ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **5**: Μονοπάτια και Κύκλοι (Hamilton)

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μονοπάτια και Κύκλοι

Hamilton

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

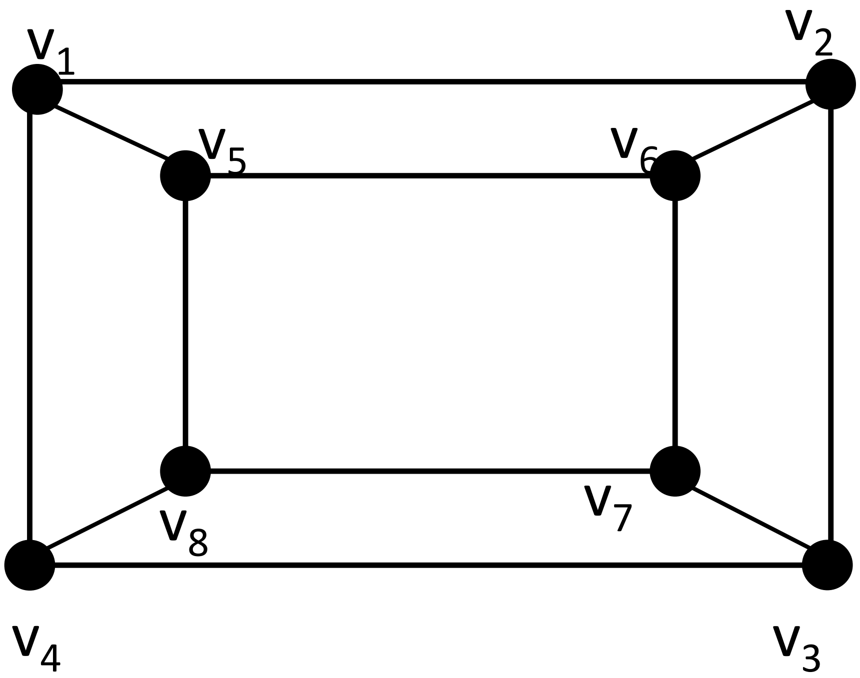
Sir William Rowan Hamilton

- Ο Ιρλανδός μαθηματικός Hamilton το 1856 κατασκεύασε το παιχνίδι «Γύρος του κόσμου»
- Πρόβλημα: είναι δυνατόν σε κάθε γράφο να βρεθεί κύκλος που να περνά από όλες τις κορυφές;
- Hamiltonian
  - Γράφος
  - Κύκλος
  - Μονοπάτι

Κύκλος Hamilton I

- Κάθε κύκλος Hamilton είναι ένας 2-παράγοντας, επειδή κάθε κύκλος Hamilton είναι ένας ζευγνύων υπογράφος που είναι και τακτικός βαθμού 2.
- Κάθε 2-παράγοντας δεν είναι κατ΄ ανάγκη κύκλος Hamilton.

Κύκλος Hamilton II



- Κύκλος Hamilton $C=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_8,v_7,v_6,v_5,v_1)$

2-παράγοντας (όχι Hamilton) οι συνιστώσες: (v_1,v_2,v_6,v_5,v_1) και (v_3,v_4,v_8,v_7,v_3)

Γράφοι Hamilton

- **Εξιχνιάσιμος**-traceable (έχει μονοπάτι Hamilton)
- **Ομογενώς**-homogenously εξιχνιάσιμος (εξιχνιάσιμος από κάθε κορυφή)
- Γράφος **υπο-Hamilton** αν δεν είναι Hamilton αλλά ο γράφος G-v είναι Hamilton για κάθε κορυφή v του G
- **Συνδεδεμένος κατά Hamilton** (δύο οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με ένα μονοπάτι Hamilton)
- Κάθε γράφος συνδεδεμένος κατά Hamilton με αριθμό κορυφών ίσο ή μεγαλύτερο του 3, είναι γράφος Hamilton. Το αντίθετο δεν ισχύει.

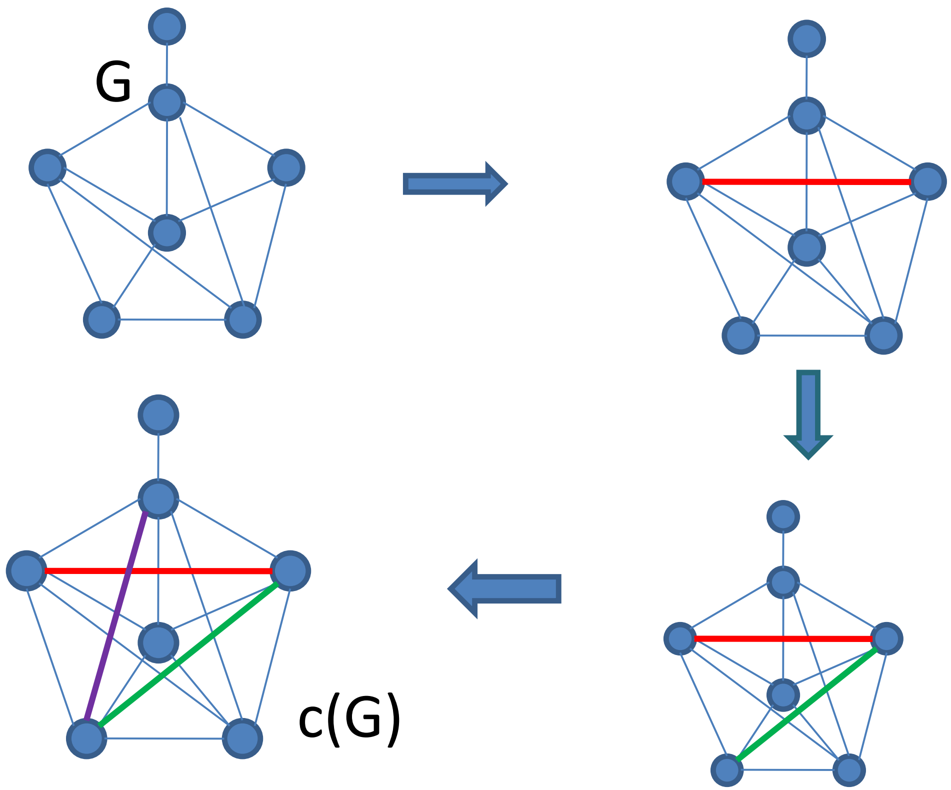
Συνθήκες για Hamiltonian

- **Πρόβλημα**: ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε να είναι ένας γράφος Hamilton? (NP-complete)
- **Θεώρημα**: κάθε πλήρης γράφος είναι Hamilton
- **Θεώρημα**: κάθε πλήρης γράφος με n κορυφές (n περιττός) έχει (n-1)/2 Hamilton κύκλους ξένους ως προς ακμές
- **Θεώρημα** (Dirac 1952): κάθε απλός γράφος με $n \geq 3$ και $d(G) \geq n/2$ είναι Hamiltonian
- **Θεώρημα** (Ore 1960): κάθε απλός γράφος με $n \geq 3$ και $d(x)+d(y) \geq n$ για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών x,y είναι Hamiltonian

Hamiltonian Θεωρήματα

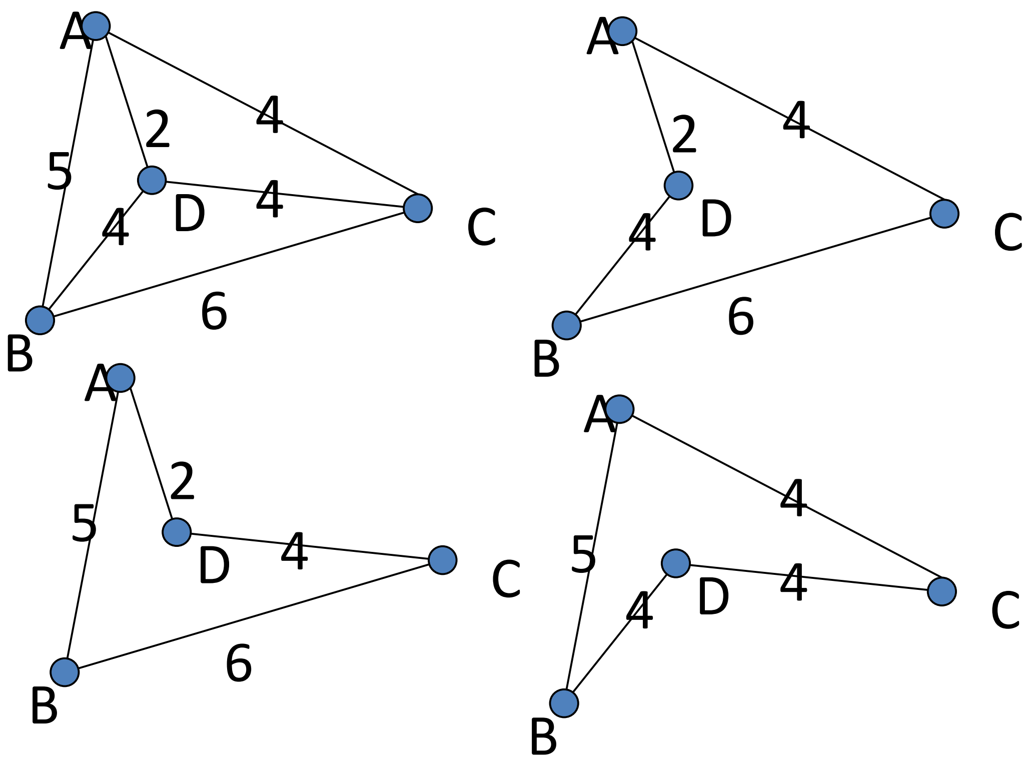
- **Θεώρημα**: κάθε απλός γράφος με n≥3 και d(x)+d(y)≥n για δύο διακριτές μη γειτονικές κορυφές x,y είναι Hamiltonian, αν ο γράφος G+(x,y) είναι Hamiltonian
- **Κλείσιμο**-closure γράφου είναι ένας γράφος c(G) με επιπλέον ακμές για τα ζεύγη μη γειτονικών κορυφών x και y, όπου ισχύει d(x)+d(y)≥n.
- **Θεώρημα** (Bondy-Chvatal 1976): κάθε απλός γράφος είναι Hamiltonian, αν και μόνον αν έχει κλείσιμο Hamiltonian.
- **Θεώρημα** (Fraudee-Dould-Jacobsen-Schelp 1989): κάθε 2-συνδεδεμένος γράφος όπου για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών x,y ισχύει d(x)+d(y)≥(2n-1)/3 είναι Hamiltonian.

Κλείσιμο γράφου



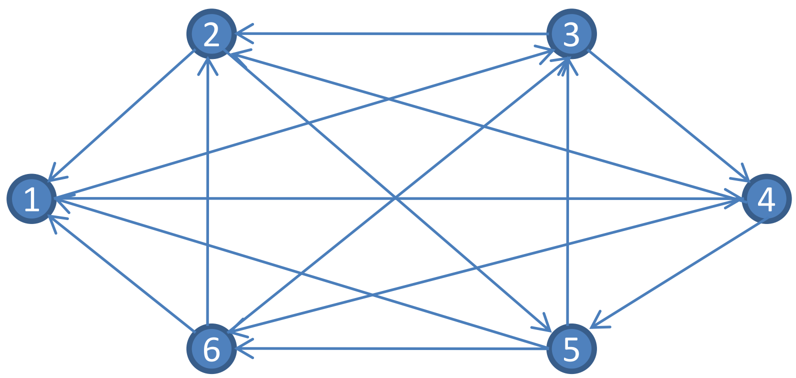
- Αν $c_1(G)$, $c_2(G)$ είναι δύο κλεισίματα του G, τα οποία προήλθαν με διαφορετικό τρόπο, τότε $c_1(G)=c_2(G)$

Παράδειγμα Hamiltonian κύκλου



- Πόσοι Hamiltonian κύκλοι υπάρχουν για το ζυγισμένο γράφο K_4 ?
- ACBDA με βάρος 16
- ABCDA με βάρος 17
- ABDCA με βάρος 17

Αποστάσεις με Άλγεβρα πινάκων



$$M=\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Το άθροισμα $M^1+M^2+\ldots+M^k$ υποδηλώνει το πλήθος των μονοπατιών από *i* σε *j* μήκους $1,2,\ldots,k$.

$$M^2=\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Τι σημασία έχει ο $M*M=M^2$;

Αλγόριθμος εύρεσης κύκλων Hamilton I

M_1

0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M

0	B	0	0	0
0	0	C	0	0
0	0	0	D	E
0	0	0	0	E
A	B	0	D	0

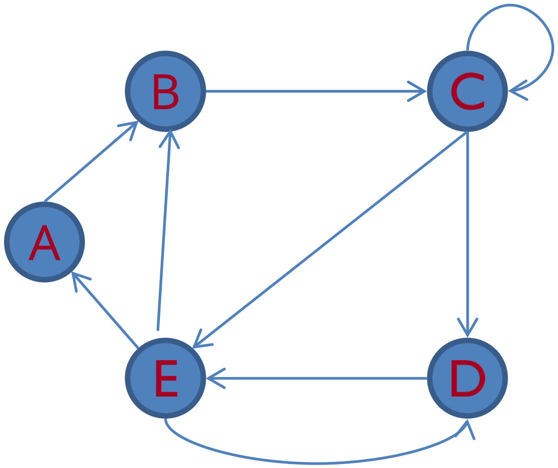
M_2

0	0	ABC	0	0
0	0	0	BCD	BCE
CEA	CEB	0	CED	CDE
DEA	DEB	0	0	0
0	EAB	EBC	0	0

Αλγόριθμος εύρεσης κύκλων Hamilton II

0	0	0	ABCED	ABCDE
BCDEA	0	0	0	0
0	CDEAB	0	0	0
0	0	DEABC	0	0
0	0	0	EABCD	0

M_4



Αλγόριθμος εύρεσης κύκλων Hamilton

- Αν στην k-οστή δύναμη του πίνακα προκύψουν μονοπάτια τέτοια έτσι ώστε να υπάρχει ακμή που να ενώνει το πρώτο και το τελευταίο σύμβολο κάθε συμβολοσειράς, τότε αυτά είναι μονοπάτια Hamiltonian.
- Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί εναλλακτικά χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο που στηρίζεται στην **Οπισθοδρόμηση** (backtracking), το **Δυναμικό Προγραμματισμό** (dynamic programming) ή τη μεθόδου της **Διακλάδωσης με Περιορισμό** (branch and bound).

Περιοδεύων πωλητής

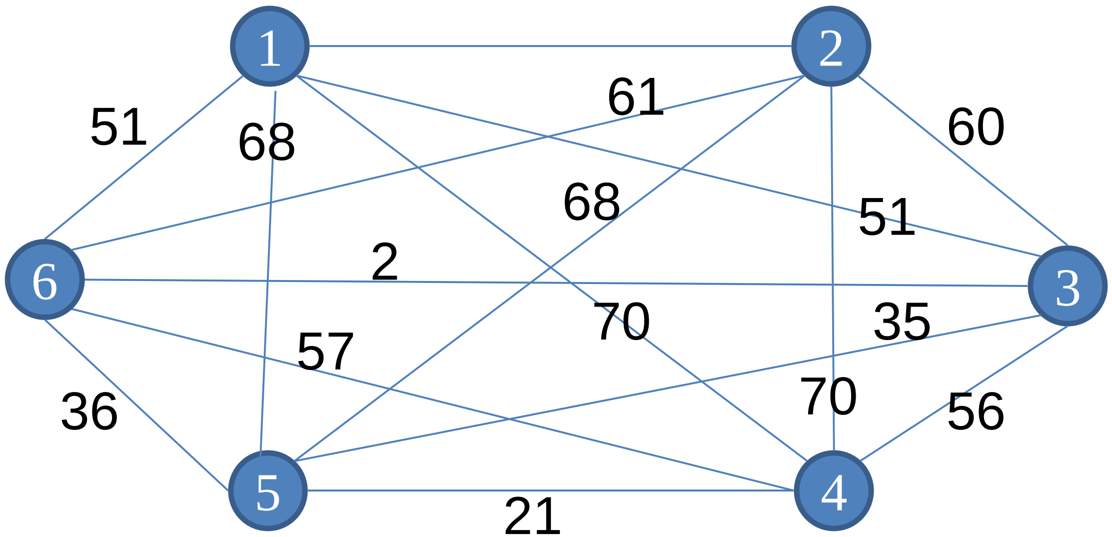
- Πρόβλημα: με ποια σειρά πρέπει να επισκεφθεί τις πόλεις ο πωλητής και να επιστρέψει στη δική του διανύοντας τη μικρότερη δυνατή συνολική απόσταση;
- Ζυγισμένος Ευκλείδειος γράφος: ισχύει η ανισοϊσότητα του τριγώνου
- Αν ο γράφος δεν είναι Ευκλείδειος, τότε κατά τη βέλτιστη λύση ο πωλητής μπορεί να περνά από την ίδια πόλη περισσότερες από μία φορές.
- Αλλιώς το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης κύκλων Hamilton με το ελάχιστο βάρος.

Περιοδεύων πωλητής

- Σε έναν πλήρη γράφο ο συνολικός αριθμός κύκλων Hamilton ισούται με $(n-1)!/2$
- Η λύση του προβλήματος με εξαντλητικό τρόπο έχει πολυπλοκότητα $O(n^n)$, είναι δηλαδή δυσχείριστο.
- Αν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού ή η μέθοδος της διακλάδωσης με περιορισμό, η πολυπλοκότητα προβλήματος παραμένει εκθετική: $O(n^2 2^n)$.
- Επίσης, το πρόβλημα έχει αντιμετωπισθεί με **Γενετικούς Αλγορίθμους** (genetic algorithms), με **Νευρωνικά Δίκτυα** (neural networks) και με **Αλγόριθμους Μυρμηγκιών** (ant colony optimization)

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

- Επίλυση με ευριστικές υπο-βέλτιστες λύσεις
- Μέτρο σύγκρισης είναι η ποσότητα $1<L/L_{opt}=a$



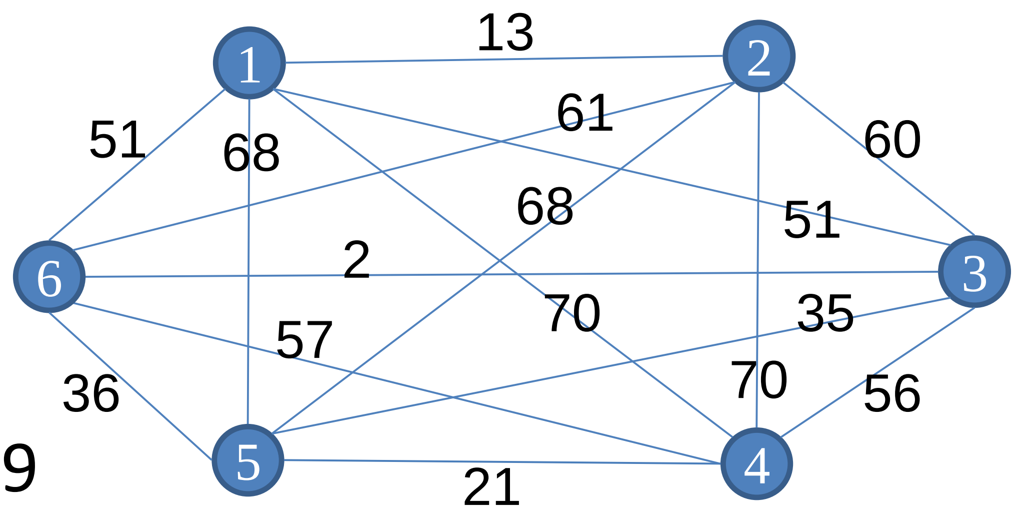
Μέθοδος πλησιέστερου γείτονα

1. Θέτουμε i←1. Επιλέγουμε μία τυχαία κορυφή v_0 και θεωρούμε το μονοπάτι $P_i=v_0$
2. Αν i=n, τότε C=Pn είναι ένας κύκλος Hamilton, αλλιώς αναζητείται η ακμή e με το μικρότερο βάρος ώστε να προσπίπτει σε μία από τις δύο τερματικές κορυφές του P_i και αν είναι δυνατόν, να μη δημιουργείται κύκλος με τις κορυφές του P_i.
3. Σχηματίζεται το μονοπάτι $P_{i+1}=(P_i \cup e)$. Θέτουμε i←i+1. Πηγαίνουμε στο βήμα 2.

- Έχει αποδειχθεί ότι α=(|ln n|+1)/2 και άρα για μεγάλα n έχει σημαντική απόκλιση από τη βέλτιστη λύση

Μέθοδος πλησιέστερου γείτονα – Παράδειγμα

- Μέθοδος πλησιέστερου γείτονα (άπληστη)



3-6 → βάρος 2

3-6-5 → βάρος 2+36=38

3-6-5-4 → βάρος 38+21=59

3-6-5-4-2 → βάρος 59+70=129

3-6-5-4-2-1 →βάρος 129+13=142

3-6-5-4-2-1-3 →βάρος 142+51=193

Μέθοδος της μικρότερης εισαγωγής

1. Θέτουμε $i \leftarrow 1$. Επιλέγουμε μία τυχαία κορυφή v_0 και θεωρούμε το μονοπάτι $C_i = v_0$
2. Αν $i=n$, τότε $C=C_n$ είναι ένας κύκλος Hamilton, αλλιώς αναζητείται μία κορυφή vi που δεν υπάρχει στον κύκλο C_i και είναι πλησιέστερα προς ένα ζεύγος διαδοχικών κορυφών $\{w_i, w_{i+1}\}$ του C_i.
3. Σχηματίζεται ο κύκλος C_{i+1} εισάγοντας την κορυφή v_i μεταξύ των w_i και w_{i+1}. Θέτουμε $i \leftarrow i+1$. Πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

- Στο βήμα 2 ελαχιστοποιείται η ποσότητα $dist(w_i,v_i)+ dist(v_i,w_{i+1})–dist(w_i, w_{i+1})$. Πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα.
- Ισχύει ότι $\alpha \leq 2$, ενώ η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n^3)$.

Μέθοδος της μικρότερης εισαγωγής – Παράδειγμα

- Μέθοδος μικρότερης εισαγωγής (άπληστη)

(3)

(3,6,3)

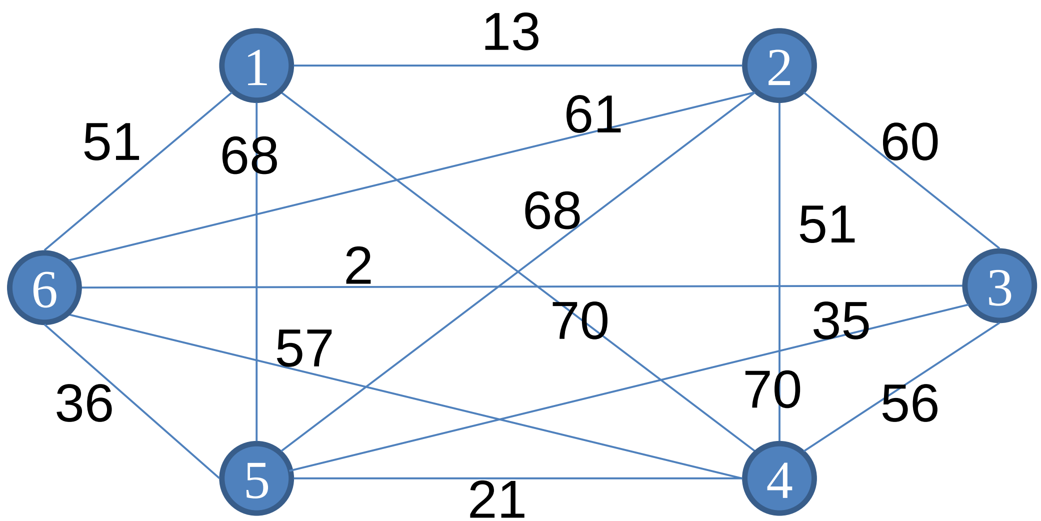
(3,6,5,3)

(3,6,5,4,3)

(3,6,1,5,4,3)

(3,6,2,1,5,4,3)

βάρος 192



Μέθοδος με Ελάχιστα Ζευγνύοντα Δένδρα

1. Βρίσκουμε ένα ελάχιστο ζευγνύον δένδρο T του G.
2. Εκτελούμε μία αναζήτηση κατά βάθος. [Αν από μία κορυφή v_0 προσπελασθεί η v_1, τότε η διαδικασία συνεχίζεται προς κάποια νέα γειτονική κορυφή της v_1 και όχι της v_0. Αν προσεγγισθεί κάποια κορυφή από όπου είναι αδύνατο η διαδικασία να συνεχισθεί σε μία μη ήδη επισκεφθείσα κορυφή, τότε η διαδικασία συνεχίζει από την προηγούμενη της τρέχουσας κορυφής με την ίδια τεχνική.]
3. Αν $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_j}$ είναι η σειρά επίσκεψης των κορυφών του T από το Βήμα 2, τότε ο κύκλος Hamilton είναι $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}, v_{i_1}$

Μέθοδος με Ελάχιστα Ζευγνύοντα Δένδρα – Παράδειγμα I

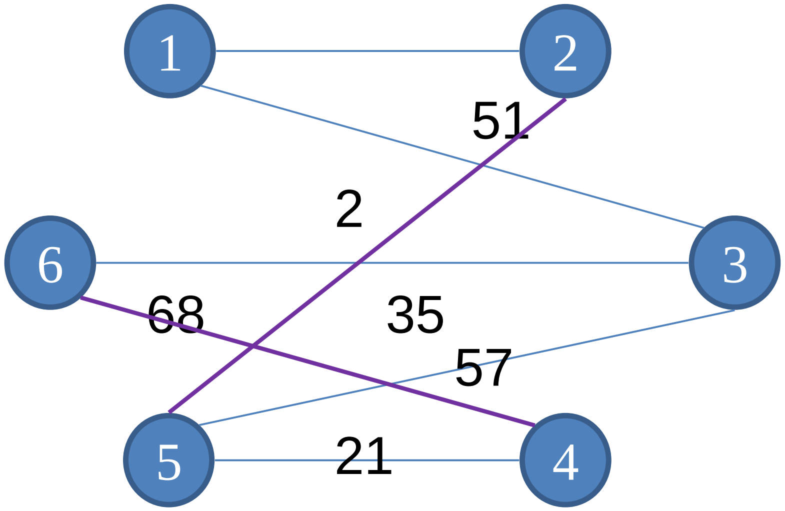
- Μέθοδος με ελάχιστα ζευγνύοντα δένδρα

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Prim προκύπτει το ζευγνύον δένδρο που φαίνεται και ακολούθως με μία αναζήτηση κατά βάθος λαμβάνεται το αποτέλεσμα

O(m+nlogn)

Μέθοδος με Ελάχιστα Ζευγνύοντα Δένδρα – Παράδειγμα ΙΙ

- Με αφετηρία του dfs την κορυφή 3 (3,1,2,5,4,6,3) βάρος 212
- Με αφετηρία του dfs την κορυφή 1 (1,2,3,5,4,6,1) βάρος 237 κλπ

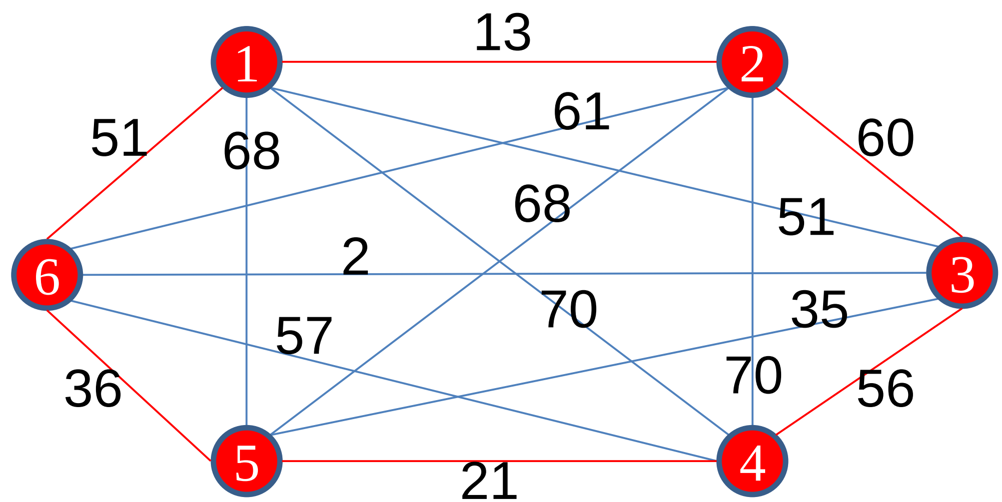


Μέθοδος με Διαδοχικές ανταλλαγές ακμών

1. Θεωρείται ένας Hamiltonian κύκλος $C=(v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1)$
2. Για κάθε i,j, τέτοια ώστε $1<i+1<j<n$, λαμβάνεται ένας νέος Hamiltonian κύκλος $C_{i,j}=(v_1,v_2,\ldots,v_i,v_j,v_{j-1},\ldots,v_{i+1}, v_{j+1},v_{j+2},\ldots,v_n,v_1)$ διαγράφοντας τις ακμές (v_i,v_{i+1}) και (v_j,v_{j+1}) και προσθέτοντας τις ακμές (v_i,v_j) και (v_{i+1},v_{j+1}).
3. Αν για κάποια i,j προκύψει $w(v_i,v_j)+w(v_{i+1},v_{j+1})<w(v_i,v_{i+1})+w(v_j,v_{j+1})$ τότε θέτουμε $C=C_{i,j}$. Πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Μέθοδος με Διαδοχικές ανταλλαγές ακμών – Παράδειγμα

- Μέθοδος με διαδοχικές ανταλλαγές ακμών



(3,4,5,6,1,2,3) βάρος 237

(3,6,5,4,1,2,3) βάρος 210

(3,6,5,4,2,1,3) βάρος 193

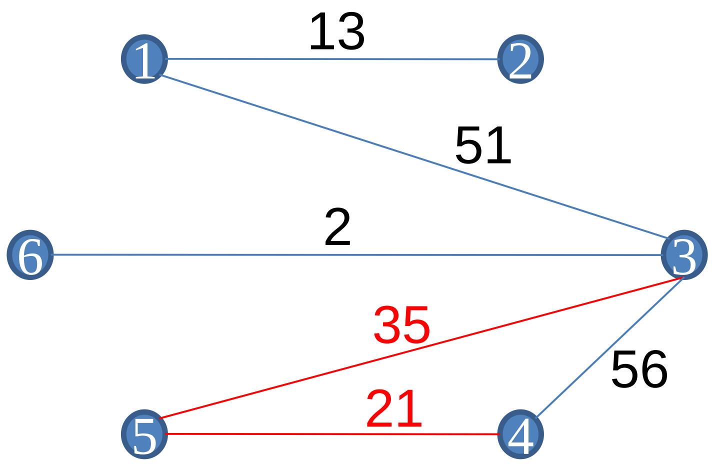
(3,6,1,2,4,5,3) βάρος 192

Ο τελευταίος κύκλος δεν βελτιώνεται περισσότερο αλλά μπορεί να βρεθεί μικρότερος κύκλος με άλλη κορυφή ως αφετηρία.

Πρακτική εύρεση κάτω φράγματος

- Μέθοδος πρακτικής εύρεσης κάτω ορίου σε πρόβλημα TSP:
  - Θεωρούμε ελάχιστο ζευγνύον δένδρο σε γράφο G–v με βάρος w(T)
  - Θεωρούμε δύο ακμές προσπίπτουσες στο v έτσι ώστε το άθροισμα των βαρών τους να είναι ελάχιστο

Πρακτική εύρεση κάτω φράγματος – Παράδειγμα



- Αν v=5, τότε w(T)=122, 122+21+35=178 =κάτω φράγμα

Το μέγεθος του TSP I

- 100,000 = 10^5 άνθρωποι σε ένα γήπεδο
- 5,500,000,000 = 5.5×10^9 άνθρωποι στη γη
- 1,000,000,000,000,000,000,000 = 10^{21} λίτρα νερού στη γη
- 1010 years = 3×10^{17} seconds η ηλικία του σύμπαντος

Το μέγεθος του TSP II

# of cities n	possible solutions (n-1)! = # of cyclic permutations
10	≈ 181,000
20	≈ 10,000,000,000,000,000 = 10^{16}
50	≈100,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000= 10^{62}

Εφαρμογή TSP για πόλεις των ΗΠΑ

- Το 1954 λύθηκε το πρόβλημα TSP για 49 πόλεις των ΗΠΑ George Dantzig, Ray Fulkerson, Selmer Johnson
- Το 1954 λύθηκε το πρόβλημα TSP για 13,509 πόλεις των ΗΠΑ με πληθυσμό άνω των 500 κατοίκων

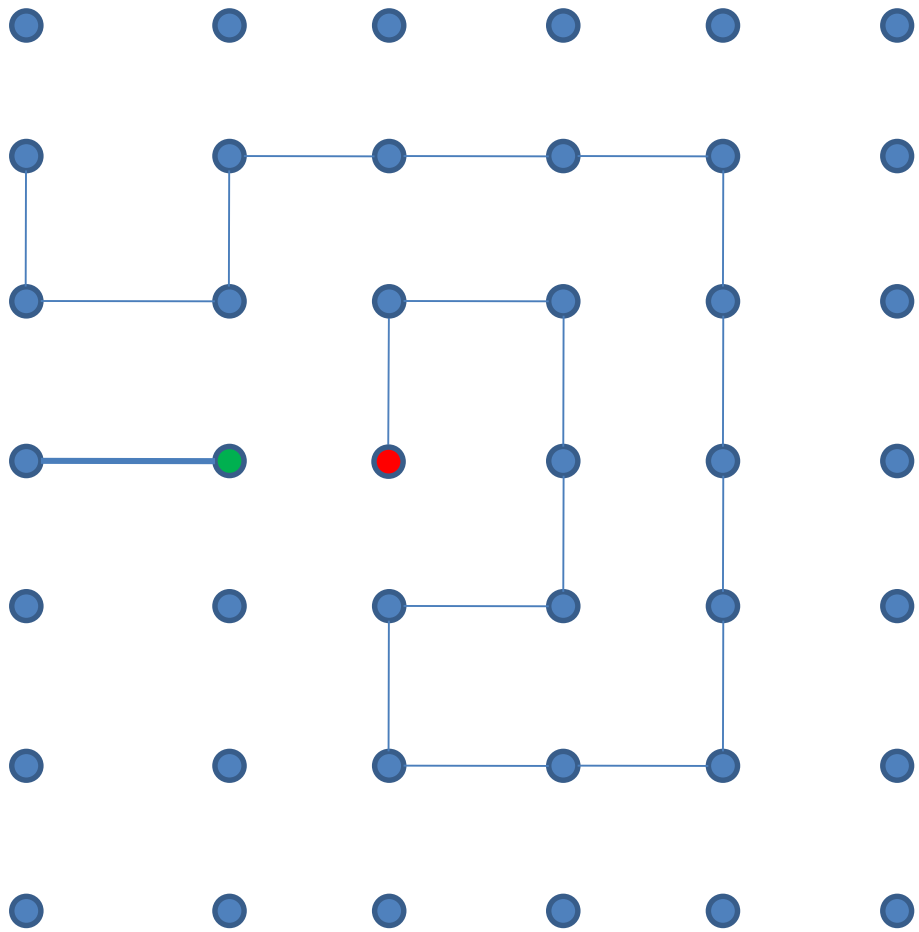
Εφαρμογή TSP στην Ευρώπη

- Εφαρμογή TSP για 100 πόλεις της Ευρώπης
  - Το μήκος του βέλτιστου κύκλου είναι 21134 km.
- Εφαρμογή TSP για 120 πόλεις της Γερμανίας
  - Το μήκος του βέλτιστου κύκλου είναι 6942 km.
  - Πλήθος λύσεων (179 ψηφία)

Άπειροι γράφοι

- Οι κορυφές είναι σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες, ενώ οι ακμές ενώνουν κορυφές σε απόσταση 1
- Σε άπειρο γράφο **δεν** υπάρχει κύκλωμα Euler ή κύκλος Hamilton, αλλά υπάρχουν τα αντίστοιχα μονοπάτια
- Μονοπάτι Euler είναι το μονοπάτι που είναι άπειρο προς τις δύο κατευθύνσεις (two-way) και περνά από όλες τις ακμές.
- Ένα Hamiltonian μονοπάτι άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις είναι ένας **2-παράγοντας**.
- **Μονοδρομικό** (one-way) μονοπάτι Euler/Hamilton είναι το μονοπάτι που ξεκινά από μία κορυφή και επεκτείνεται επ'άπειρο (space filling curve)

Παράδειγμα



Μαγικά τετράγωνα

Γραμμές, στήλες και διαγώνιοι έχουν ίσο άθροισμα

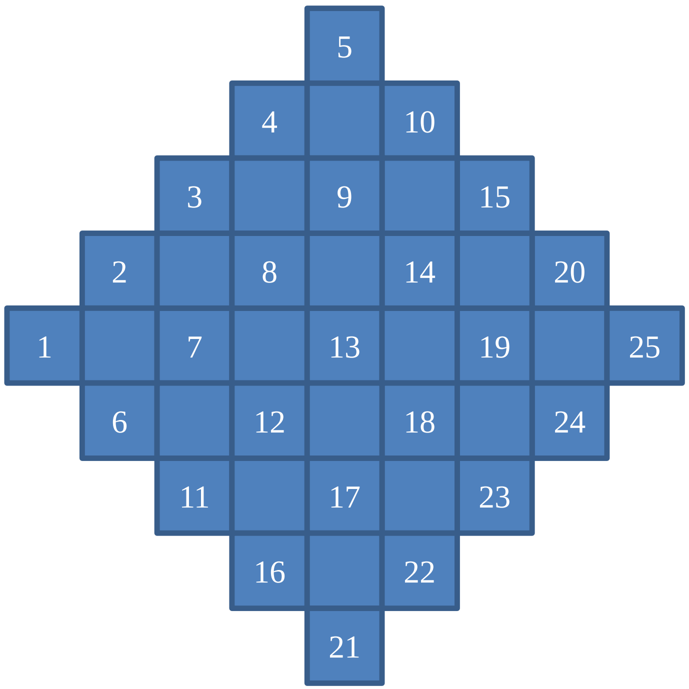
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

23	1	2	20	19
22	16	9	14	4
5	11	13	15	21
8	12	17	10	18
7	25	24	6	3

Αλγόριθμοι μαγικών τετραγώνων

- Αλγόριθμοι κατασκευής μαγικών τετραγώνων (περιττής τάξης):
  - Διαδοχική τοποθέτηση αριθμών των 1,2,... σε επάνω δεξιά κελί, αρχίζοντας από το μεσαίο επάνω κελί
  - Προσθέτοντας σε κάθε θέση του βασικού μαγικού τετραγώνου τον ίδιο τυχαίο αριθμό
  - Αντικαθιστώντας τους αριθμούς [1..9] με τους 9 διαδοχικούς περιττούς αριθμούς [3..17]
  - Μέθοδος Bachet (με ρόμβο)
  - με άλλα τεχνάσματα…

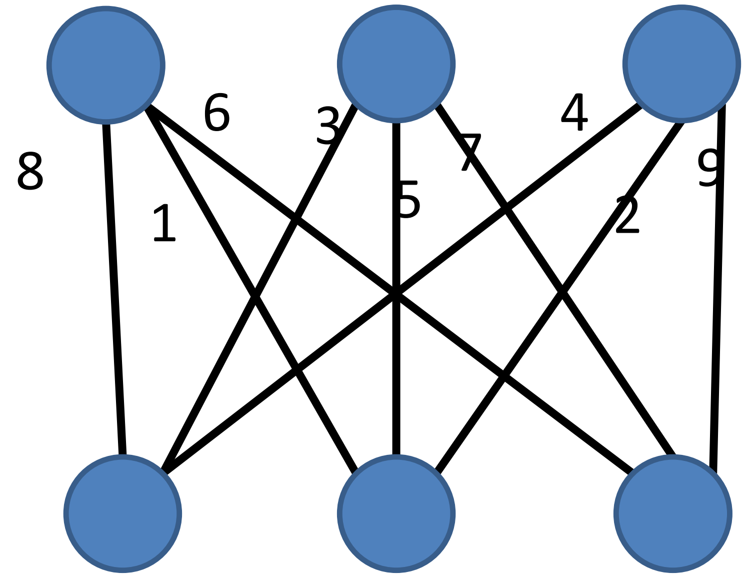
Μέθοδος Bachet – Παράδειγμα



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Μαγικοί γράφοι - Παράδειγμα

Μαγικός λέγεται ο γράφος όπου το άθροισμα των επιγραφών των ακμών που προσπίπτουν σε όλες τις κορυφές είναι ίσο



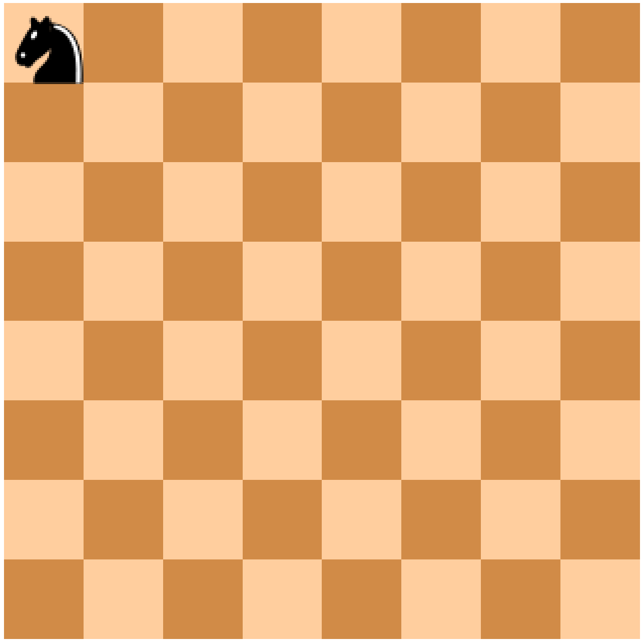
$K_{3,3}$

Μαγικοί γράφοι

- <u>Θεώρημα</u>: αν ένας διμερής γράφος μπορεί να αποσυντεθεί σε 2 κύκλους Hamilton, τότε ο γράφος είναι μαγικός.
- **Αντιμαγικός** λέγεται ο γράφος όπου τα αθροίσματα των επιγραφών των ακμών που προσπίπτουν σε όλες τις κορυφές είναι διάφορα μεταξύ τους.
- Πλήθος μαγικών αντικειμένων (ομόκεντρα τετράγωνα, τετράγωνα με ντόμινο, πολύγωνα κλπ)

Περίπατος του Ιππότη/αλόγου Ι

Σε σκακιέρα 8x8, είναι δυνατόν το άλογο να ακολουθήσει ένα μονοπάτι που να επισκέπτεται μία φορά όλα τα τετράγωνα ;



Περίπατος του Ιππότη/αλόγου ΙΙ

- Υπάρχουν δισεκατομμύρια λύσεις-μονοπάτια, εκ των οποίων κλειστά είναι τα 122.οοο.οοο.
- Δόθηκαν λύσεις στο πρόβλημα κατά τον 9ο αιώνα
- 1759: Η Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου θέσπισε βραβείο 4000 φράγκων για τη λύση του προβλήματος.
- Το πρόβλημα λύθηκε το 1766 από τον Euler
- Το βραβείο δεν δόθηκε στον Euler επειδή ήταν Διευθυντής των Μαθηματικών στην Ακαδημία και δεν ήταν επιλέξιμος. [Αποσύρθηκε από τη θέση και την κατέλαβε ο Lagrange].

Περίπατος του Ιππότη/αλόγου ΙΙΙ

- Υπάρχουν δισεκατομμύρια λύσεις-μονοπάτια, εκ των οποίων κλειστά είναι τα 122.ooo.ooo.
- Δόθηκαν λύσεις στο πρόβλημα κατά τον 9ο αιώνα

Περίπατος του Ιππότη - Euler

Μαγικό τετράγωνο του Euler

1	48	31	50	33	16	63	18	260
30	51	46	3	62	19	14	35	260
47	2	49	32	15	34	17	64	260
52	29	4	45	20	61	36	13	260
5	44	25	56	9	40	21	60	260
28	53	8	41	24	57	12	37	260
43	6	55	26	39	10	59	22	260
54	27	42	7	58	23	38	11	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Ποιος είναι ο μαγικός αριθμός;

$$\frac{n(n+1)}{16}$$

$$\frac{64 \times 65)}{16}$$

Περίπατος του Ιππότη/αλόγου Λύση DeMoivre

34	49	22	11	36	39	24	♞ 1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

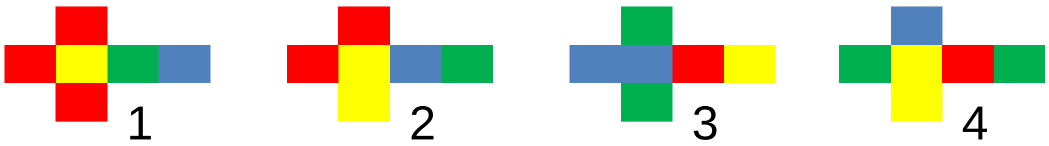
Λύση DeMoivre - Κίνηση περιμετρικά

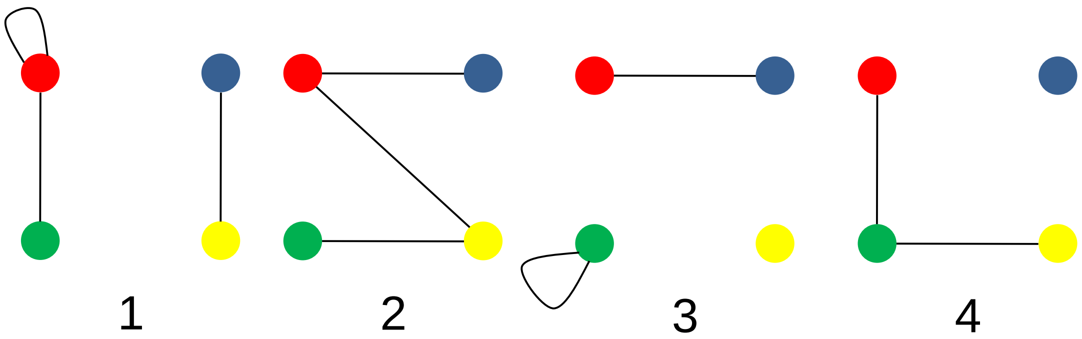
Στιγμιαία παραφροσύνη Ι

- 4 κύβοι που περιέχουν όλα τα 4 χρώματα (κόκκινο, μπλε, πράσινο και άσπρο). Ο στόχος είναι να βάλουμε τον έναν κύβο επάνω στον άλλο έτσι ώστε κάθε πλευρά (μπροστά – πίσω – αριστερά – δεξιά) να έχει και τα 4 χρώματα.
  Η κατανομή χρωμάτων είναι μοναδική σε κάθε κύβο.
- $24\times 24 \times 24 \times 3=41472$

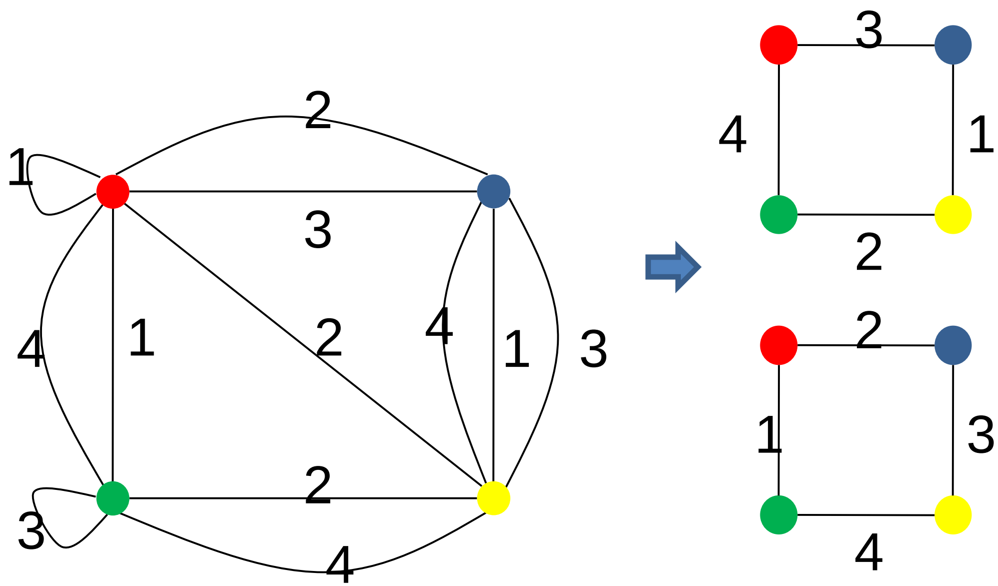
Στιγμιαία παραφροσύνη ΙΙ

Κάθε κύβος αναπαρίσταται από ένα γράφο με 4 κορυφές (μία για κάθε χρώμα)





Στιγμιαία παραφροσύνη III



- Παίρνουμε την ένωση των 4 γράφων.
- Βρίσκουμε 2 Hamiltonian κύκλους ξένους ως προς τις ακμές και με διακριτές επιγραφές ακμών.
- Οι κύκλοι αυτοί αντιπροσωπεύουν την εμπρόσθια και την οπίσθια όψη του παραλληλεπιπέδου

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.