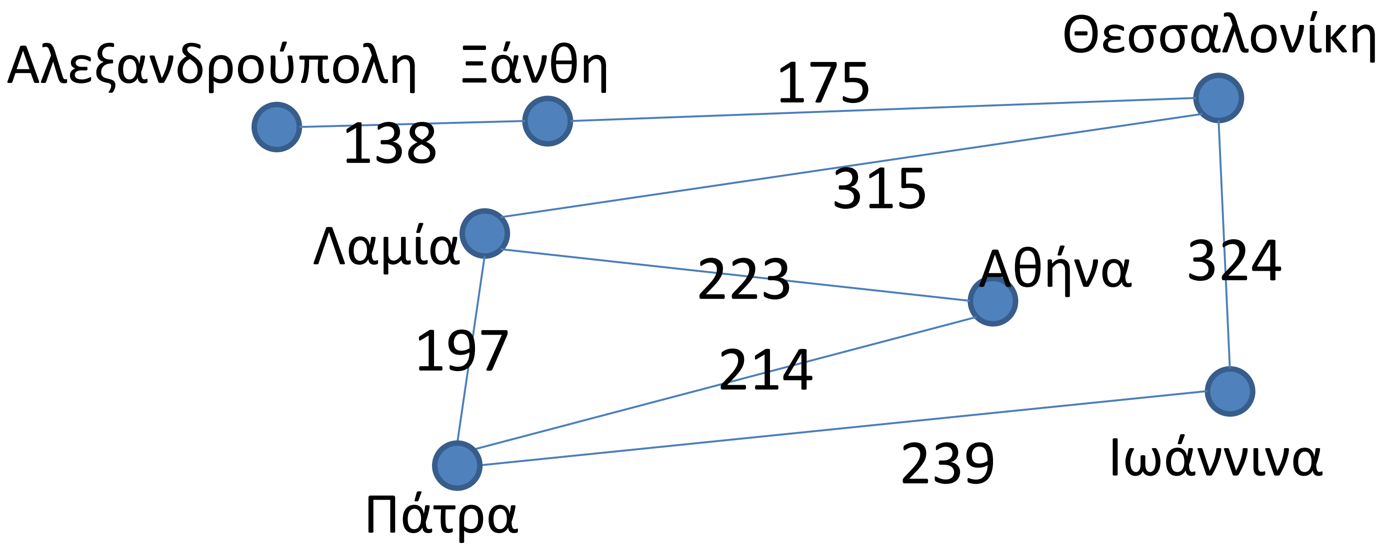
$$2^{n(n-1)/2}$$

Γράφος με πλήρεις συνιστώσες I



Για κάθε ακμή ενός γράφου w(e) είναι το **βάρος**-weight αυτής και αν υπάρχει, τότε έχουμε ζυγισμένο γράφο

Γράφος με πλήρεις συνιστώσες ΙΙ



Βάρος γράφου είναι το άθροισμα τα βαρών

Ετικέτες στις κορυφές ή τις ακμές των γράφων

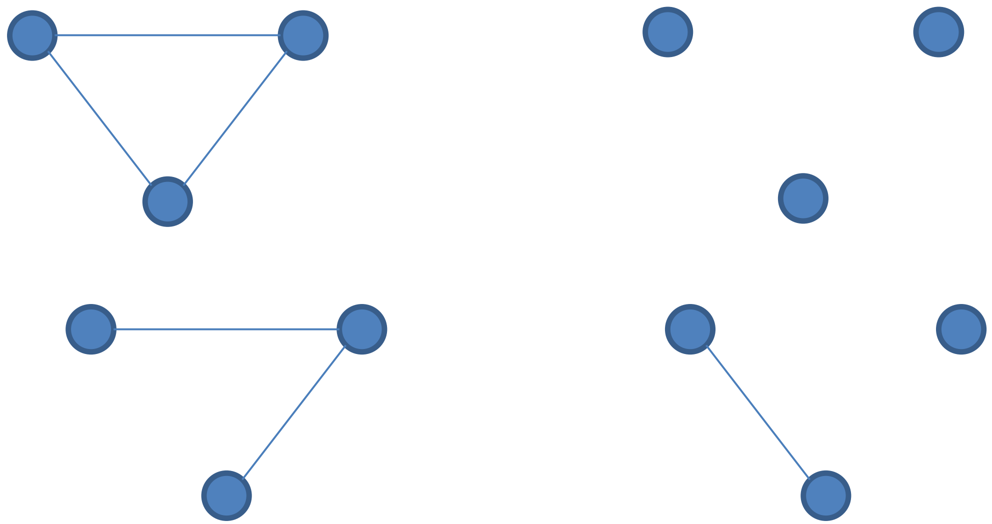
Ισομορφικοί γράφοι

- Δύο γράφοι $G_1=(V_{1,}\ E_1)$ και $G_2=(V_{2,}\ E_2)$ ονομάζονται **ισομορφικοί** (isomorphic) αν υπάρχει μία σχέση $\phi\colon \mathrm{V}_1 \rightarrow V_2$, ένα-προς-ένα, έτσι ώστε
$$\{v, w\} \epsilon\ E_1 \iff \{\phi(v), \phi(w)\} \epsilon\ E_2$$
- Ο ισομορφισμός των γράφων G_1 και G_2 συμβολίζεται με $\mathrm{G}_1 \cong G_2$.

Ισομορφισμός Ι

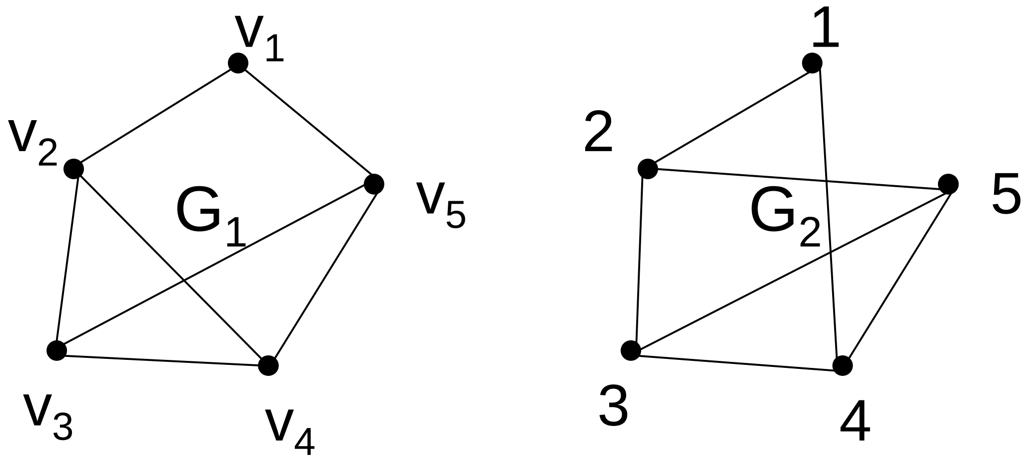
- Η σχέση ϕ ονομάζεται **ισομορφισμός** (isomorphism) και είναι σχέση ισοδυναμίας.
- Η ύπαρξη της ϕ συνεπάγεται την ύπαρξη διαμέρισης του συνόλου των δοθέντων γράφων.
- Αν επιλέξουμε έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση, τότε το τεράστιο σύνολο γράφων ανάγεται σε σημαντικά μικρότερο πλήθος διαφορετικών γράφων.

Ισομορφισμός ΙΙ



Όλοι οι διαφορετικοί ως προς την ισομορφία γράφοι με n=3 κορυφές

Παράδειγμα Ισομορφισμού Ι



Ισόμορφοι γράφοι $G_{1=}(V_1,E_1)$ και $G_{1=}(V_2,E_2)$

Παράδειγμα Ισομορφισμού ΙΙ

$V_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ και $V_2=\{1,2,3,4,5\}$

Υπάρχει σχέση ένα-προς-ένα:

$$\phi: \mathrm{V}_1 \rightarrow V_2$$

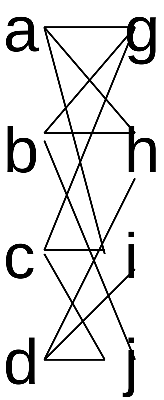
$$\phi(v_1) = 1, \phi(v_2) = 2, \phi(v_3) = 5, \phi(v_4) = 3, \phi(v_5) = 4$$

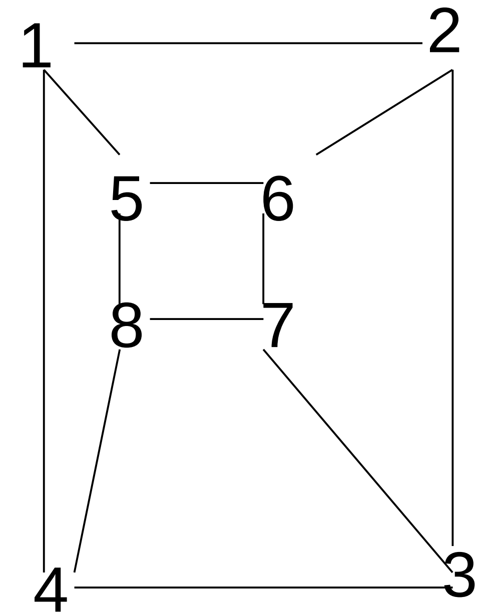
Για τις ακμές ισχύει

$$\{v_1, v_2\} \epsilon E_1 \iff \{1,2\} \epsilon E_2$$
$$\{v_2, v_4\} \epsilon E_1 \iff \{2,3\} \epsilon E_2$$
$$\{v_3, v_4\} \epsilon E_1 \iff \{5,3\} \epsilon E_2$$
$$\{v_4, v_5\} \epsilon E_1 \iff \{3,4\} \epsilon E_2$$
$$\{v_1, v_5\} \epsilon E_1 \iff \{1,4\} \epsilon E_2$$
$$\{v_2, v_5\} \epsilon E_1 \iff \{2,5\} \epsilon E_2$$
$$\{v_3, v_5\} \epsilon E_1 \iff \{5,4\} \epsilon E_2$$

Ένα ακόμη παράδειγμα ισομορφισμού

- Αν και αυτοί οι γράφοι μοιάζουν τελείως διαφορετικοί, εντούτοις είναι ισομορφικοί διότι

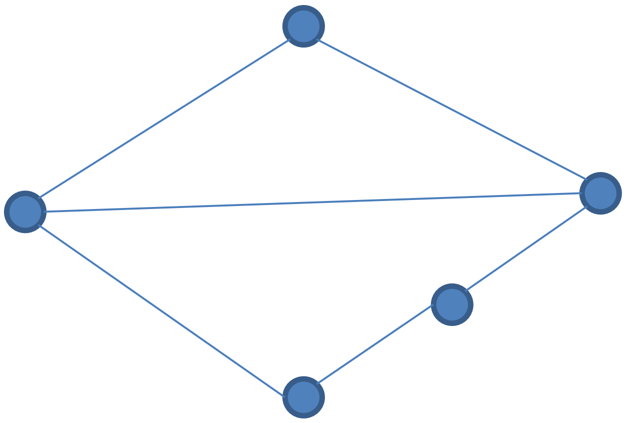


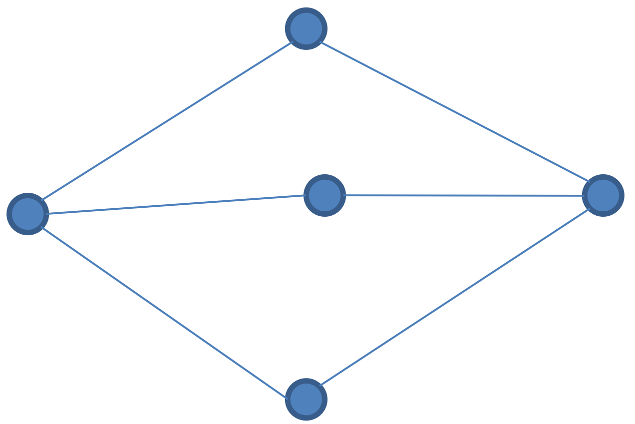


f(a)=1 f(b)=6 f(c)=8
f(d)=3 f(g)=5 f(h)=2
f(i)=4 f(j)=7

Ένα τελευταίο παράδειγμα I

- Γράφοι με 5 κορυφές και 6 ακμές. Είναι ισομορφικοί;





Ένα τελευταίο παράδειγμα ΙΙ

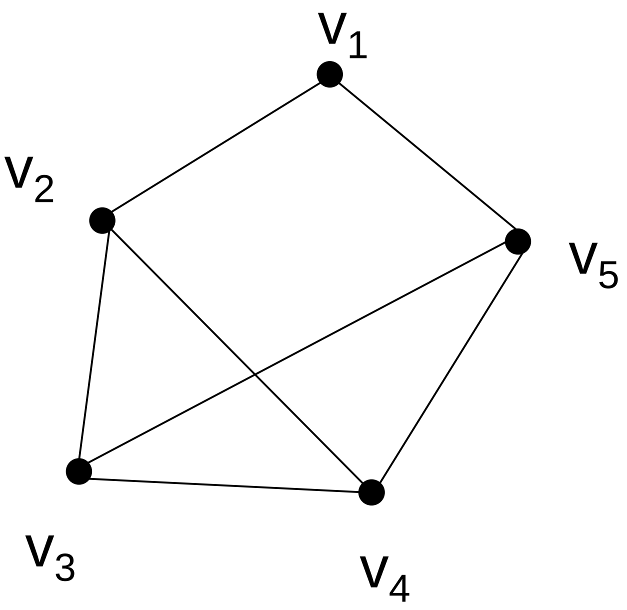
- Δεν μπορεί να ορισθεί σχέση ισομορφισμού αφού οι δύο κορυφές του πρώτου γράφου που έχουν βαθμό 3, συνδέονται με ακμή, δηλαδή είναι γειτονικές, ενώ στο δεύτερο γράφο οι αντίστοιχες κορυφές δεν είναι γειτονικές.
- Η ύπαρξη κοινών αναλλοίωτων χαρακτηριστικών για να βρεθεί ένας ισομορφισμός είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή.

Αναλλοίωτα χαρακτηριστικά

- Το πλήθος των κορυφών n
- Το πλήθος των ακμών m
- Υπάρχει κορυφή βαθμού k
- Υπάρχουν m κορυφές βαθμού k
- Υπάρχει κύκλωμα μήκους k
- Υπάρχει ανοικτό κύκλωμα μήκους k
- Υπάρχουν m ανοικτά κυκλώματα μήκους k
- Είναι συνδεδεμένος
- Υπάρχει Eulerian κύκλωμα
- Υπάρχει Hamiltonianian κύκλος

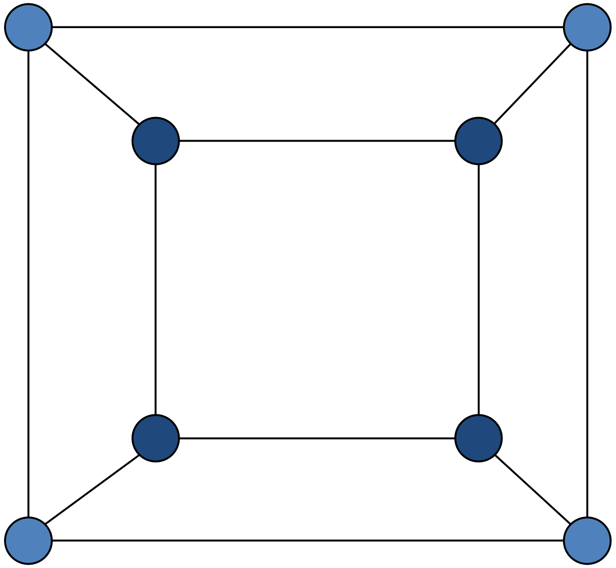
Περιφέρεια – girth - circumference

- Για ένα γράφο G, ο κυκλικός υπογράφος με την ελάχιστη τάξη ονομάζεται **περιφέρεια**-girth, girth(G).
- Για ένα γράφο G, ο κυκλικός υπογράφος με τη μέγιστη τάξη ονομάζεται **circumference** - girth, circum(G).
- Ποιές είναι οι τιμές girth(G) και circum(G)?



Περιφέρεια

- Ποιά είναι η μικρότερη τιμή girth(G) σε έναν απλό διμερή γράφο ?
- Κάθε κύκλος πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει στο ίδιο χρώμα. Άρα πρέπει να έχει άρτιο μήκος. Επειδή ο διμερής γράφος είναι απλός, δεν μπορεί να έχει κύκλο μήκους 2, άρα η απάντηση είναι 4.



Κλωβοί

- Αν ο γράφος G με girth(G)=g είναι τακτικός βαθμού r τότε ονομάζεται **(g,r)-κλωβός** - cage.

Θεώρημα Κλώβων

- Αν με f(g,r) συμβολίζεται το κάτω όριο της τάξης ενός (g,r)-κλωβού, τότε ισχύει:

$$f(g,r) \geq \begin{cases} 1 + \dfrac{r(r-1)^{g_1} - r}{r-2} \ \alpha\nu\ g = 2g_1 \\ \dfrac{2(r-1)^{g_1} - 2}{r-2} \ \alpha\nu\ g = 2g_1 \end{cases}$$

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <Τετράεδρο> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tetrahedron.jpg>
- Εικόνα 2: <Εξάεδρο> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Hexahedron-slowturn.gif>
- Εικόνα 3: <Οκτάεδρο> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Octahedron.gif>
- Εικόνα 4: <Κόλουρο Οκτάεδρο> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncatedoctahedron.jpg>

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ιωάννης Μανωλόπουλος. «Αλγοριθμική Θεωρία Γράφων. Εισαγωγή (ορισμοί)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS264/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.