



ΦΥΣΙΚΗ

Ενότητα 5: Ελαστική Δυναμική Ενέργεια- Ελαστικότητα-Παραμόρφωση-Νόμος του Hooke

Παπαζάχος Κωνσταντίνος

Καθηγητής Γεωφυσικής, Τομέας Γεωφυσικής

Τσόκας Γρηγόρης

Καθηγητής Εφαρμοσμένης Γεωφυσικής, Τομέας Γεωφυσικής

Τμήμα Γεωλογίας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

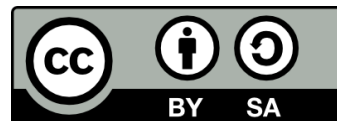


ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



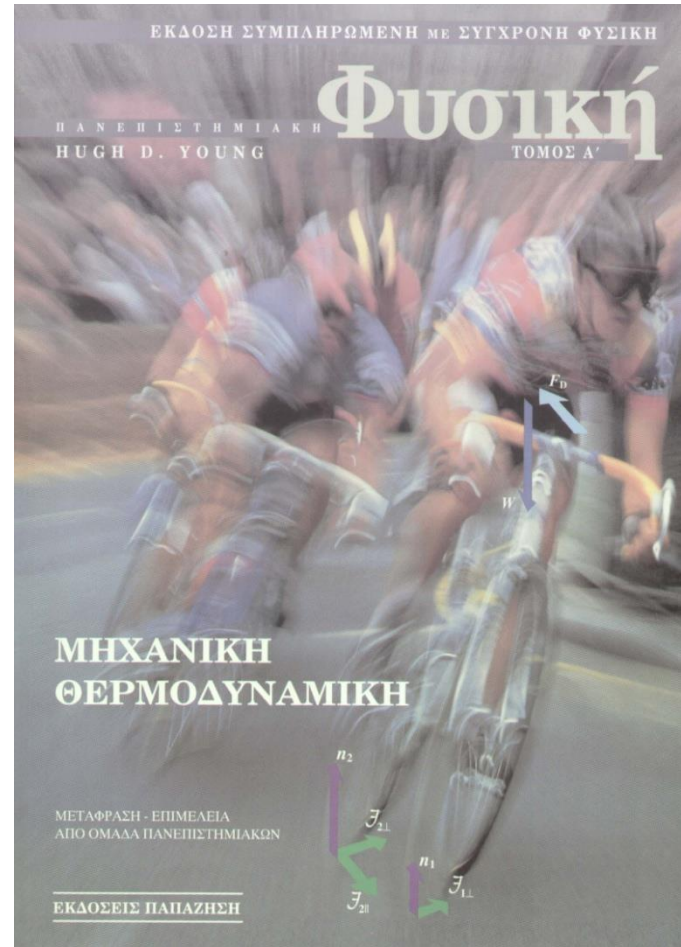
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ενημέρωση

- Η διδασκαλία του μαθήματος, πολλά από τα σχήματα και όλες οι ασκήσεις προέρχονται από το βιβλίο:
- «Πανεπιστημιακή Φυσική» του Hugh Young των Εκδόσεων Παπαζήση, οι οποίες μας επέτρεψαν τη χρήση των σχετικών σχημάτων και ασκήσεων.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-1

Τι είναι *Δυναμική ενέργεια* ;

- ✓ Εξαιρετικά δύσκολο να οριστεί!!!
- ✓ Ενέργεια που συνδέεται με τη θέση και όχι με την κίνηση.
- ✓ Οι σχετικές δυνάμεις λέγονται διατηρητικές δυνάμεις.
- ✓ Η ολική μηχανική ενέργεια είναι η κινητική και η δυναμική.
- ✓ Όταν η ολική ενέργεια είναι σταθερή, το σύστημα λέγεται διατηρητικό.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-2

Παράδειγμα

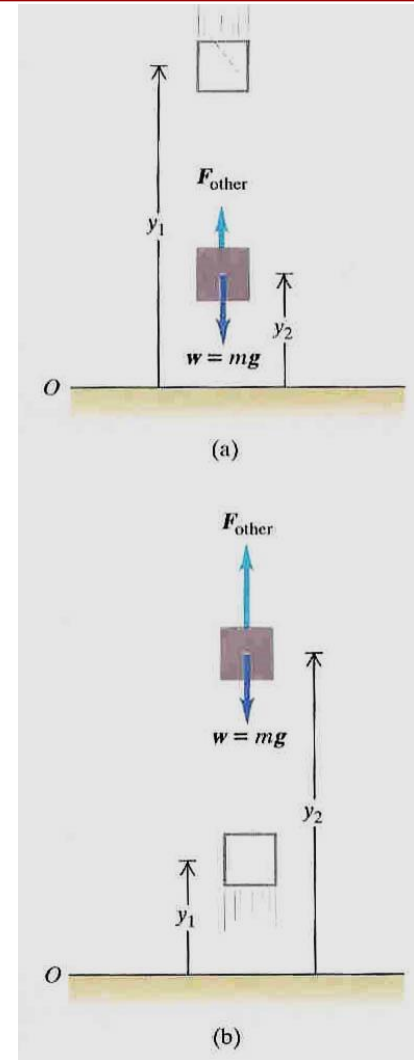
Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

✓ Άμεσα συνδεδεμένη με τη θέση ενός σώματος σε σχέση με τη Γη

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

✓ Η ποσότητα $U = mgy$ ($w * y$) ονομάζεται βαρυτική ενέργεια

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = \textcircled{-\Delta U}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-3

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

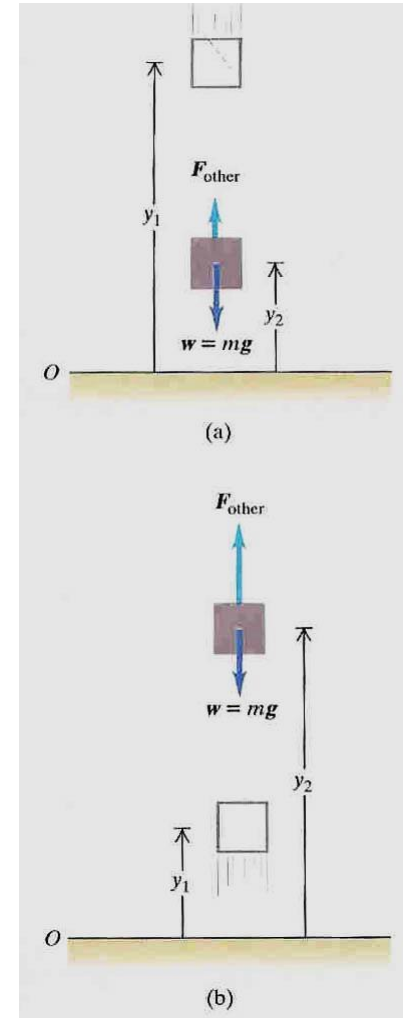
$$\text{Έστω } \vec{F}_{\text{other}} = 0$$

$$W_{tot} = W_{grav} = U_1 - U_2$$

$$W_{tot} = K_2 - K_1 \Rightarrow U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Ολική μηχανική ενέργεια



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-4

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

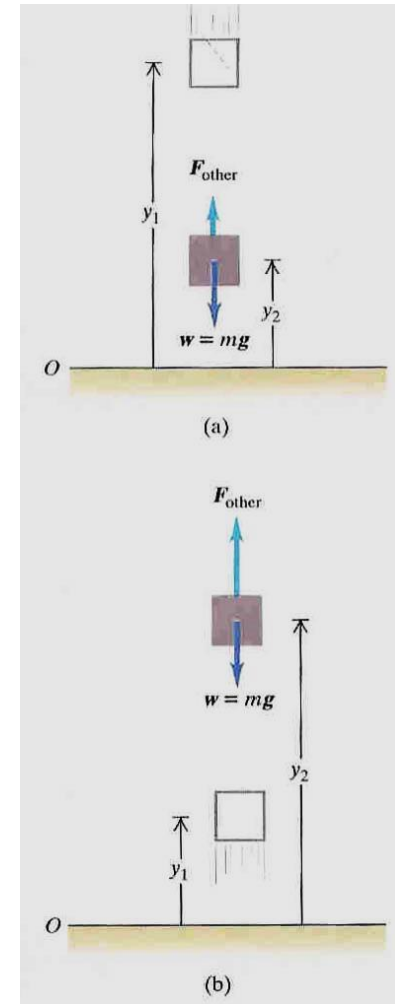
$$\text{Αν } \vec{F}_{other} \neq 0$$

$$W_{tot} = W_{grav} + W_{other} = K_2 - K_1$$

$$U_1 - U_2 + W_{other} = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

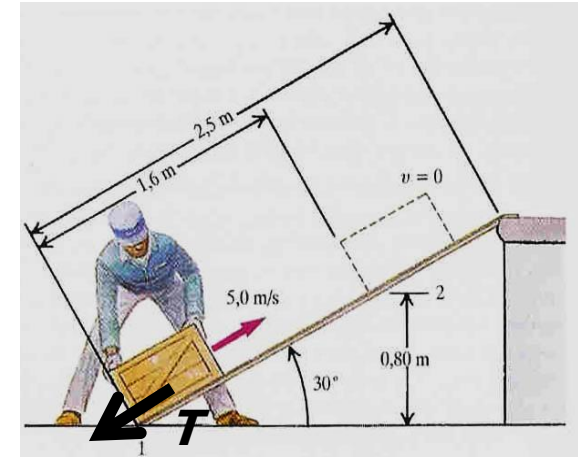
Το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις (εκτός από τη βαρυτική) ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανική ενέργειας.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-5

Παράδειγμα 7-7

Κιβώτιο μάζας 80Kg πρέπει να μεταφορτωθεί με ολίσθηση κατά μήκος μίας ράμπας μήκους 2.5m και κλίσης 30° . Ο εργάτης εκτίμησε ότι αν το κινήσει με ταχύτητα 5m/s από το κατώτατο σημείο θα φορτωθεί κανονικά. Όμως λόγω τριβής το φορτίο προχώρησε 1.6m και επέστρεψε. Βρείτε: α) Ποια η τριβή; β) Με τι ταχύτητα επιστρέφει στο κάτω μέρος της ράμπας.



$$W_{\text{other}} = W_T = -Ts$$

$$U_1 + K_1 + W_T = U_2 + K_2$$

$$0 + \frac{1}{2} 80 * 5^2 + W_T = 0 + 80 * 9.8 * 1.6 * \sin 30^\circ$$

$$W_T = -373\text{J} \Rightarrow T = \frac{373}{1.6} = 233\text{N}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-6

Παράδειγμα 7-7

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_3$$

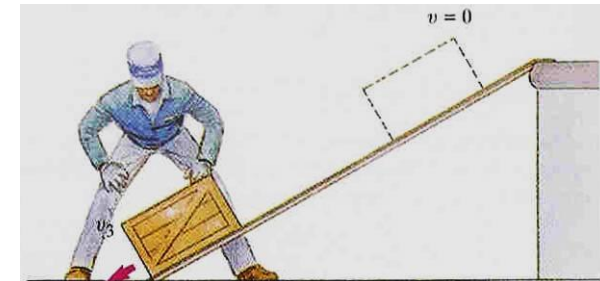
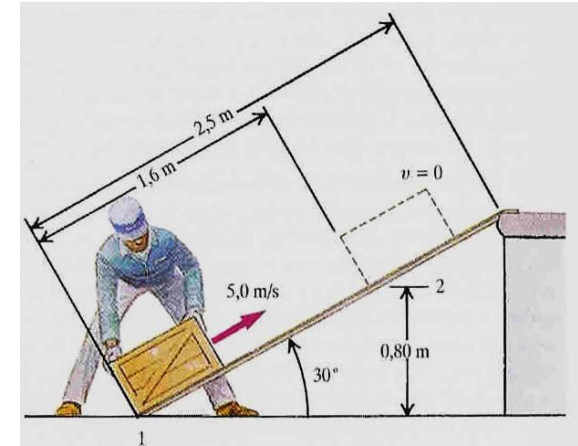
$$U_1 = U_3$$

$$K_1 + W_{other} = K_3$$

$$W_{other} = W_T = -T(2s) = -746J$$

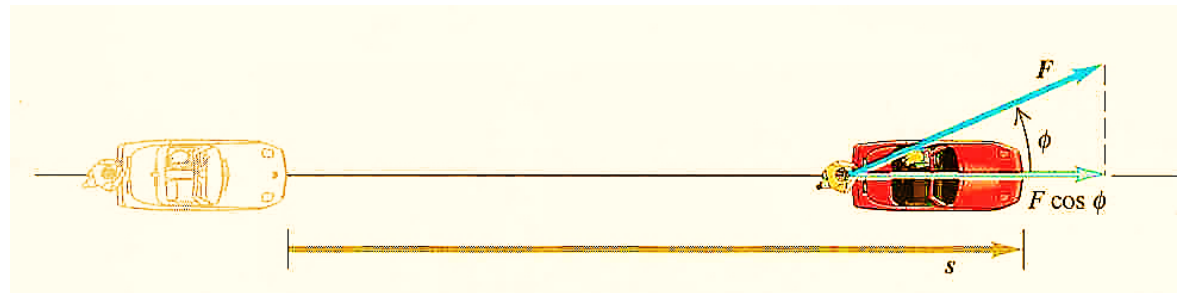
$$\frac{1}{2} 80 * 5^2 - 746 = \frac{1}{2} 80 * v_3^2 \Rightarrow$$

$$v_3 = 2.5m / s$$



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-1

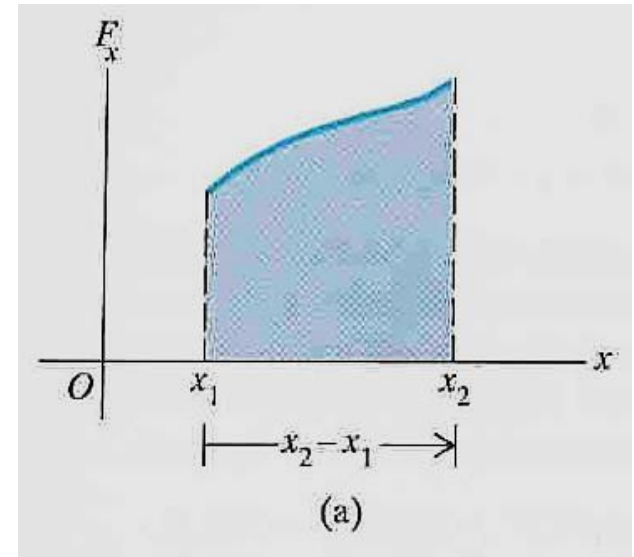
Έργο



$$W = F s \cos \phi \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Μεταβαλλόμενη δύναμη στην
ευθύγραμμη κίνηση

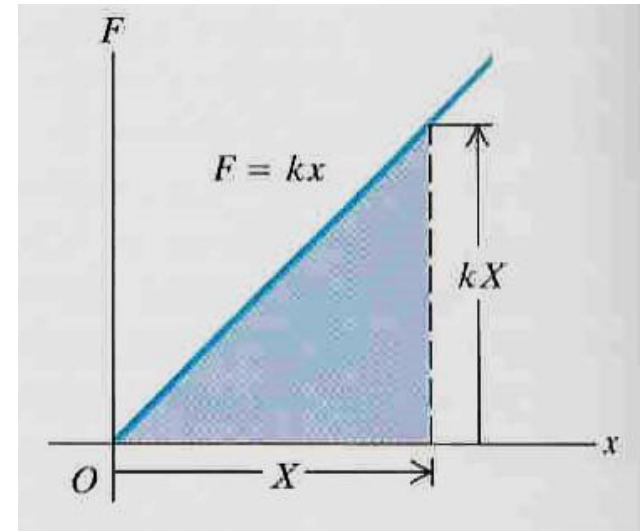
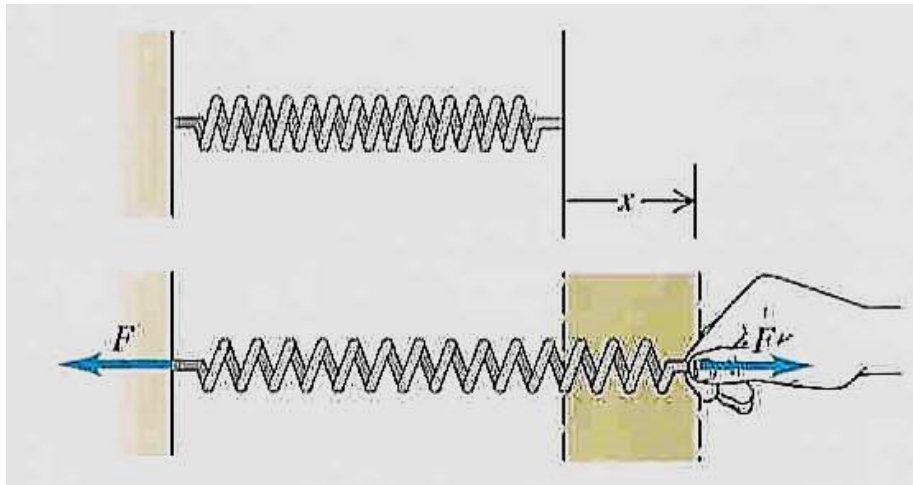
$$W = \int dW = \int F dx$$



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-2

Έργο $W = \int dW = \int F dx$

$$F = kx$$



$$W = \frac{1}{2} kx^2$$



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-3

Μέση Ισχύς

**Μέση ενέργεια
ανά μονάδα χρόνου**

$$P_{av} = \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Στιγμιαία Ισχύς

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-4

$$W = Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad K = \frac{1}{2}mv^2$$

Κινητική Ενέργεια!!!

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Το έργο που παράγεται από τη συνισταμένη εξωτερική δύναμη επί ενός σωματίου είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-5

Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2 = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$\vec{F}_{other} = 0$ *Ολική μηχανική ενέργεια*
 $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$\vec{F}_{other} \neq 0$ $U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$

Το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις (εκτός από τη βαρυτική) ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας



ΣΥΝΟΨΗ 4^{ου} Μαθήματος-6

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

- ✓ Καθορισμός αρχικής (1) και τελικής (2) κατάστασης
- ✓ Καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων (το y προς τα πάνω για τη σχέση $U=mgy$)
- ✓ Καταγραφή τιμών ενέργειας (K_1, K_2, U_1, U_2)
- ✓ Υπολογισμός έργου άλλων δυνάμεων W_{other}
- ✓ Χρήση σχέσης: $U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$
- ✓ Προσοχή: Η βαρύτητα στο ΔU , άλλες δυνάμεις στο W_{other}



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Δυναμική ενέργεια

Υποκαθιστά την ανάγκη υπολογισμού του έργου κάποιας δύναμης

Παράδειγμα: Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

Χωρίς θεώρηση
Δυναμικής Ενέργειας

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Με θεώρηση
Δυναμικής Ενέργειας

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$W_{tot}$$

Έργο όλων των δυνάμεων

$$W_{other}$$

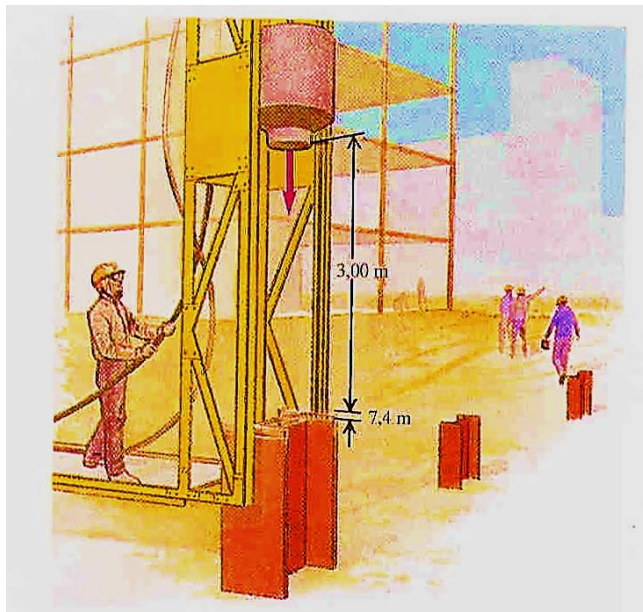
Έργο όλων των δυνάμεων
εκτός των βαρυτικών



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-1

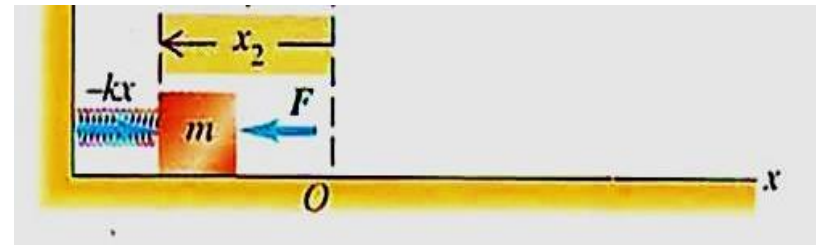
Ελατήρια: Αποθήκες μηχανικής ενέργειας

Αποθήκευση ενέργειας από
το βαρυτικό πεδίο



Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

Αποθήκευση ενέργειας στο
ελατήριο

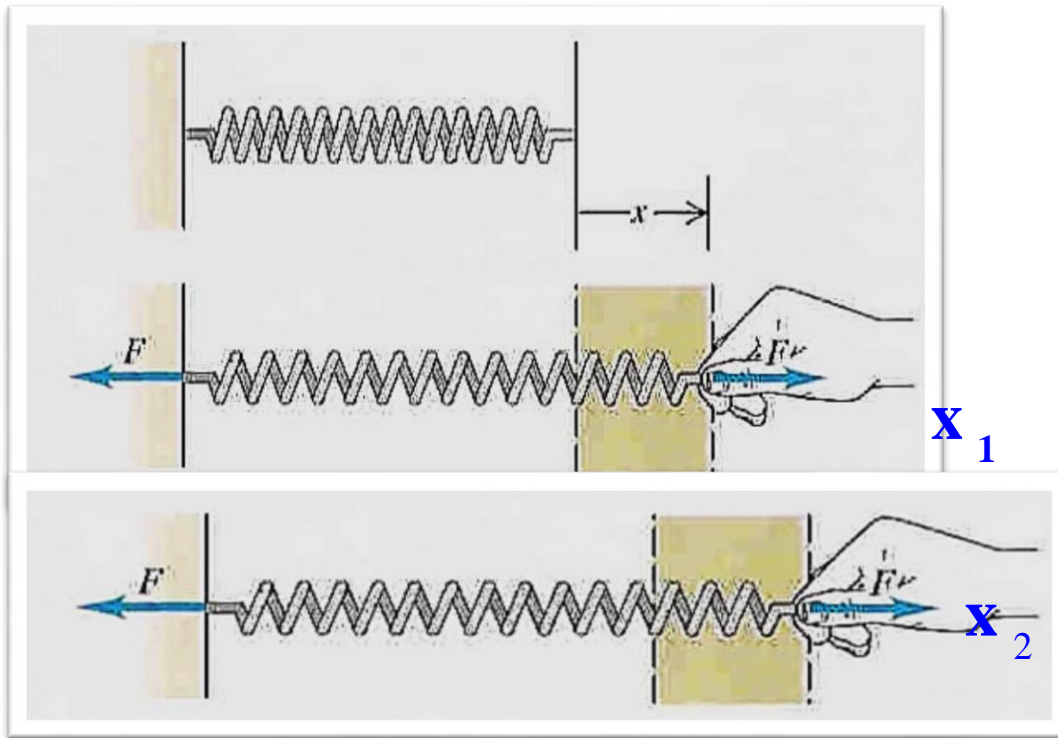


Ελαστική Δυναμική ενέργεια



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-2

Έργο που παράγουμε επί του ελατηρίου

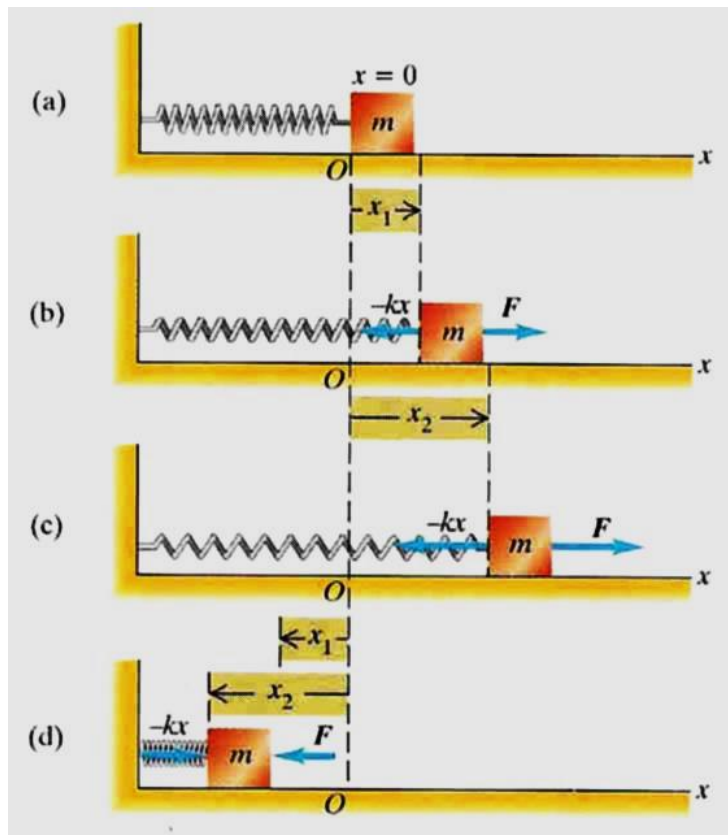


$$W = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-3

Έργο που παράγεται από το ελατήριο



$$F = -kx$$

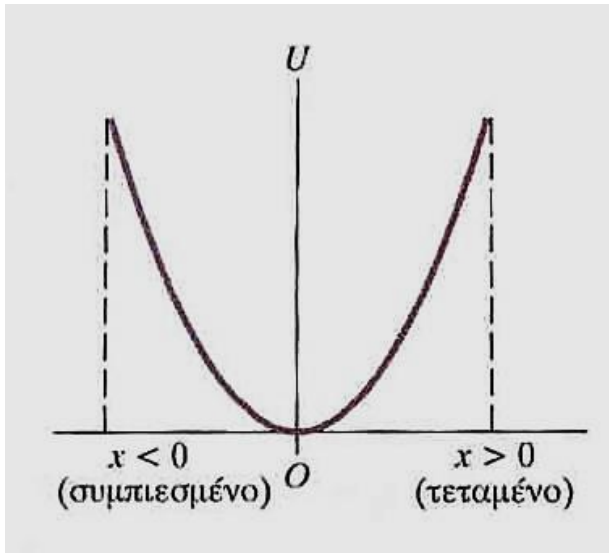
$$W_{el} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

Η ποσότητα $\frac{1}{2} kx^2$
ονομάζεται ελαστική δυναμική
ενέργεια

$$W_{el} = U_1 - U_2 = \Delta U$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-4



$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad W_{el} = -\Delta U$$

$$\text{Έστω } \vec{F}_{\text{other}} = 0$$

$$W_{tot} = W_{el} = U_1 - U_2$$

$$W_{tot} = K_2 - K_1 \Rightarrow U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Διατήρηση ολικής μηχανικής ενέργεια



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-5

$$W_{el} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$\text{Αν } \vec{\mathbf{F}}_{\text{other}} \neq 0$$

$$W_{tot} = W_{el} + W_{other} = K_2 - K_1$$

$$U_1 - U_2 + W_{other} = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

Το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις (εκτός από την ελαστική) ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας



ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗ & ΒΑΡΥΤΙΚΗ

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + mgy \qquad K = \frac{1}{2} mv^2$$

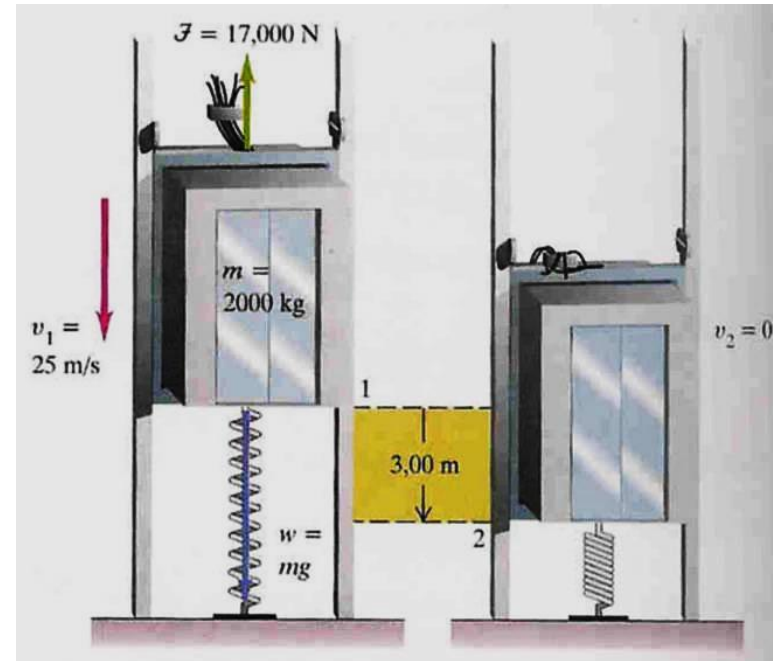
$$\frac{1}{2} kx_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 + W_{other} = \frac{1}{2} kx_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-6

Παράδειγμα 7-11

Σε ένα «καταστροφικό» σενάριο, σε ένα ανελκυστήρα μάζας 2000Kg κόβεται το συρματόσχοινο και ο ανελκυστήρας με ταχύτητα 25m/s πέφτει σε ελατήριο απορρόφησης και το συμπιέζει 3m . Παράλληλα, ένας σφιγκτήρας ασφαλείας ασκεί δύναμη τριβής 17000N στο ασανσέρ. α) Ποια η σταθερά του ελατηρίου; β) Τι θα γίνει μετά τη συμπίεση του ελατηρίου;



$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$\frac{1}{2} kx_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 + W_{other} = \frac{1}{2} kx_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

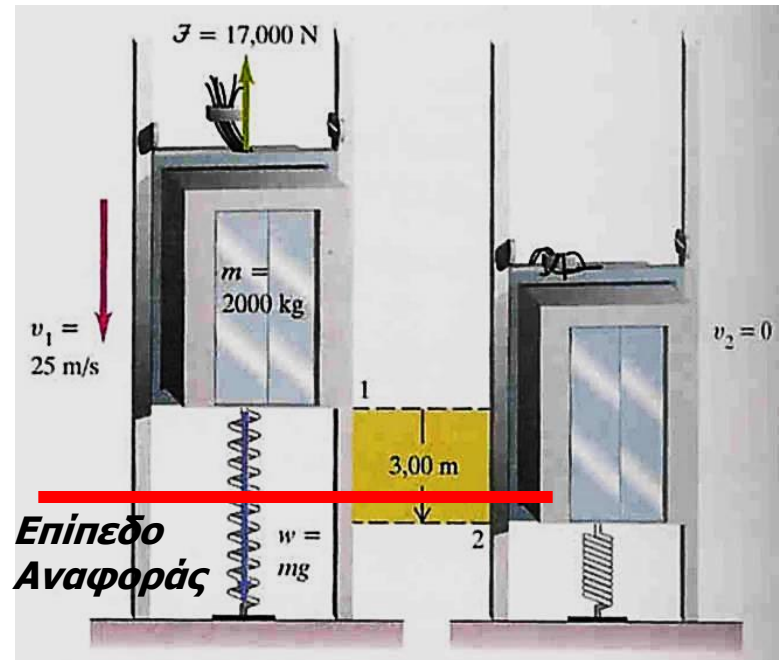


ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-7

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$0 + 0 + \frac{1}{2} 2000 * v^2 - 17000 * 3 = \frac{1}{2} k 3^2 - 2000 * 9.8 * 3 + 0$$

$$k = 1.41 * 10^5 N / m$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-8

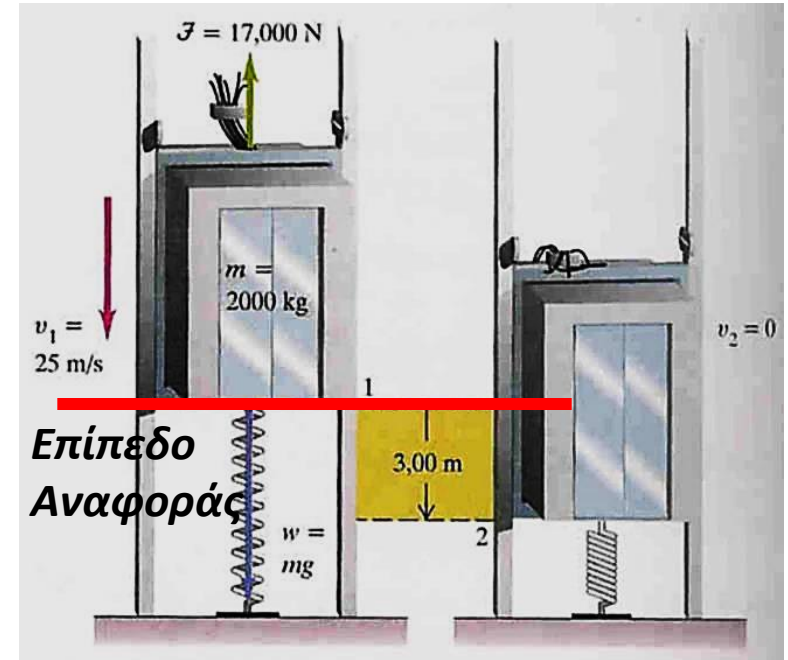
γ) Αν η τριβή του μηχανισμού ασφαλείας εφαρμόζεται συνέχεια με τη ταχύτητα θα φύγει το ασανσέρ από το ελατήριο;

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$\text{Αφού } k = 1.41 \cdot 10^5 \text{ N / m}$$

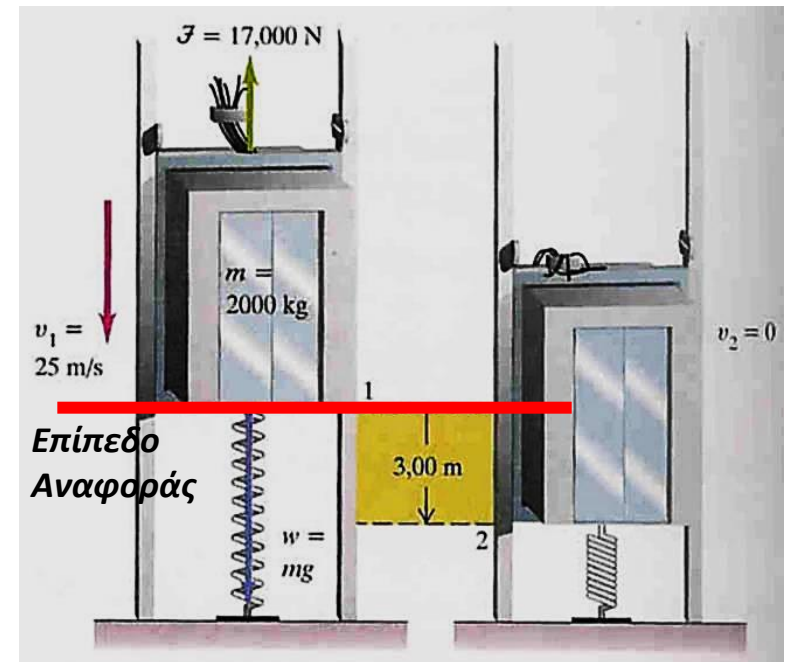
$$0 + 0 + \frac{1}{2} 2000 * v^2 - 17000 * 3 = \frac{1}{2} k 3^2 - 2000 * 9.8 * 3 + 0$$

$$v = 22.9 \text{ m / s}$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-9

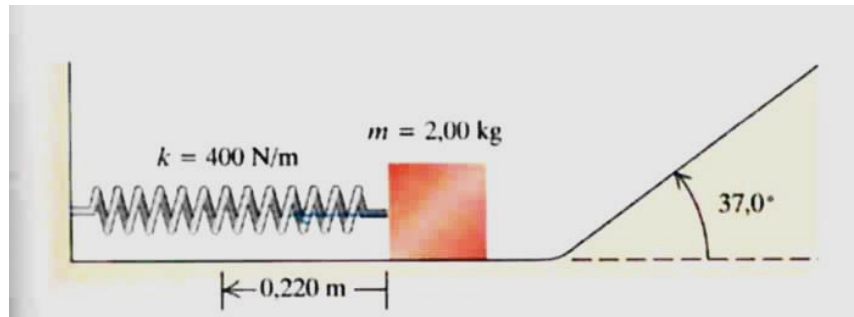
- δ) Με τι ταχύτητα θα επιστρέψει το ασανσέρ στο ελατήριο μετά την αναπήδησή του;
- ε) Ποια συνολική διαδρομή θα διανύσει το ασανσέρ προτού σταματήσει και σε ποιο ύψος θα σταματήσει;



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-10

Άσκηση 7-20

Σώμα μάζας 2Kgr συμπιέζει ελατήριο σταθεράς $k=400\text{N/m}$ κατά 0.22m . Όταν το αφήσουμε ελεύθερο ανέρχεται κατά μήκος επιφάνειας κλίσης 37° χωρίς τριβή. α) Ποια ταχύτητα έχει το σώμα μόλις φύγει από το ελατήριο; Β) Πόση διαδρομή θα διανύσει το σώμα στην επικλινή επιφάνεια πριν σταματήσει;



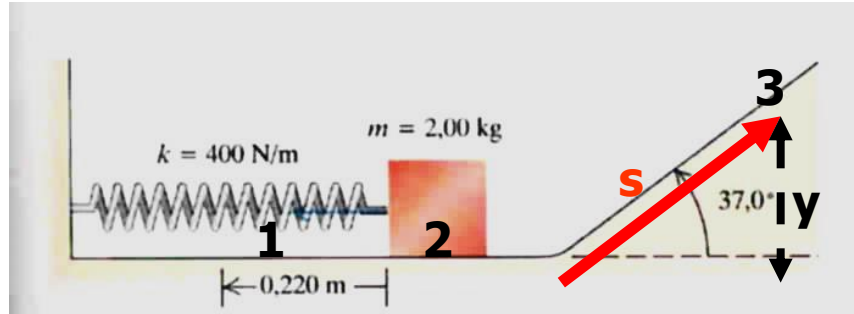
$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\frac{1}{2} kx_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$



ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-11

Άσκηση 7-20 (συνέχεια)



$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$
$$U_1 + K_1 = U_3 + K_3$$

Μόλις φύγει από το ελατήριο

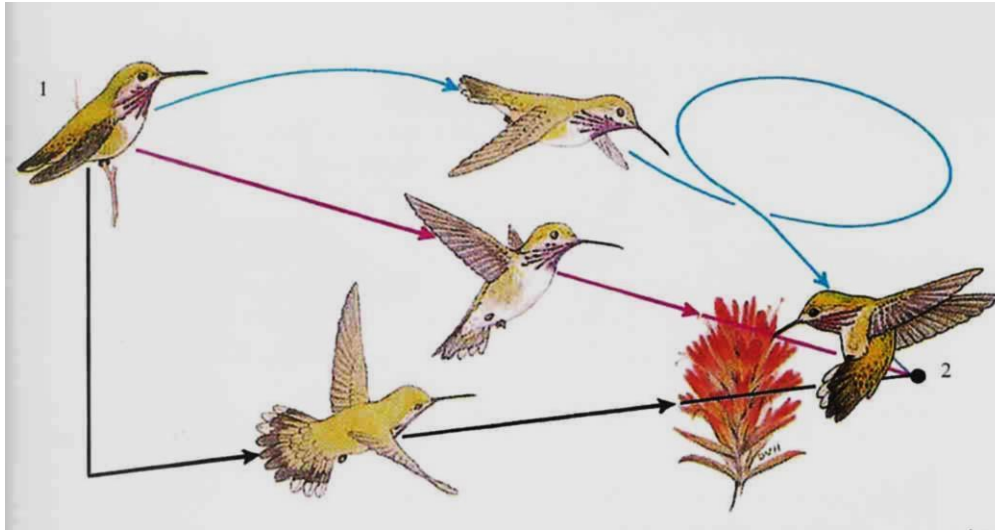
$$\frac{1}{2} 400 * 0.22^2 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 2v^2 \Rightarrow v = 3.11 \text{ m/s}$$

Μόλις σταματήσει πάνω στην επικλινή επιφάνεια

$$\frac{1}{2} 400 * 0.22^2 + 0 + 0 = 0 + 2 * 9.8 * s * \sin 37^\circ + 0$$
$$\Rightarrow s = 0.82 \text{ m}$$



ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-1



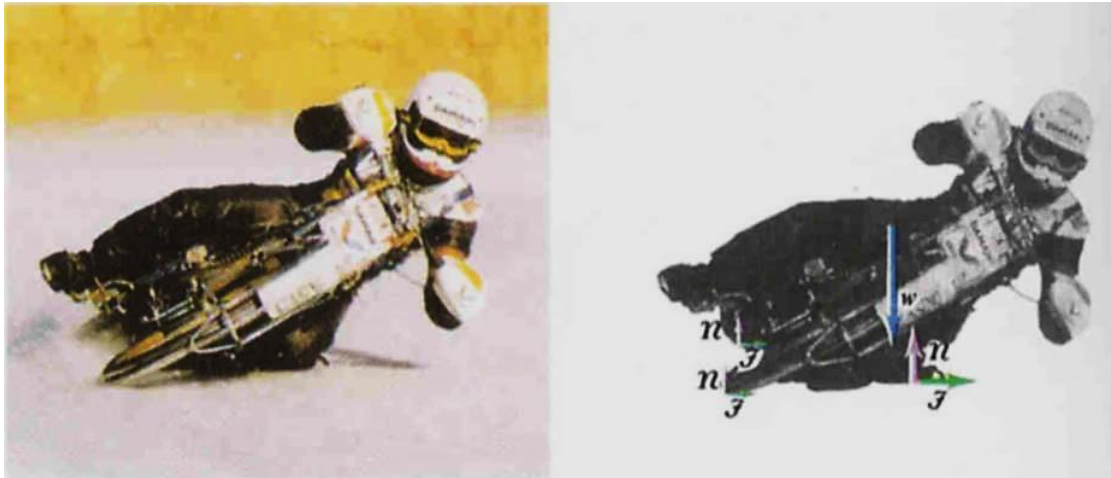
Βαρυτικό πεδίο:
Έργο ανεξάρτητο του
δρόμου διαδρομής.

**ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΗ
ΔΥΝΑΜΗ
(ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ)**

- ✓ Έργο αντιστρεπτό.
- ✓ Ανεξάρτητο της τροχιάς.
- ✓ Αν το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν, το συνολικό έργο είναι μηδέν.
- ✓ Μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά αρχικής-τελικής δυναμικής ενέργειας.



ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-2



Τριβή

ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

(ΜΗ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ)

- ✓ Έργο μη αντιστρεπτό.
- ✓ Αν το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν, το συνολικό έργο δέν είναι μηδέν.
- ✓ Δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω δυναμικής ενέργειας.



ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-1

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = -\Delta U \quad W_{el} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Σε όλες τις περιπτώσεις διατηρητικών δυνάμεων το έργο της δύναμης συνδέεται με δυναμική ενέργεια.

Παράδειγμα $F = -kx$ $W_{el} = \frac{1}{2} kx^2$

Γενικά $W = -\Delta U \Rightarrow F \Delta x = -\Delta U \Rightarrow F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad F = -\frac{dU}{dx}$$



ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-2

Παράδειγμα 7-13

Ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίο κρατείται σε ηρεμία στο $x=0$ και ένα δεύτερο κινείται ελεύθερα στον άξονα x . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $U=k/x$. Ποια ηλεκτρική δύναμη ασκείται στο κινούμενο φορτίο, ως συνάρτηση της θέσης x .

$$F = -\frac{dU}{dx} = -k\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{k}{x^2}$$



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-1

Θεώρηση του στερεού σώματος όχι ως ένα
εξιδανικευμένο μοντέλο

- ✓ Επιμήκυνση
- ✓ Θλίψη
- ✓ Στρέψη



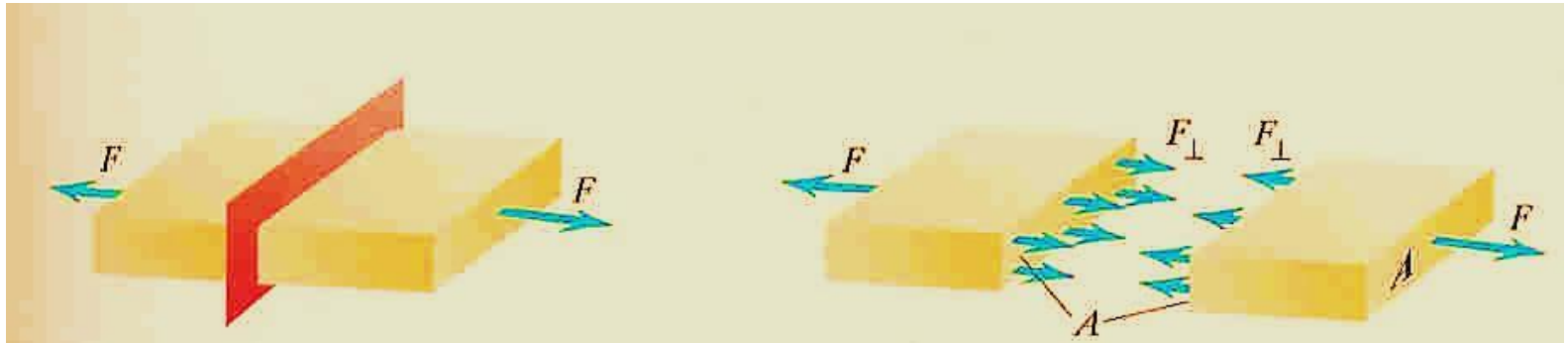
Νόμος του Hooke (για στερεά σώματα)



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-2

Εφελκυσμός

Ανάλογος εφελκυσμού ελατηρίου, τάσης σε σχοινί



Τάση εφελκυσμού

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{A}$$

**Μονάδα: $1\text{N}/\text{m}^2=1\text{Pa}$
 $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa} = 10\text{bar}$**

*Πίεση ελαστικών: $2\text{bar}=2*10^5\text{Pa}$*

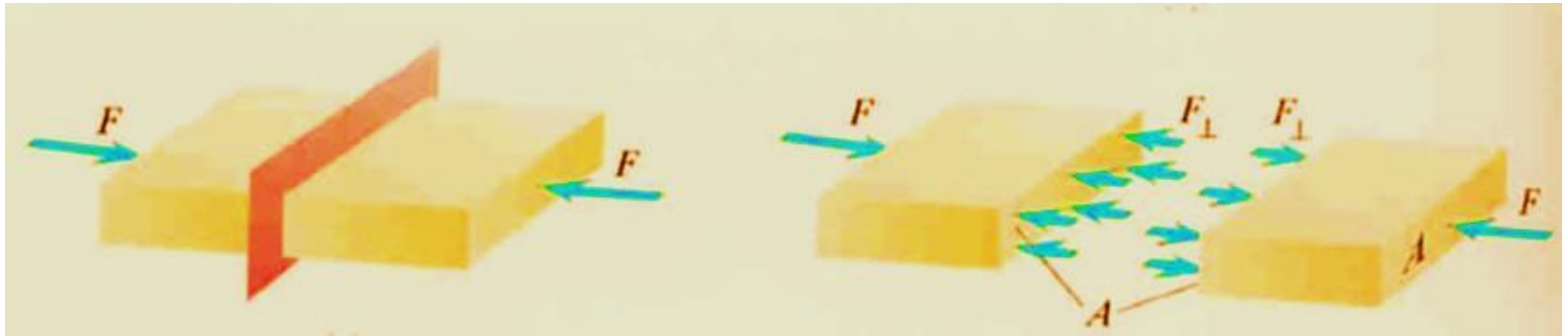
Πίεση Ατμόσφαιρας: $\sim 1\text{bar} (1.013\text{bar})$

Αντοχή ατσάλινου σχοινιού: $10^8\text{Pa}=1\text{kbar}$



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-3

Συμπίεση-Θλίψη

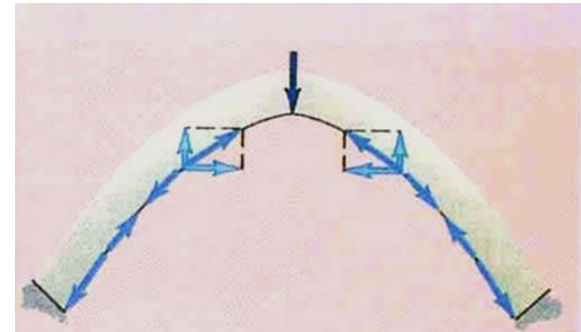
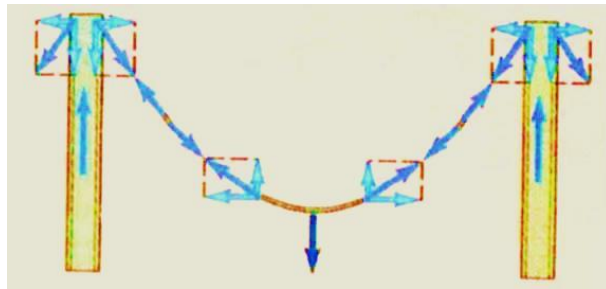
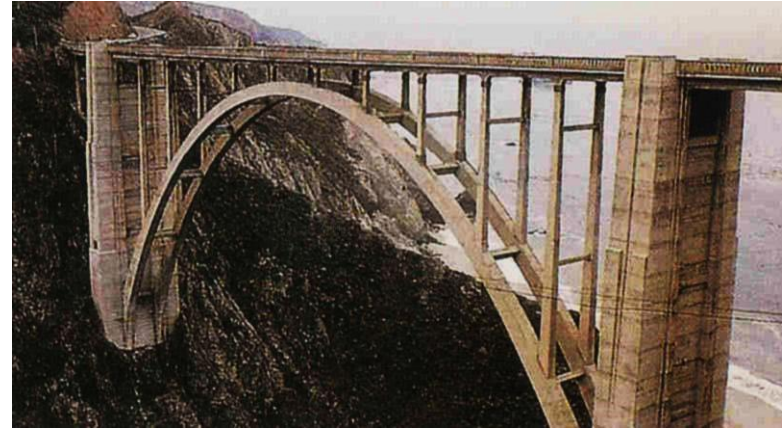
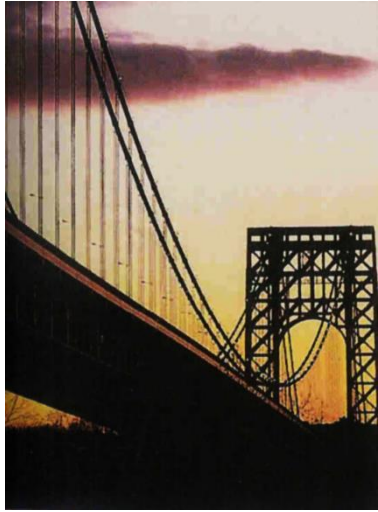


Τάση συμπίεσης ή θλιπτική τάση

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{A}$$



ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ



Εφελκυσμός στα σχοινιά
Αποτελεσματικός σε μεσαία φορτία -
μεγάλες αποστάσεις

Θλίψη στα τόξα της γέφυρας
Αποτελεσματικός σε μεγάλα φορτία -
μικρές αποστάσεις



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-4

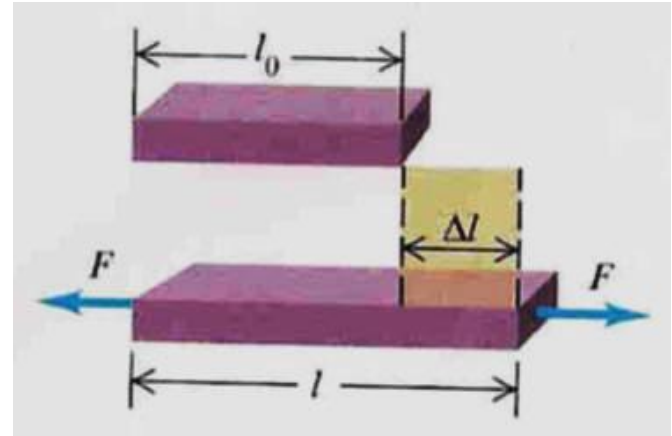
Παραμόρφωση Εφελκυσμού

Ποσοστιαία (ανηγμένη) μεταβολή μήκους

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Παραμόρφωση Συμπίεσης ή Θλιπτική παραμόρφωση

$$\tau = Y e \quad Y = \frac{\tau}{e} = \frac{\vec{F}_{\perp} l_0}{A \Delta l}$$



Νόμος του Hooke

**Y: Μέτρο του Young
(Μονάδες πίεσης)**



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-5

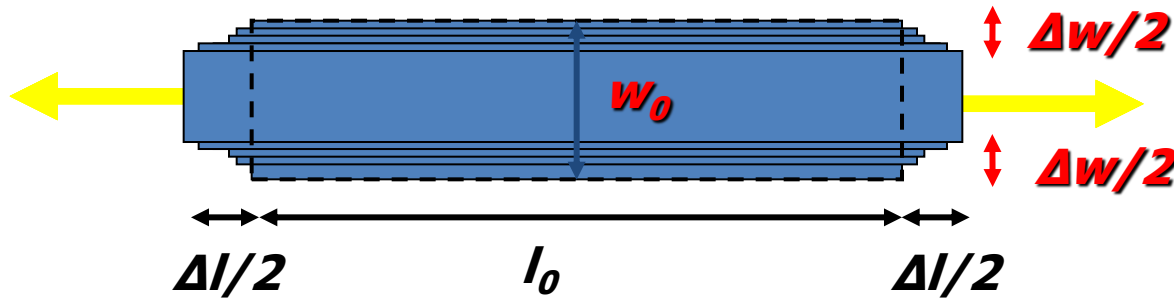
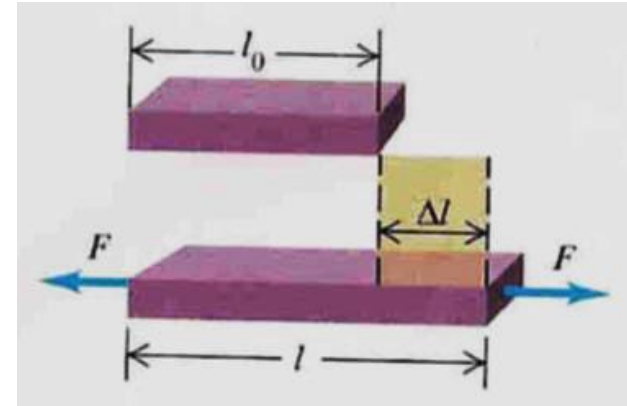
$$\tau = Y e \quad F = kx \quad \text{Νόμος Hooke}$$

Y: Δυσκολία επιμήκυνσης

✓Μόλυβδος: $0.16 \cdot 10^{11} \text{Pa} = 0.16 \text{Mbar}$

✓Ατσάλι: $2.0 \cdot 10^{11} \text{Pa} = 2.0 \text{Mbar}$

✓Βολφράμιο: $3.6 \cdot 10^{11} \text{Pa} = 3.6 \text{Mbar}$



$$e_l = \frac{\Delta l}{l_0} \quad e_w = \frac{\Delta w}{w_0}$$

Λόγος Poisson

σ: Αναλογία παραμόρφωσης σε διαφορετικές διαστάσεις
Τιμές: 0.1-0.4 (0.5 υγρά)

$$\frac{\Delta w}{w_0} = -\sigma \frac{\Delta l}{l_0} \quad \sigma = -\frac{e_w}{e_l}$$



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-6

Παράδειγμα 11-6

Ανελκυστήρας μάζας 554 Kg κρέμεται από ατσάλινο συρματόσχοινο μήκους 3m και διατομής 0.2cm^2 . Λόγω φορτίου το συρματόσχοινο επιμηκύνεται κατά 0.4cm . Προσδιορίστε: α) Την τάση του σχοινιού, β) Την παραμόρφωση (κατά μήκος), γ) Το μέτρο του *Young*. Θεωρώντας ότι το σχοινί συμπεριφέρεται ως συμπαγής χάλυβας ($\sigma=0.19$), βρείτε τη σχετική και απόλυτη λέπτυνση του σχοινιού.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{A} = \frac{550 * 9.8}{0.2 * 10^{-4}} = 2.7 * 10^8 \text{ Pa} \quad e_l = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0.4 * 10^{-2}}{3} = 0.00133 \quad 0.133\%$$

$$Y = \frac{\tau}{e} = 2 * 10^{11} \text{ Pa} \quad \sigma = -\frac{e_w}{e_l} \Rightarrow e_w = -\sigma e_l = -0.00025 \quad 0.025\%$$

Χάλυβας!!!

$$e_w = \frac{\Delta w}{w_0} \Rightarrow \Delta w = e_w w_0 = e_w (S / \pi)^{1/2} = 10^{-4} \text{ cm}$$

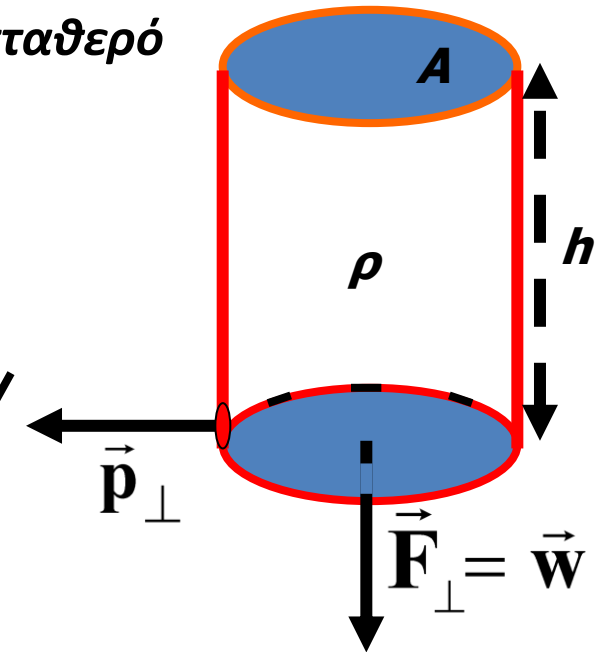
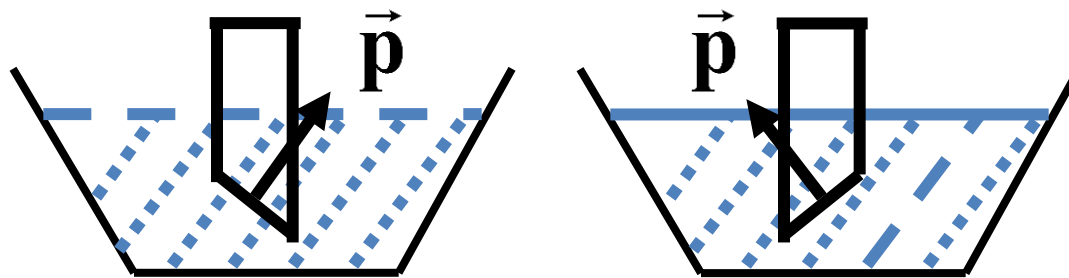


ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-1

Υδροστατική πίεση

✓Ίδια σε όλα τα σημεία μίας επιφάνειας σε σταθερό βάθος, ανεξάρτητα προσανατολισμού

✓Πίεση πάντα κάθετη στην επιφάνεια



$$\vec{p}_{\perp} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{A} = \frac{m g}{A} = \frac{\rho A h g}{A} \Rightarrow p = \rho g h$$

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

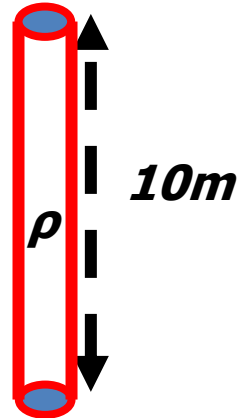
$$dp = \rho g dh$$



ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

Ποία η πίεση που ασκεί ένας σωλήνας διατομής 1cm^2 και ύψους 10m γεμάτος με νερό στη βάση του;

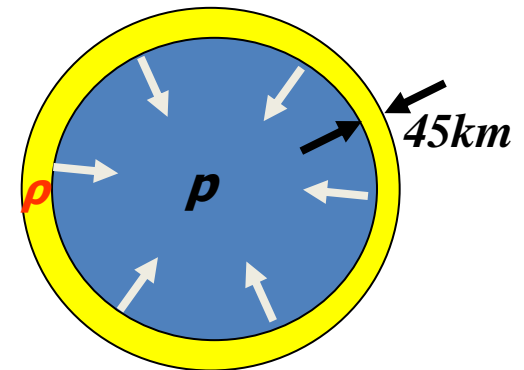
$$p = \rho gh = 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 10\text{m} \square 10^5 \text{ Pa} = 1\text{bar}$$



Αν θεωρήσουμε ότι η Γη βρίσκεται (κατά προσέγγιση) σε υδροστατική ισορροπία και ο φλοιός της έχει πάχος $\sim 45\text{km}$ και πυκνότητα $\sim 2.7\text{gr/cm}^3$, ποια η μέση πίεση στη βάση του φλοιού;

$$p = \rho gh = 2700 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 45 * 10^3 \text{ m}$$

$$\square 11.9 * 10^8 \text{ Pa} \square 12\text{Kbar}$$



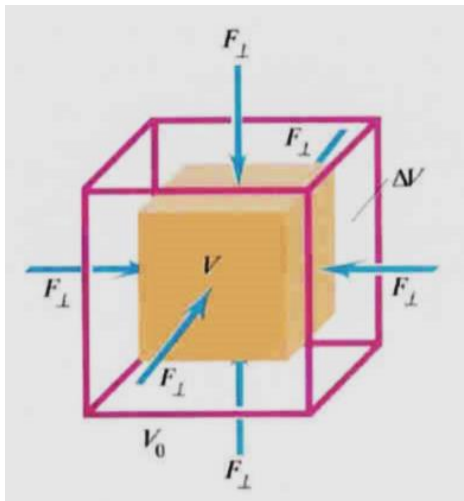
ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-2

Υδροστατική πίεση

✓ Η πίεση μεταφέρεται μέσω των ρευστών και ασκείται στην επιφάνεια κάθε σώματος που είναι βυθισμένο σε αυτό (Pascal) – Ισοτροπική τάση

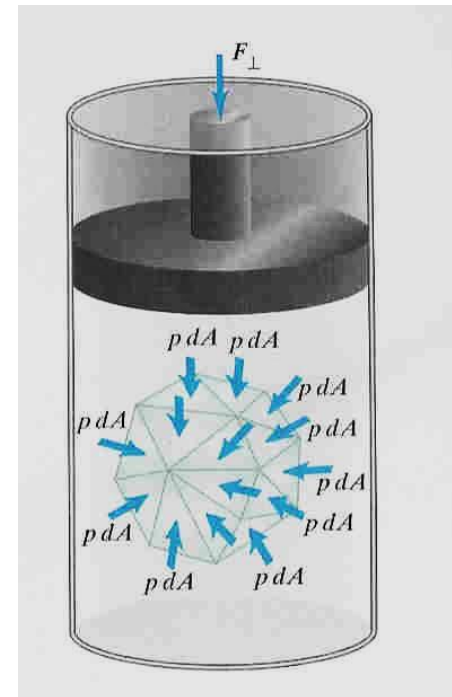
Αρχή Pascal

Η ισοτροπική τάση προκαλεί μεταβολή όγκου

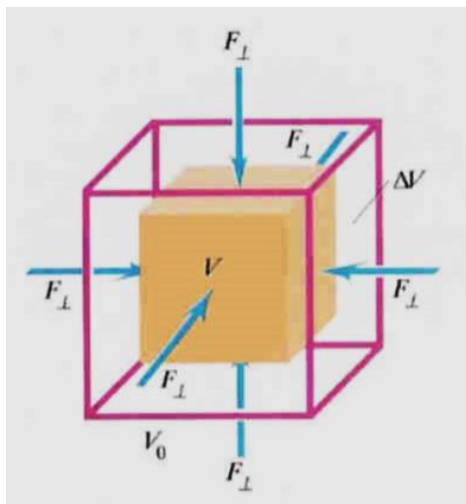


$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$$

Ανηγγμένη μεταβολή
όγκου



ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-3



$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$$

Μέτρο ελαστικότητας όγκου
B: Αντίδραση σε μεταβολή όγκου λόγω ισότροπης πίεσης

$$B = -\frac{\Delta p}{\theta} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$$

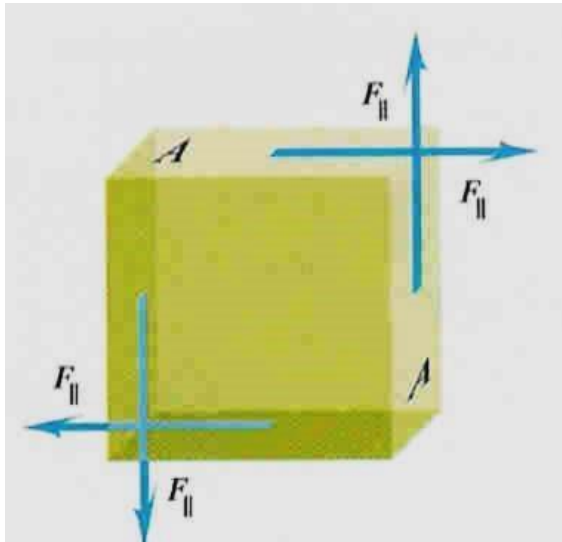
$$k = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Συμπιεστότητα

Ποσοστιαία ελάττωση για μοναδιαία αύξηση πίεσης
π.χ. $k=46.4 \cdot 10^{-8} \text{atm}^{-1}$ (νερό)



ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-4



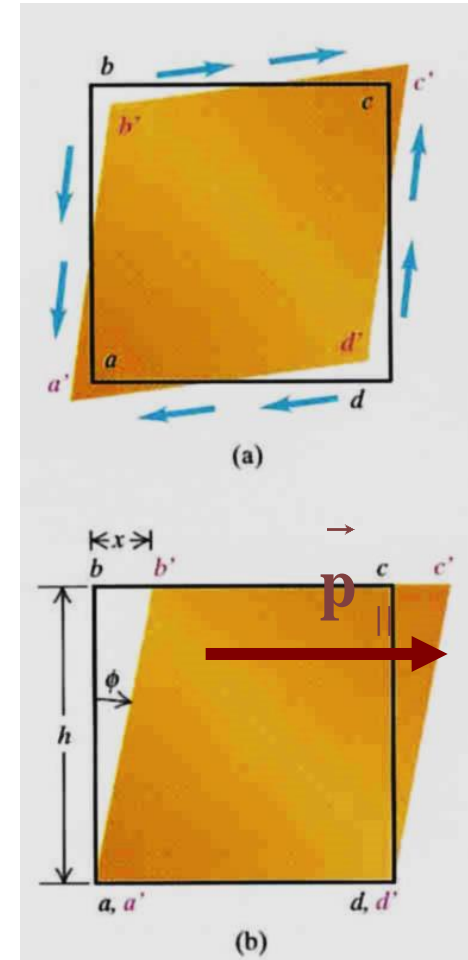
Διατμητική Τάση

$$\vec{p}_{\parallel} = \frac{\vec{F}_{\parallel}}{A}$$

Μόνο σε στερεά!!!

Διατμητική Παραμόρφωση

$$e_{\theta} = \frac{x}{h} = \tan \phi \approx \phi \text{ (rad)}$$



ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-5

Διατμητική
Τάση

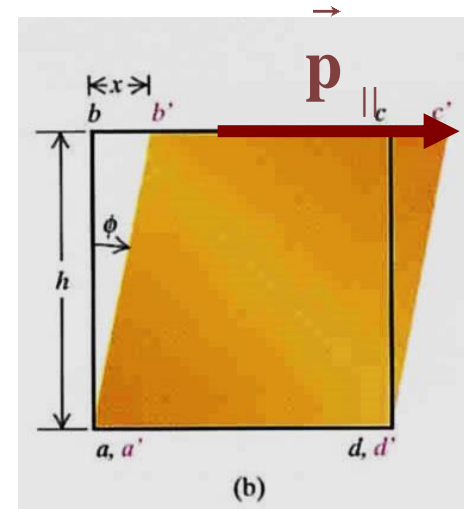


Διατμητική
Παραμόρφωση

$$\vec{p}_{\parallel} = \frac{\vec{F}_{\parallel}}{A} \quad \sim \quad e_{\theta} = \frac{x}{h} = \tan \phi \quad \square \quad \phi$$

Νέο Μέτρο ελαστικότητας

$$S = \frac{p_{\parallel}}{e_{\theta}} = \frac{\vec{F}_{\parallel} x}{A h} = \frac{\vec{F}_{\parallel} / A}{\phi}$$



Νόμος του Hooke

**S: Μέτρο διάτμησης
(Μονάδες πίεσης)**

**Μέτρο δυσκαμψίας ή
Μέτρο στρέψης**



ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

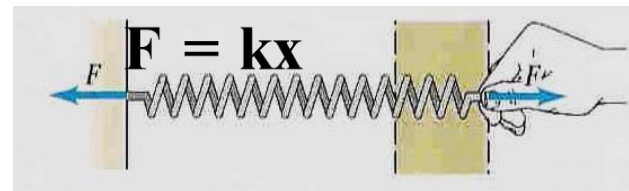
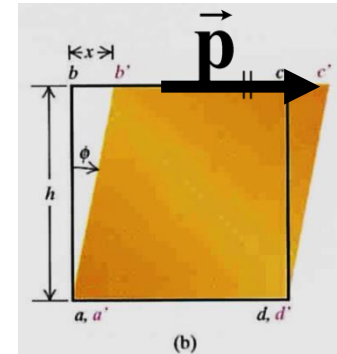
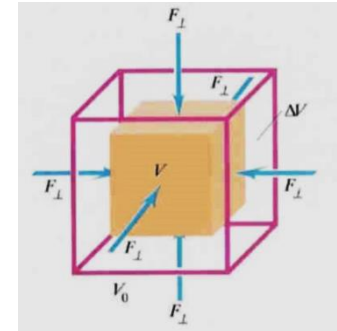
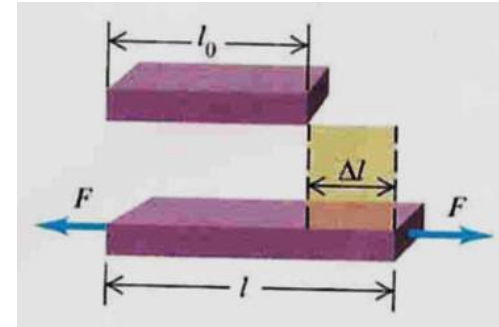
Πολλά για ένα στερεό σώμα!!!

$$Y = \frac{\tau}{e_l} = \frac{\vec{F}_\perp l_0}{A \Delta l} \quad \sigma = -\frac{e_w}{e_l}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\theta} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

$$S = \frac{p_\parallel}{e_\theta} = \frac{\vec{F}_\parallel x}{A h} = \frac{\vec{F}_\parallel / A}{\phi}$$

**Νόμος
του
Hooke**

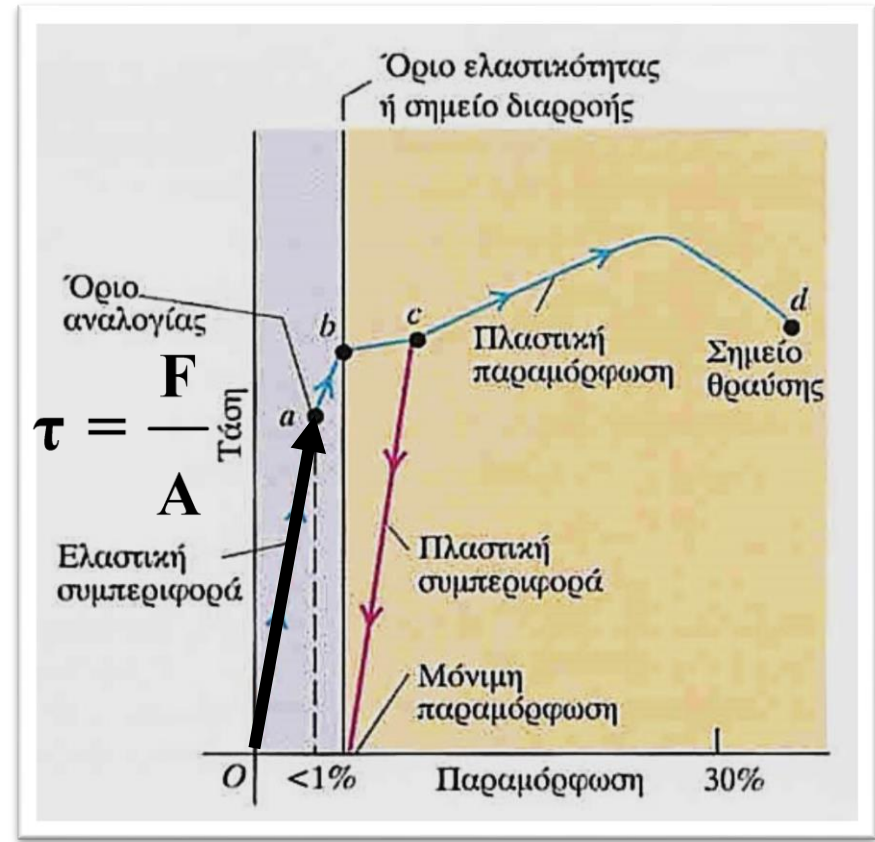
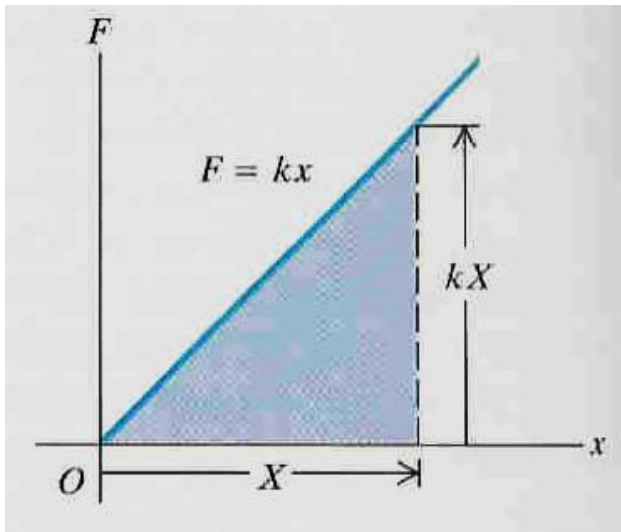
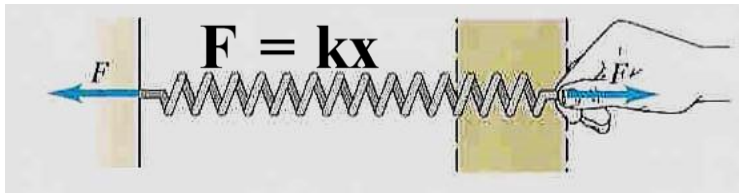


Ένα μέτρο ελαστικότητας για το ελατήριο (Ποιο από όλα;)



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-1

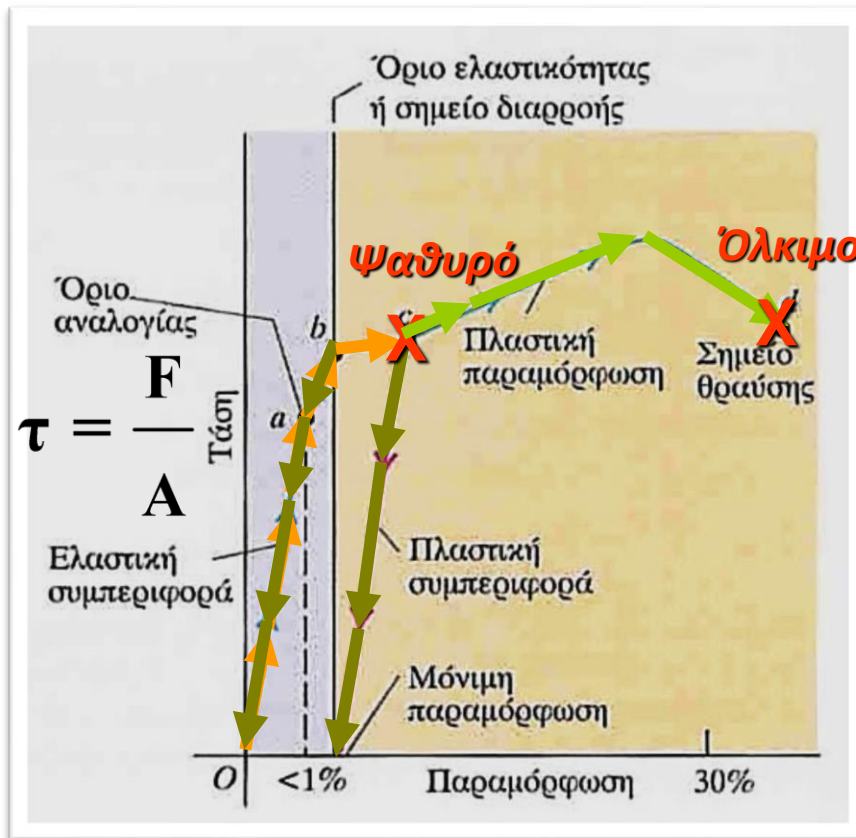
Νόμος του Hooke: Περιορισμένη ισχύ!!! (Μικρές παραμορφώσεις)



$\Delta l/l$ ή $\Delta w/w$ ή $\Delta V/V...$



ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-2



Ελαστική παραμόρφωση μέχρι το όριο ελαστικότητας (γραμμική σχέση μέχρι το όριο αναλογίας)

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Πλαστική παραμόρφωση μετά το όριο ελαστικότητας (Θραύση στο όριο θραύσης)

ΜΗ ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

$\Delta l/l$ ή $\Delta w/w$ ή $\Delta V/V...$



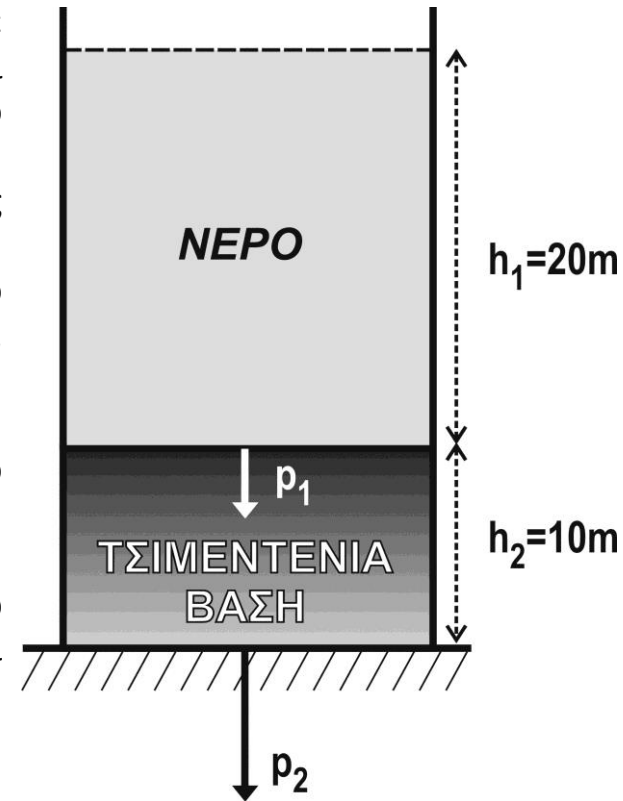
ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΤΑΣΗ & ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

Ένας υδατόπυργος, όπως παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, αποτελείται από μία κυλινδρική δεξαμενή νερού και ύψους $h_1=20m$, η οποία βασίζεται σε τσιμεντένια βάση με το μισό ύψος και ίδιο εμβαδόν. Το όλο σύστημα στηρίζεται σε ακλόνητη και άκαμπτη ατσαλένια βάση. Αν η πυκνότητα του τσιμέντου από το οποίο είναι φτιαγμένος ο υδατόπυργος είναι $\rho_{\text{ΤΣΙΜΕΝΤΟ}}=3.5gr/cm^3$, να βρεθούν:

A) Η πίεση p_1 σε Pa και bar που ασκεί το νερό στη βάση της δεξαμενής νερού.

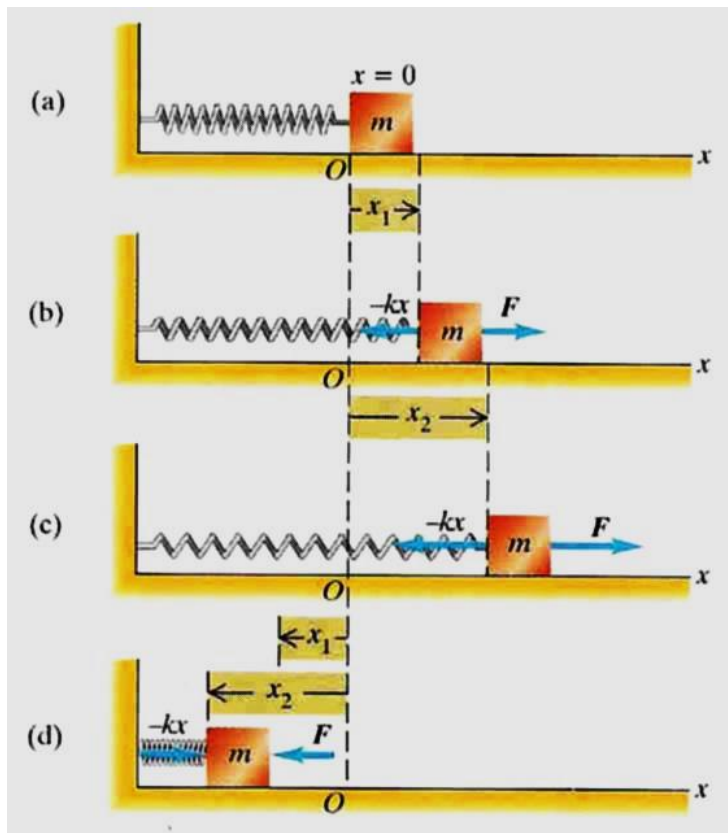
B) Αν θεωρηθεί ότι το τσιμέντο συμπεριφέρεται όπως το νερό (υδροστατικά), η πίεση p_2 που ασκείται στην ατσαλένια βάση του υδατόπυργου, αν αγνοήσουμε το βάρος των τοιχωμάτων της δεξαμενής του νερού.

Γ) Λόγω της πίεσης στη βάση της δεξαμενής νερού, η τσιμεντένια βάση παραμορφώνεται κατά ύψος κατά δh_2 . Αν το μέτρο του Young για το τσιμέντο είναι $Y=10^9 Pa$, βρείτε: **1)** Πώς παραμορφώνεται η δεξαμενή κατά τη διεύθυνση του ύψους και του πλάτους; **2)** Πόση είναι η σχετική και η απόλυτη παραμόρφωση της τσιμεντένιας δεξαμενής κατά τη διεύθυνση του ύψους, λόγω της πίεσης της δεξαμενής νερού; **3)** Αν η διάμετρος της τσιμεντένιας βάσης είναι **20m** και ο λόγος Poisson του τσιμέντου είναι $\sigma=0.22$, πόση είναι η σχετική και η απόλυτη παραμόρφωση της τσιμεντένιας δεξαμενής κατά τη διεύθυνση του πλάτους, λόγω της πίεσης της δεξαμενής νερού;



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-1

Έργο που παράγεται από το ελατήριο



$$F = -kx$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

Η ποσότητα $\frac{1}{2} kx^2$
ονομάζεται ελαστική δυναμική
ενέργεια

$$W_{el} = U_1 - U_2 = \ominus \Delta U$$



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-2

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mgy$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

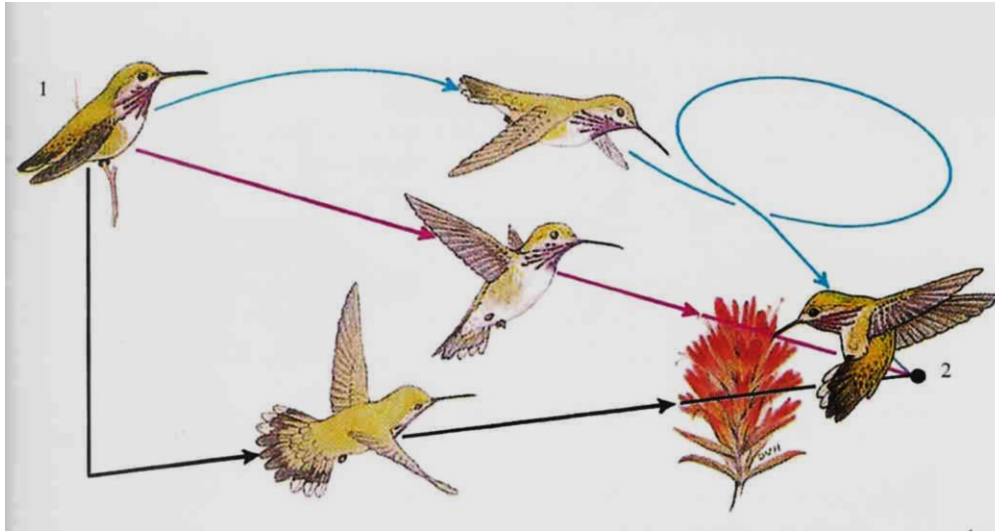
$$\frac{1}{2}kx_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + W_{other} = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Ολική μηχανική ενέργεια

U + K



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-3



**ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΗ
ΔΥΝΑΜΗ
(ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ)**

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

- ✓ Έργο αντιστρεπτό
- ✓ Ανεξάρτητο της τροχιάς
- ✓ Αν το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν, το συνολικό έργο είναι μηδέν
- ✓ Μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά αρχικής-τελικής δυναμικής ενέργειας

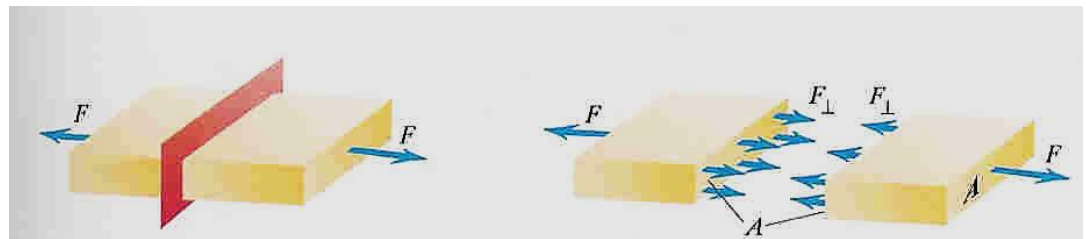


ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-4

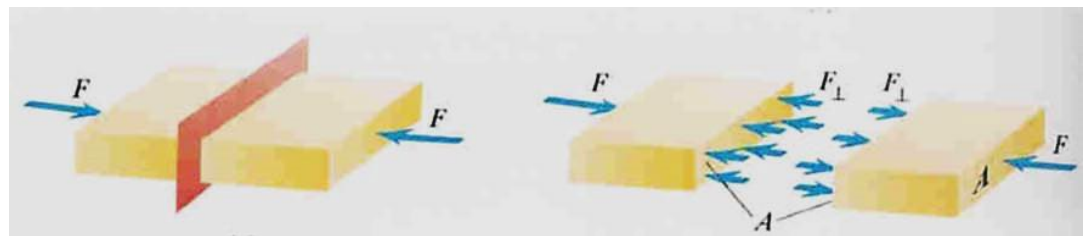
Ελαστικότητα: Θεώρηση του στερεού σώματος όχι ως ένα εξιδανικευμένο μοντέλο

- ✓ Επιμήκυνση
- ✓ Θλίψη
- ✓ Στρέψη

Εφελκυσμός



Θλίψη (συμπίεση)



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-5

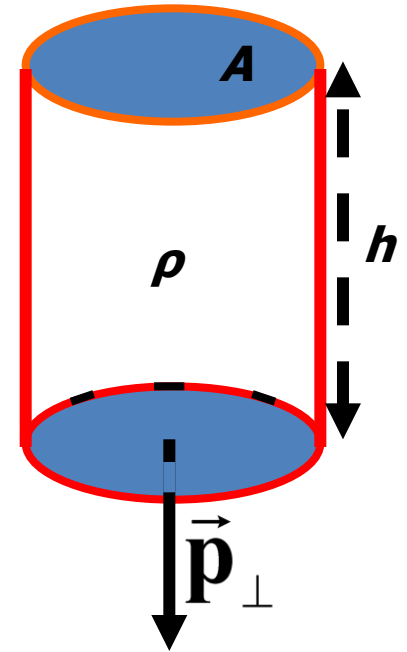
Υδροστατική πίεση

✓Ίδια σε όλα τα σημεία μίας επιφάνειας σε σταθερό βάθος, ανεξάρτητα προσανατολισμού

✓Πίεση πάντα κάθετη στην επιφάνεια

✓Η πίεση μεταφέρεται μέσω των ρευστών και ασκείται στην επιφάνεια κάθε σώματος που είναι βυθισμένο σε αυτό (Pascal) – Ισοτροπική τάση

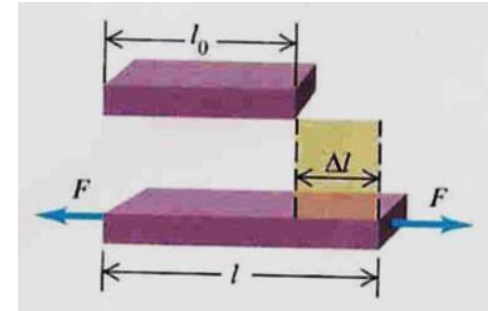
$$p = \rho gh$$



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-6

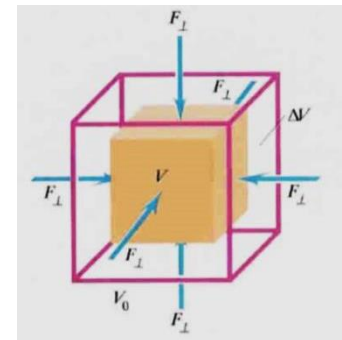
Πολλά μέτρα ελαστικότητας στο στερεό σώμα

$$Y = \frac{\tau}{e_l} = \frac{\vec{F}_\perp l_0}{A \Delta l} \quad \sigma = - \frac{e_w}{e_l}$$

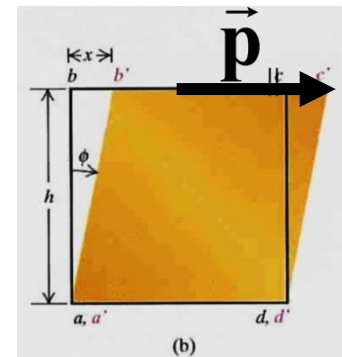


**Νόμος
του
Hooke**

$$B = - \frac{\Delta p}{\theta} = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$



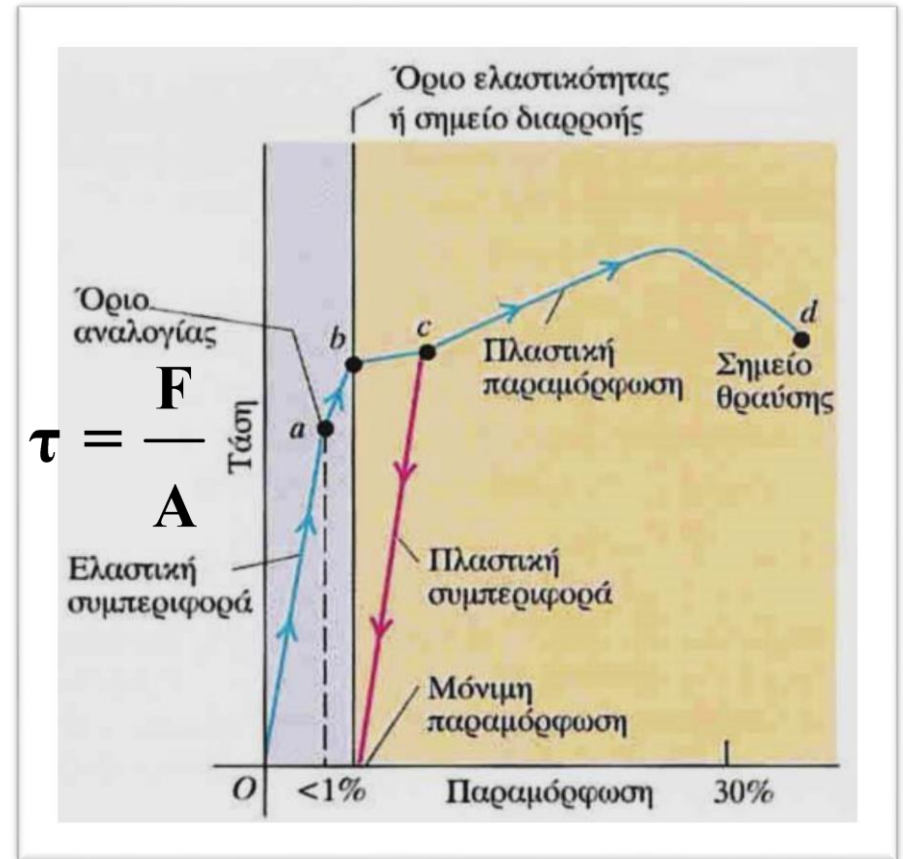
$$S = \frac{p_{\parallel}}{e_\theta} = \frac{\vec{F}_\parallel x}{A h} = \frac{\vec{F}_\parallel / A}{\phi}$$



ΣΥΝΟΨΗ 5^{ου} Μαθήματος-7

**Ισχύ του Νόμου
του Hooke
για μικρές
παραμορφώσεις**

**Ελαστικότητα →
Πλαστικότητα**



$\Delta l/l$ ή $\Delta w/w$ ή $\Delta V/V...$



ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-1

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad U = U(x, y, z)$$

Γενικεύοντας στις 3 διαστάσεις

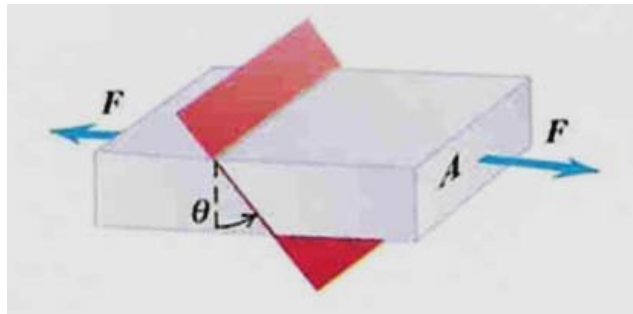
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$



ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-2

Άσκηση 11-57



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παπαζάχος Κωνσταντίνος, Τσόκας Γρηγόριος. «Φυσική. Ελαστική Δυναμική Ενέργεια-Ελαστικότητα-Παραμόρφωση-Νόμος του Hooke». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS266/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βεντούζη Χρυσάνθη
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

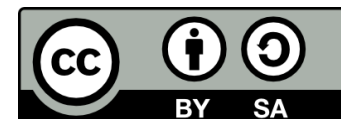


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

