ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 2 : Πιθανότητες

Ι. Αντωνίου, Χ. Μπράτσας
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Πιθανότητες

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας (Ένα από Τρία)

Περιεχόμενα Ενότητας (Δύο από Τρία)

Περιεχόμενα Ενότητας (Τρία από Τρία)

Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 2 παρουσιάζεται μια εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων και την πιθανολογική ανάλυση.

Εισαγωγή
(1 από 2)

- **ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ - ΕΤΥΜΟΛΟΓΙΑ**

  Πιθανόω= καθιστώ πειστικό
  Πιθανός = πειστικός, από το πειθώ
  Πιθανουργία = η τέχνη του πείθειν

  •**Αριστοτελης Ρητορικη Βιβλιο 1, Κεφαλαιο 2**
  Πιθανότης Κατά Ειμαρμένης

  Διογένης Λαέρτιος 10 Πυρρων 78,79
  Ἔστιν οὖν ὁ Πυρρώνειος λόγος μήνυσίς τις τῶν φαινομένων
  ἢ τῶν ὁπωσοῦν νοουμένων, καθ' ἣν πάντα πᾶσι συμβάλλεται
  καὶ συγκρινόμενα πολλὴν ἀνωμαλίαν καὶ ταραχὴν ἔχοντα εὑρίσκεται,
  καθά φησιν Αἰνεσίδημος ἐν τῇ εἰς τὰ Πυρρώνεια ὑποτυπώσει.
  πρὸς δὲ τὰς ἐν ταῖς σκέψεσιν ἀντιθέσεις προαποδεικνύντες
  καθ' οὓς τρόπους πείθει τὰ πράγματα, κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἀνῄρουν τὴν περὶ αὐτῶν πίστιν˙
  πείθειν γὰρ τά τε κατ' αἴσθησιν συμφώνως ἔχοντα καὶ τὰ μηδέποτε ἢ σπανίως γοῦν μεταπίπτοντα τά τε
  συνήθη καὶ τὰ νόμοις διεσταλμένα καὶ <τὰ> τέρποντα καὶ τὰ θαυμαζόμενα.
  εδείκνυσαν οὖν ἀπὸ τῶν ἐναντίων τοῖς πείθουσιν ἴσας τὰς πιθανότητας.

  Διογενης Λαερτιος 10 Πυρρων 94
  Τό τε πεῖθον οὐχ ὑποληπτέον ἀληθὲς ὑπάρχειν˙ οὐ γὰρ πάντας
  τὸ αὐτὸ πείθειν οὐδὲ τοὺς αὐτοὺς συνεχές. γίνεται δὲ καὶ παρὰ
  τὰ ἐκτὸς ἡ πιθανότης, παρὰ τὸ ἔνδοξον τοῦ λέγοντος ἢ παρὰ τὸ
  φροντιστικὸν ἢ παρὰ τὸ αἱμύλον ἢ παρὰ τὸ σύνηθες ἢ παρὰ τὸ κεχαρισμένον.

Εισαγωγή
(2 από 2)

- Η μαθηματική μελέτη των Πιθανοτήτων συνδέθηκε με τα τυχερά παίγνια. Ιδιαίτερα η ρίψη 2 η 3 ζαριών κατά την οποία οι παίκτες στοιχηματίζουν χρήματα.

$$\text{Odds}(\Xi) = \frac{\textit{Αριθμος Ευνοικων Περιπτωσεων για το Ξ}}{\textit{Αριθμος Μη Ευνοικων Περιπτωσεων για το Ξ}} = \frac{\mathbf{M}_{\Xi}}{\mathbf{M}_{\Xi^c}}$$

Ξ^c = το συμπληρωματικο γεγονος του Ξ, το γεγονος ότι δεν συμβαινει το Ξ

$\mathbf{M}_{\Xi} + \mathbf{M}_{\Xi^c} = M$ **= Τα Δυνατα Ενδεχομενα**

- **Ο Δειγματικός Χώρος Υ**

Μ το πλήθος των στοιχειών του Δειγματοχώρου Υ

- **Παραδοχή:**

Τα Ενδεχόμενα Ισοπίθανα

Πώς Στοιχηματίζω;
(1 από 2)

- $Odds(\Xi) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$στοιχηματίζω ότι θα συμβεί το Ξ, 1 προς 4.

- Παράδειγμα: στοιχηματίζω 100, κερδίζω 400, παίρνω συνολικά 500.

- Απόδοση Στοιχήματος (Return, Payout)

$$R = \frac{1}{Odds} + 1$$

Πώς Στοιχηματίζω;
(2 από 2)

- **Ρίψη Νομίσματος** Y={H,T}
  2 νομίσματα Y={HH,HT,TH,TT}.
- **Ρίψη Ζαριού** Y={1,2,3,4,5,6}

2 Ζάρια

$$Y = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

- Ρουλέτα: Y={1,2,3,4,5,…,36}.
- Τράπουλα: Y={1,2,3,4,5,…,52}.
- Ανατολή Ηλιου: Y={0,1}

Πιθανότητα

- $\text{Odds}(A) = \dfrac{\mathbf{M}_{\Xi}}{\mathbf{M}_{\Xi^c}} = \dfrac{\frac{\mathbf{M}_{\Xi}}{M}}{\frac{\mathbf{M}_{\Xi^c}}{M}} = \dfrac{p}{1-p}$,
- $p = p[\Xi] = \dfrac{\mathbf{M}_{\Xi}}{M}$ **η Πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Ξ .**

The theory of chance consists in reducing all the events of the same kind to a certain number of cases equally possible, that is to say, to such as we may be equally undecided about in regard to their existence, and in determining the number of cases favorable to the event whose probability is sought. The ratio of this number to that of all the cases possible is the measure of this probability, which is thus simply a fraction whose numerator is the number of favorable cases and whose denominator is the number of all the cases possible.

Laplace P. 1814, Essai Philosophique sur les Probabilités

Αρχή Ίσων Πιθανοτήτων

- Ο Ορισμός της Πιθανότητας προϋποθέτει την Βασική Παραδοχή των ίσων πιθανοτήτων στα στοιχειώδη Ενδεχόμενα.
- **Αρχή Ίσων Πιθανοτήτων**
- **Principle of Sufficient Reason**
- The probabilities of all elementary events are equal (the possible outcomes are equally likely), unless there is some reason (observed or conjectured) for the opposite.

Leibniz G. 1686 Discourse on Metaphysics, ed. By Martin R. and Brown S. , Manchester University Press, Manchester, UK, 1988.

Πιθανότητα Στοιχήματος

- Η πιθανότητα από το Στοίχημα

$$odds = \frac{p}{1-p} \Leftrightarrow (1-p)odds = p \Leftrightarrow odds = p + p(odds) \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{odds}{1+odds} = \frac{\mathbf{M}_A}{M}$$

odds $=1 \Leftrightarrow$ p=0.5 τυχαιο γεγονος
odds $>1 \Leftrightarrow$ p>0.5 το γεγονος είναι περισσοτερο πιθανο
odds $<1 \Leftrightarrow$ p<0.5 το γεγονος είναι λιγοτερο πιθανο

Τύποι Μεταβλητών

- Μεταβλητές = Παρατηρήσιμες Μεταβλητές = Τυχαίες Μεταβλητές
  Variables = Observable Variables = Random Variables
  Περιγράφουν τις Παρατηρήσιμες Ιδιότητες που κωδικοποιούνται ως Αριθμοί η Σύμβολα
- **Ποσοτικές ή Αριθμητικές Μεταβλητές (quantitative, Numerical)**
  $X: Y \to \mathbb{R}\ y \longmapsto X(y)$ ένας πραγματικός αριθμός
  Αναπαριστούν ιδιότητες μετρήσιμες αριθμητικά. Παίρνουν αριθμητικές τιμές.
  Παράδειγμα: η απόσταση μεταξύ των οφθαλμών των φοιτητών, το ύψος των φοιτητών, το εισόδημα των οικογενειών των φοιτητών.
  Αν η τυχαία μεταβλητή παίρνει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών τότε λέγεται διακριτή ή απαριθμητή (discrete), ενώ αν παίρνει τιμές σε ένα διάστημα (α,β) με $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ τότε λέγεται συνεχής (continuous).

Μεταβλητές

- **Ποιοτικές ή κατηγορικές ή συμβολικές μεταβλητές (qualitative, categorical, nominal, symbolic)**
- $X:Y\to\Sigma : y\longmapsto X(y)$ ένα σύμβολο

Αναπαριστούν ιδιότητες μη μετρήσιμες αριθμητικά. Οι τιμές τους είναι σύμβολα. Παράδειγμα: το χρώμα των οφθαλμών των φοιτητών, η συναισθηματική κατάσταση των φοιτητών, η βάση στη θέση κ στο DNA.

- Το σύνολο των Τιμών της Μεταβλητής X καλείται **Φάσμα της Μεταβλητής.**
- Φασμα $\subseteq \mathbb{R}$ για **Ποσοτικές ή Αριθμητικές Μεταβλητές**
- Φασμα = Σ για **Ποιοτικές Μεταβλητές**

Ρίψη Νομίσματος

- **Ρίψη Νομίσματος**

$$p = \frac{1}{2}$$

Ρίψη Ζαριού
(1 από 2)

- **Ρίψη Ζαριού**

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\, p = \frac{1}{6}$$

- **2 Ζάρια**

$$Y = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Ρίψη Ζαριού (2 από 2)

Μεταβλητή Το Άθροισμα των ενδείξεων 2 Ζαριών	Παρατηρησιμα Γεγονότα Observable Events	Πιθανότητα Probability
2	Ξ_2={(1,1)}	1/36=3%
3	Ξ_3 ={ (1,2), (2,1)}	2/36=6%
4	Ξ_4 ={ (2,2), (1,3),(3,1)}	3/36=8%
5	Ξ_5 ={ (1,4), (2,3),(3,2), (4,1)}	4/36=11%
6	Ξ_6 ={ (1,5), (2,4),(3,3), (4,2), (5,1)}	5/36=14%
7	Ξ_7 ={ (1,6), (2,5),(3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}	6/36=17%
8	Ξ_8 ={ (2,6), (3,5),(4,4), (5,3), (6,2)}	5/36=14%
9	Ξ_9 ={ (3,6), (4,5),(5,4), (6,3)}	4/36=11%
10	Ξ_{10} ={ (4,6), (5,5),(6,4)}	3/36=8%
11	Ξ_{11} ={ (5,6), (6,5)}	2/36=6%
12	Ξ_{12} ={ (6,6)}	1/36=3%

- Το πιο **πιθανό Γεγονός = αποτέλεσμα** της Παρατήρησης της ΤΜ Χ είναι το Χ=7, με p(X=7)= 1/6 επιτυγχάνεται με 6 τρόπους: (1,6), (2,5),(3,4), (4,3), (5,2), (6,1) **(Στοιχειώδη) Ενδεχόμενα**

Περισσότερα για τη Ρίψη Ζαριού

- Girolamo Cardano 1526, Book on Games of Chance.
- Bernstein P. 1996, **Against the Gods: the remarkable story of risk**, Wiley, new Jersey.
- Ore O. 1953, Cardano: The Gambling Scholar, Princeton University Press , New Jersey.

Ρίψη Ζαριών:
Εκτίμηση Chevalier De Mere

- **Ριψη 3 Ζαριών**
  X = το άθροισμα των ενδείξεων 3 ζαριών
- **Εκτίμηση Chevalier De Mere**
  Τα Αποτελέσματα X=11 και X=12 είναι ισοπίθανα διότι:
  Το **Γεγονός X=11** πραγματοποιείται με 6 τρόπους (οι 3αδες αριθμών που έχουν άθροισμα 11): 641,632,551,542,533,443
  Το **Γεγονός X=12** πραγματοποιείται με 6 τρόπους (οι 3αδες αριθμών που έχουν άθροισμα 12): 651,642,561,552,543,444.
- **Πιθανότερο αυτό που συμβαίνει συχνότερα**
  Πιθανότης ως Συχνότητα
- **Αριστοτέλης Ρητορική Βιβλίο 1, Κεφάλαιο 2**

Ρίψη Ζαριών: Εκτίμηση Pascal

- **Εκτίμηση Pascal 1654**
- Ο Pascal ο καθόρισε ως δειγματοχώρο Υ το σύνολο των δυνατών Ενδεχομένων (τρόποι ρίψης των 3 ζαριών που δεν είναι οι 3αδες αριθμών),

Άλλα οι διαταγμένες 3-δες (α,β,γ),α,β,γ=1,2,3,4,5,6. $|Y|=6_3=216$, ενώ,

- Ο δειγματοχώρος του De Mere δεν περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς τρόπους ρίψης.
- Η τριάδα 641 πραγματοποιείται με 6 τρόπους: {(6,4,1),(4,6,1),(6,1,4),(4,1,6),(1,6,4),(1,4,6)}

Το **Γεγονός Χ=11** πραγματοποιείται με 27 Ενδεχόμενα ενώ

το **Γεγονός Χ=12** πραγματοποιείται με 25 Ενδεχόμενα.

$$P\{X=11\} = \frac{27}{216} \quad \text{και} \quad P\{X=12\} = \frac{25}{216}$$

PASCAL-FERMAT LETTERS: Pascal Blaise, Oeuvres Completes.

Text annotated by Jacques Chevalier.Bibliotheque de la Ploiade. Paris: Gallimard, 1954 .

RENYI A. 1972, LETTERS ON PROBABILITY,WAYNE STATE UNIVERSITY PRESS, DETROIT

Παραδείγματα Δειγματοχώρων

- **Ρουλέτα**

$$Y=\{1,2,3,4,5,\ldots,36\}.\ p=\frac{1}{36}$$

- **Τράπουλα**

$$Y=\{1,2,3,4,5,\ldots,52\}.\ p=\frac{1}{52}$$

- **Ανατολή**

Πείραμα- Δειγματοχώροι- Μεταβλητές

Πείραμα	**Παρατήρηση ιδιοτήτων – Χαρακτηριστικών ως Μεταβλητές**	**Ρίψη 2 ζαριών**
Δειγματοχώρος Πειράματος	**τα δυνατά Ενδεχόμενα**	**Οι 36 διαταγμένες 2αδες (α,β), α,β=1,2,3,4,5,6**
Μεταβλητή	**$X: Y \rightarrow \mathbb{R}$ οι Τιμές της Μεταβλητής (Φάσμα της Μεταβλητής) αντιστοιχούν και περιγράφουν τα δυνατά Αποτελέσματα ή Γεγονότα που είναι Μετρήσιμα Υποσύνολα του Δειγματοχωρου**	**X_1= άθροισμα των ενδείξεων 2 ζαριών $\sigma_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ X_2= διαφορά των ενδείξεων 2 ζαριών $\sigma_2=\{0,1,2,3,4,5\}$**
Μεταβλητές	**Ένα γεγονός δύναται να ορίζεται από τις τιμές 2 η περισσότερων Μεταβλητών**	**Το γεγονός $\{X_1=7 , X_2=3\}$ αντιστοιχεί στα Ενδεχόμενα : (2,5), (5,2) Το γεγονός $\{X_1=7 , X_2=4\}$ αντιστοιχεί στο Ενδεχόμενο: $\emptyset$**

Συνδυαστική

- Ο δειγματοχώρος και τα Παρατηρησιμα Γεγονότα ενός πειράματος πρέπει να προσδιορίζεται προσεκτικά , για να γίνονται ορθά οι Υπολογισμοί, άλλως προκύπτουν παράδοξα. Πχ Chevalie de Mere, Bertand, D'Alembert **.**
- Η ανάγκη Υπολογισμού του αριθμού των δυνατών αποτελεσμάτων οδήγησε στην ανάπτυξη της **Συνδυαστικής** που αρχικά ήταν συνυφασμένη με την Πιθανότητα.
- **Ο Υπολογισμός Πιθανοτήτων ανάγεται στην Τέχνη της Απαρίθμησης.**
- **Μωυσιάδης Χ. 2002 Συνδυαστική Απαρίθμηση. Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.**

Πιθανότητα ως Συχνότητα

- **Αριστοτέλης Ρητορική Βιβλίο 1, Κεφάλαιο 2.**

$$P[A]=\lim_{M\to+\infty}\frac{M_A}{M}$$

- **Venn J. 1866, The Logic of Chance, McMillan, London, reprinted Chelsea, New York, 1962.**
- **Richard von Mises 1936, Probability, Statistics and Truth, 2nd rev. English ed., Dover, New York, 1981.**
- **Πρόβλημα: Η Επαναληψιμοτητα του πειράματος .**

Ορισμός Πιθανότητας Kolmogorov

- **Πιθανότητα Kolmogorov 1933**

  $P: \mathfrak{S} \to [0,1]: A \longmapsto P[A]$

  $\mathfrak{S}$ η Αλγεβρα των Γεγονοτων (Μετρησιμων Υποσυνολων Α του Δειγματοχωρου)

- π.χ. A= {X1=7 , X2=3} = { (2,5) , (5,2) }

1) P[Y]=1

   P[Ø]=0

- 2) $P[\cup_k A_k]=\sum_k P[A_k]$, αν ξένα μεταξύ τους
- Ø = το αδύνατο γεγονός, το γεγονός που δεν είναι πραγματοποιήσιμο

Ορισμός

- **$P[\Xi] = 0 \Leftrightarrow$ το γεγονός Ξ είναι Απίθανο**
- **$A \cup B = A \vee B = A + B =$ A or B**

  η πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός εκ των γεγονότων Α,Β, ως γεγονός

  $P[A \cup B] = P[A \vee B] = P[A+B] =$ P[A or B]

  η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα εκ των γεγονότων Α,Β, ως γεγονός.
- **$(A,B) = A \cap B = A \wedge B = AB =$ (A and B)**

  η πραγματοποίηση και των δυο γεγονότων Α,Β, ως γεγονός

  $P[A,B] = P(A \cap B) = P(A \wedge B) = P(AB) =$ P[A and B] η Κοινή Πιθανότητα των Α και Β .
- **$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ τα γεγονότα Α,Β είναι Ασυμβίβαστα**

  $\Leftrightarrow$ η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του αλλού
- **Άλγεβρα Γεγονότων: η Άλγεβρα των Συνόλων**

Θεώρημα: Ιδιότητες Πιθανότητας

- **Ιδιότητες Πιθανότητας Kolmogorov**

1) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
2) $P[A^c] = 1 - P[A]$
3) $P[A] \leq P[B]$, αν $A \subseteq B$
4) $P[B - A] = P[B] - P[A]$, αν $A \subseteq B$

- **Απόδειξη: Απλή Άλγεβρα, Βιβλίο Γ΄ Λυκείου**

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- **Ορισμός: Δεσμευμένη Πιθανότητα**

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \text{, προυποθεση: } P[B] \neq \emptyset$$

- **Το γεγονός Α ως Αποτέλεσμα της (πιθανής) Αίτιας Β**

- **Θεώρημα**

1. Πολλαπλασιαστικός Νομός Πιθανοτήτων:

$$P[A \cap B] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A] \text{, με την προυποθεση: } P[A] \neq \emptyset, P[B] \neq \emptyset$$

2. $P[A \mid B] \neq P[B \mid A]$

$$P[B \mid A] = \frac{P[A]}{P[B]} P[A \mid B]$$

- **Απόδειξη: Απλή Άλγεβρα, Βιβλίο Γ΄ Λυκείου**

Ανεξάρτητα Γεγονότα

- **Ορισμός: Ανεξάρτητα Γεγονότα**

  P[A | B] = P[A] και P[B | A] = P[B] , προυποθεση: $P[A] \neq \emptyset$, $P[B] \neq \emptyset$

- **Θεώρημα**

  A,B Ανεξάρτητα ⟺ P[A,B] = P[A] P[B] , προϋπόθεση: P[A] ≠ ∅, P[B] ≠ ∅

  Απόδειξη

  $$P[A \mid B] = P[A] \Leftrightarrow \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = P[A]$$

  $$P[B \mid A] = P[B] \Leftrightarrow \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = P[B]$$

- **ΣΧΟΛΙΟ**

  Η συνθήκη: P(A,B) = P(A) P(B) , ορίζει την Ανεξαρτησία Γεγονότων

  χωρίς την προϋπόθεση: P[A] ≠ ∅, P[B] ≠ ∅ . Αν τουλάχιστον ένα εκ των A,B είναι Αδύνατο, τότε τα γεγονότα A,B είναι Ανεξάρτητα

Ανεξάρτητα Γεγονότα - Άσκηση

- **Άσκηση 4**
- Είναι τα γεγονότα {X1=7} , {X2=3} ανεξάρτητα; {Βαθμός 0.2}

  P{X1=7} =

  P{X2=3} =

  P{X1=7 , X2=3}=
- **Ορισμός**

  A1, A2,…, AN , N≥2 Ανεξάρτητα Γεγονότα ⇔

  $P[\quad_{1},\quad_{2},\dots\quad_{n}] = P[\quad_{1}]\; P[\quad_{2}]\dots P[\quad_{n}]$,

  Για κάθε n=2,3,…,N.

Διαμέριση του Δειγματοχώρου

- **Ορισμός**

  Ξ1 , Ξ2 , …, ΞΝ διαμέριση του Δειγματοχώρου Υ σε κελιά - γεγονότα που αντιστοιχούν στα αποτελέσματα μέτρησης.

  Υ = Ξ1 ∪ Ξ2 ∪ …∪ ΞΝ ,

  Ξκ ξένα μεταξύ τους: Ξκ ∩ Ξλ= ∅

  π.χ. στο Πείραμα 2 Ζαριών η διαμέριση του Υ στα 11 κελιά - γεγονότα Ξ2, Ξ3, …,Ξ12

  Παρατηρήσιμες Μεταβλητές ⟷ Διαμερίσεις

Θεώρημα Bayes

- **Θεώρημα Bayes**
  Ξ1 , Ξ2 , …, ΞΝ διαμέριση του
  Δειγματοχώρου Υ

$$P[\Xi_k \mid H] = \frac{P[\Xi_k \cap H]}{P[H]} = \frac{P[\Xi_k \cap H]}{P[\Xi_1 \cap H]+P[\Xi_2 \cap H]+\cdots P[\Xi_N \cap H]} = \frac{P[H|\Xi_k]P[\Xi_k]}{P[H|\Xi_1]P[\Xi_1]+P[H|\Xi_2]P[\Xi_2]+\cdots+P[H|\Xi_N]P[\Xi_N]}$$

- Απόδειξη, Από τους ορισμούς.

Θεώρημα Bayes: Ερμηνεία

- **Ερμηνεία**
- [$_1$], [$_2$],… οι πιθανότητες των Γεγονότων $Ξ_1$, $Ξ_2$,…
  πριν την παρατήρηση apriori probabilities
- [$_1$|], [$_2$|],… οι πιθανότητες των Γεγονότων $Ξ_1$, $Ξ_2$,…
  μετά την παρατήρηση ότι συνέβη το γεγονός Η aposteriori probabilities
- [| $_1$], [| $_2$],… οι πιθανότητες το γεγονός Η να οφείλεται στην Αιτία $Ξ_1$, $Ξ_2$…
- Ο Τύπος Bayes συνδέει τις aposteriori probabilities [$_1$|], [$_2$|],… με τις apriori probabilities [$_1$], [$_2$],… και τις πιθανότητες [| $_1$], [| $_2$],… τα γεγονότα $Ξ_1$, $Ξ_2$,… να αποτελούν αιτίες για το Η.

Παράδειγμα

- **Έχουμε 3 γάτες. Μία Λεύκη (Λ), μια Μαύρη (Μ) και μια Γκρίζα (Γ). Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και οι 3 Θηλυκές;**

- **Λύση**

  α = αρσενική

  θ = θηλυκή

  Γεγονότα: Αα, Αθ, Μα, Μθ, Γα, Γβ

  Ενδεχόμενα:

  (Αα, Μα, Γα), (Αα, Μθ, Γα), (Αα, Μα, Γθ), (Αθ, Μα, Γα),
  (Αθ, Μθ, Γα), (Αθ, Μα, Γθ), (Αα, Μθ, Γθ), (Αθ, Μθ, Γθ),

  Ρ(Αθ, Μθ, Γθ)=**1/8**

  Αν η Γκρίζα έχει τριχρωμία, τότε είναι θηλυκή

  Ρ(Αθ, Μθ, Γθ| Γθ)=**1/4**

Πιθανολογική Ανάλυση

- **Η Πιθανολογική ανάλυση δεν εφαρμόζεται μόνο εξαιτίας άγνοιας ή σφάλματος . Άλλα και σε περιπτώσεις περιορισμών στην διαχείριση των δεδομένων**

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.