



Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 6 : Έλεγχος Υποθέσεων

Ι. Αντωνίου, Χ. Μπράτσας
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Έλεγχος Υποθέσεων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

1. Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης από Παρατηρήσεις
2. Παράδειγμα
3. Μονόπλευρη υπόθεση
4. Παράδειγμα
5. Μονόπλευρη υπόθεση II
6. Παράδειγμα
7. Δίπλευρη υπόθεση
8. Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης Μη Παραμετρικός
9. Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
10. Θεώρημα Kolmogorov
11. Δοκιμασία χ^2 Καλής Προσαρμογής (Goodness of Fit)
12. Δοκιμασία χ^2 Αλληλοεξάρτηση (Interdependence)



Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 6 παρουσιάζονται μέθοδοι ελέγχου υποθέσεων και συγκεκριμένα οι παραμετρικοί και μη παραμετρικοί έλεγχοι, ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov καθώς και η δοκιμασία χ^2 .



Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης από Παρατηρήσεις (1 από 2)

- Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0 .
 - Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1

 - Null Hypothesis Fisher 1935
 - Alternative Hypothesis Neyman Pearson, Fisher πολύ αντίθετος.

 - Η Παρατήρηση είναι (Στατιστικά) Σημαντική
 - (Statistically) Significant
- ⇔ Η Δοκιμή Απορρίπτει την Μηδενική Υπόθεση
- There are 4 possible Outcomes for the Null Hypothesis H_0 :



Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης από Παρατηρήσεις (2 από 2)

Observation	Reality	
Test Result (Positive or Negative for H_1) Decision	H_1 is True Είναι Ενοχος Pregnancy	H_1 is False Είναι Αθωος No Pregnancy
H_0 is rejected by the Test \Leftrightarrow The test is Positive for H_1 \Leftrightarrow There is Evidence for H_1 \Leftrightarrow Διαπιστωθηκε Ενοχη \Leftrightarrow Pregnancy Indicated	True Positive outcome Convicting the Guilty Pregnancy Indicated and The Lady is Pregnant	False Positive outcome Convicting the Innocent Pregnancy Indicated but The Lady is not Pregnant Error of 1st kind
H_0 is not rejected by the Test \Leftrightarrow The test is Negative for H_1 \Leftrightarrow There is No Evidence for H_1 \Leftrightarrow Δεν διαπιστωθηκε Ενοχη \Leftrightarrow Pregnancy not Indicated	False Negative outcome Releasing the Guilty Pregnancy not Indicated but The Lady is Pregnant Error of 2nd kind	True Negative outcome Releasing the Innocent Pregnancy not Indicated and The Lady is not Pregnant



Παράδειγμα

0. Ορίζω το Πρόβλημα και την Υπόθεση Έρευνας προς Έλεγχο το Φάρμακο A θεραπεύει σε χρόνο $\tau = \tau_0$ ήμερες κατά μέσο όρο.

Είναι το Φάρμακο B καλύτερο από το Φάρμακο A;

1. Ορίζω την Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0

$$H_0 = [\tau = \tau_0]$$

2. Ορίζω την Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1

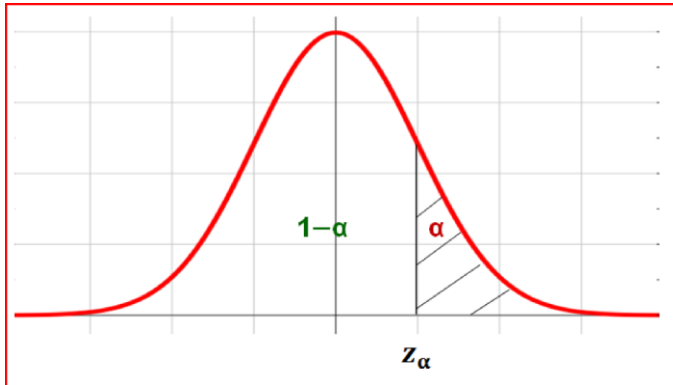
$$H_1 = [\tau < \tau_0]$$

3. Ορίζω τις Παραδοχές. Οι εκτιμήσεις \hat{m} του χρόνου θεραπείας τ από το δείγμα ακολουθούν Κανονική Κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2

4. Ορίζω τον Στατιστικό (Στατιστική Παράμετρο Έλεγχου) z από το δείγμα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$

$$z = \frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma}$$


Μονόπλευρη Υπόθεση



Μονόπλευρη Υπόθεση

5. Ορίζω την Περιοχή Απόρριψης Ξ της Υπόθεσης H_0 για σημαντικότητα α ($\alpha=0.1, \alpha=0,05, \alpha=0,01$)

$$\Xi = \left\{ z = \frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma} < z_\alpha \right\}, P\left[\frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma} < z_\alpha \right] = \alpha$$

6. Υπολογίζω την τιμή \hat{z} από το δείγμα
7. Συμπεραίνω
- $\hat{z} \in \Xi \implies$ Η Υπόθεση H_1 απορρίπτεται από τη Δοκιμή
 - $\hat{z} \notin \Xi \implies$ Η Υπόθεση H_1 δεν απορρίπτεται από τη Δοκιμή



Παράδειγμα

0. Ορίζω το Πρόβλημα και την Υπόθεση Έρευνας προς Έλεγχο
το Φάρμακο A θεραπεύει σε χρόνο $\tau = \tau_0$ ήμερες κατά μέσο όρο
Είναι το Φάρμακο B χειρότερο από το Φάρμακο A;

1. Ορίζω την Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0 , $H_0 = [\tau = \tau_0]$

2. Ορίζω την Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1 , $H_1 = [\tau > \tau_0]$

3. Ορίζω τις Παραδοχές

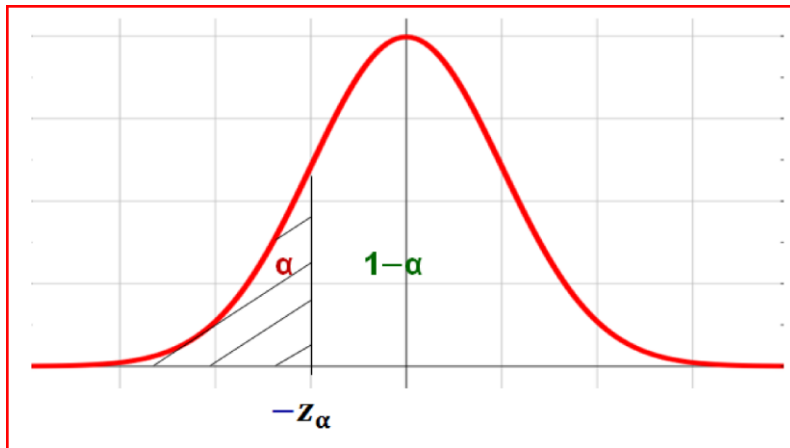
Οι εκτιμήσεις \hat{m} του χρόνου θεραπείας τ από το δείγμα
ακολουθούν Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2

4. Ορίζω τον Στατιστικό (Στατιστική Παράμετρο Έλεγχου) z
από το δείγμα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$

$$z = \frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma}$$



Μονόπλευρη Υπόθεση II



Μονόπλευρη Υπόθεση

5. Ορίζω την Περιοχή Απόρριψης της Υπόθεσης για σημαντικότητα α

$$\Xi = \left\{ z = \frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma} < -z_\alpha \right\}, P \left[\frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma} < -z_\alpha \right] = \alpha$$

6. Υπολογίζω την τιμή \hat{z} από το δείγμα

7. Συμπεραίνω

- $\hat{z} \in \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 απορρίπτεται από τη Δοκιμή
- $\hat{z} \notin \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 δεν απορρίπτεται από τη Δοκιμή



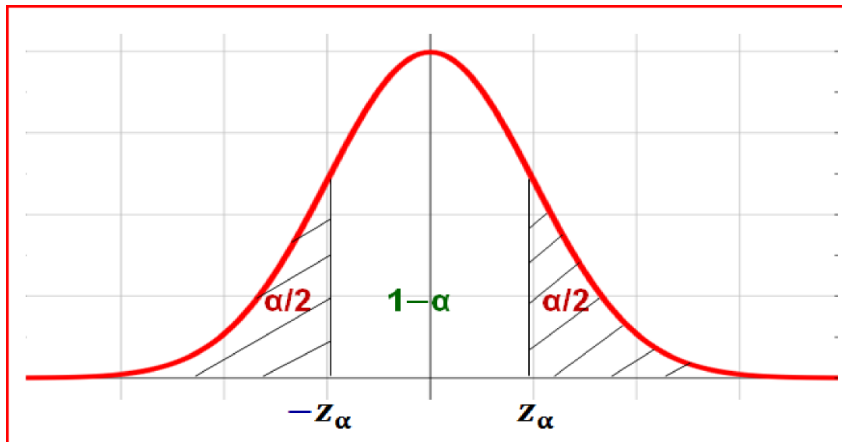
Παράδειγμα

0. Ορίζω το Πρόβλημα και την Υπόθεση Έρευνας προς Έλεγχο
το Φάρμακο A θεραπεύει σε χρόνο $\tau = \tau_0$ ήμερες κατά μέσο όρο
Είναι το Φάρμακο B χειρότερο από το Φάρμακο A;
1. Ορίζω την Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0 , $H_0 = [\tau = \tau_0]$
 2. Ορίζω την Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1 , $H_1 = [\tau > \tau_0]$
 3. Ορίζω τις Παραδοχές
Οι εκτιμήσεις \hat{m} του χρόνου θεραπείας τ από το δείγμα
ακολουθούν Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2
 4. Ορίζω τον Στατιστικό (Στατιστική Παράμετρο Έλεγχου) z
από το δείγμα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$

$$z = \frac{\hat{m} - \tau_0}{\sigma}$$



Δίπλευρη Υπόθεση



Δίπλευρη Υπόθεση

5. Ορίζω την Περιοχή Απόρριψης της Υπόθεσης για σημαντικότητα α

$$\Xi = \left\{ |z| = \frac{|\hat{m} - \tau_0|}{\sigma} > z_{\alpha/2} \right\}, \quad P\left[\frac{|\hat{m} - \tau_0|}{\sigma} > z_{\alpha/2} \right] = \alpha$$

6. Υπολογίζω την τιμή \hat{Z} από το δείγμα

7. Συμπεραίνω

- $\hat{Z} \in \Xi \implies$ Η Υπόθεση H_1 απορρίπτεται από τη Δοκιμή
- $\hat{Z} \notin \Xi \implies$ Η Υπόθεση H_1 δεν απορρίπτεται από τη Δοκιμή



Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης Μη Παραμετρικός

- Διάφορες Περιπτώσεις όπως στις Εκτιμήσεις
- Δοκιμασία (Έλεγχος) Υπόθεσης Μη Παραμετρικός
- Έλεγχος κατανομής και εύρεση παράτυπων σημείων
 - Ιστόγραμμα
 - Θηκόγραμμα
 - Q-Q Plot
 - Stem and Leaf Plot



Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov

- Προϋποθέσεις Ελέγχου Kolmogorov – Smirnov
 1. Το δείγμα είναι τυχαίο και προέρχεται από Παρατηρήσεις **Ισοπίθανες**.
 2. Οι παρατηρήσεις είναι Αμοιβαία Ανεξάρτητες (independence between two samples)

- Ορισμός

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής Kolmogorov είναι:

$$P(K \leq x) = 1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} e^{-2v^2 x^2}$$

και η Τυχαία μεταβλητή Kolmogorov

$$F_N(x) = \frac{\text{Number of values} \leq x}{N} \quad \text{η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής του}$$

δείγματος

H_0 : η $FN(x) = F(x)$, όπου F δεδομένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής



Θεώρημα Kolmogorov (1 από 2)

- Αν $F(x)$ συνεχής, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 με σημαντικότητα α αν

$$\sqrt{N} \sup_x |F_n(x) - F(x)| > K_\alpha$$

K_α το ποσοστημόριο της Κατανομής Kolmogorov

- Για την περίπτωση δυο δειγμάτων με μεγέθη M για την $F(x)$ και N για την $G(x)$, η μηδενική υπόθεση ισότητας των δυο εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής ($H_0: F=G$) απορρίπτεται αν:

$$\sqrt{\frac{(M+N)}{MN}} \sup_x |F_M(x) - G_N(x)| > K_\alpha$$



Θεώρημα Kolmogorov (2 από 2)

- Γενίκευση σε Σύνθετες Υποθέσεις
- Διαμάχη Επιστημολογική



Δοκιμασία χ^2 Καλής Προσαρμογής (Goodness of Fit) (1 από 3)

- Δοκιμασία χ^2 Καλής Προσαρμογής (Goodness of Fit)
 0. Ορίζω το Πρόβλημα και την Υπόθεση Έρευνας προς Έλεγχο
Ταξινόμηση N Όντων σε n Κλάσεις $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$
Αριθμητικές είτε Κατηγορικές μεταβλητές
Παράδειγμα: N σφαιρίδια σε n δοχεία διαφορετικών χρωμάτων
 N_1, N_2, \dots, N_n οι αριθμοί των Όντων στις Κλάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, N_1 + N_2 + \dots + N_n = N$
Διαφέρει η κατανομή που διαπιστώνω από την κατανομή με πιθανότητες $p_1 = p_{10}, \dots, p_n = p_{n0}$;
 1. Ορίζω την Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0
 $H_0 = [p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \dots, p_n = p_{n0}, p_{10} + p_{20} + \dots + p_{n0} = 1]$
 2. Ορίζω την Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1
 $H_1 = [p_k \neq p_{k0}, \text{ για τουλάχιστον κάποιο } k=1, 2, \dots, n] = \text{οιαδήποτε διαφοροποίηση από την } H_0$



Δοκιμασία χ^2 Καλής Προσαρμογής (Goodness of Fit) (2 από 3)

3. Ορίζω τις Παραδοχές

p_1, p_2, \dots, p_n οι (θεωρητικές) πιθανότητες εκάστης κλάσης, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Οι δοκιμές ανεξάρτητες

Θεώρημα

Η κοινή κατανομή πιθανότητας είναι η Πολυωνυμική (Γενίκευση της Bernoulli)

$$p[N_1, N_2, \dots, N_n] = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_n^{N_n}$$

4. Ορίζω το Στατιστικό (Στατιστική Παράμετρο Δοκιμασίας) από το δείγμα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$

Σταθμισμένο Άθροισμα Τετραγώνων Διακυμάνσεων Pearson

$$\chi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \frac{(N_{\kappa} - \mathfrak{N}_{\kappa})^2}{\mathfrak{N}_{\kappa}} = \sum_{\kappa=1}^n \frac{(N_{\kappa})^2}{\mathfrak{N}_{\kappa}} - N$$

= ο Θεωρητικά αναμενόμενος αριθμός των Όντων στην Κλάση $\sigma_{\kappa}, \kappa=1, 2, \dots, n$



Δοκιμασία χ^2 Καλής Προσαρμογής (Goodness of Fit) (3 από 3)

5. Ορίζω την Περιοχή Απόρριψης Ξ της Υπόθεσης για σημαντικότητα α

Θεώρημα Pearson

Η Μεταβλητή $\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(N_k - g_k)^2}{g_k}$
ακολουθεί κατανομή χ^2 - τετράγωνο βαθμού $\nu = N - 1$
($\Xi = \{ \chi^2 > (\chi^2)_\alpha^{N-1} \}$, $P[\chi^2 > (\chi^2)_\alpha^{N-1}] = \alpha$... + $N_n = N$)

Pearson: $\chi^2 \geq$

Cochran: $\chi^2 \geq$ και το πολύ 20% των μικρότερα του 5

Άλλως σύμπτυξη κλάσεων

6. Υπολογίζω την τιμή από το δείγμα

7. Συμπεραίνω

$\in \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 απορρίπτεται από τη Δοκιμή

$\notin \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 δεν απορρίπτεται από τη Δοκιμή



Δοκιμασία χ^2 Αλληλοεξάρτηση (Interdependence) (1 από 4)

0. Ορίζω το Πρόβλημα και την Υπόθεση Έρευνας προς Έλεγχο
 A_1, \dots, A_k οι διαφορετικές κλάσεις-τιμές της Μεταβλητής A
 B_1, \dots, B_λ οι διαφορετικές κλάσεις-τιμές της Μεταβλητής B
 $N_{\alpha\beta}$ ο αριθμός των Όντων που εντάσσονται στις κλάσεις A_α και B_β
N ο αριθμός των μετρήσεων
Είναι οι Μεταβλητές Ανεξάρτητες;

Παράδειγμα

A= το χρώμα των οφθαλμών των φοιτητών της Βιολογίας του ΑΠΘ
 A_1 = καστανό, A_2 = γαλάζιο, A_3 = πράσινο, A_4 = γκρι, A_5 = μελί
B= το χρώμα των μαλλιών των φοιτητών της Βιολογίας του ΑΠΘ
 B_1 = καστανό, B_2 = μαύρο, B_3 = ξανθό, B_4 = κόκκινο



Δοκιμασία χ^2 Αλληλοεξάρτηση (Interdependence) (2 από 4)

1. Ορίζω την Μηδενική Υπόθεση (Null Hypothesis) H_0

$$H_0 = [p_{\alpha\beta} = p_{\alpha} p_{\beta}, \alpha=1, \dots, \kappa, \beta=1, \dots, \lambda]$$

2. Ορίζω την Εναλλακτική Υπόθεση (Alternative Hypothesis) H_1

$$H_1 = [p_{\alpha\beta} \neq p_{\alpha} p_{\beta}, \text{ για τουλάχιστον κάποια } \alpha, \beta, \alpha=1, \dots, \kappa, \beta=1, \dots, \lambda, \kappa=1, 2, \dots, n]$$

= οποιαδήποτε διαφοροποίηση από την H_0

3. Ορίζω τις Παραδοχές

Οι δοκιμές ανεξάρτητες



Δοκιμασία χ^2 Αλληλοεξάρτηση (Interdependence) (3 από 4)

4. Ορίζω το Στατιστικό (Στατιστική Παράμετρο Δοκιμασίας) από το δείγμα ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$)

Σταθμισμένο Άθροισμα Τετραγώνων Διακυμάνσεων Pearson

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \sum_{\beta=1}^{\lambda} \frac{(N_{\alpha\beta} - \mathfrak{N}_{\alpha\beta})^2}{\mathfrak{N}_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \sum_{\beta=1}^{\lambda} \frac{(N_{\alpha\beta})^2}{\mathfrak{N}_{\alpha\beta}} - N$$

$\mathfrak{N}_{\alpha\beta} = N p_{\alpha} p_{\beta}$ ο Θεωρητικά αναμενομενος αριθμος των Οντων στις Κλασεις κ,λ

$$p_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{N} = \frac{N_{\alpha 1} + \dots + N_{\alpha \kappa}}{N}$$

$$p_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{N} = \frac{N_{1\beta} + \dots + N_{\kappa\beta}}{N}$$



Δοκιμασία χ^2 Αλληλοεξάρτηση (Interdependence) (4 από 4)

5. Ορίζω την Περιοχή Απόρριψης Ξ της Υπόθεσης για σημαντικότητα α
Θεώρημα Pearson

Η Μεταβλητή

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \sum_{\beta=1}^{\lambda} \frac{(N_{\alpha\beta} - \mathfrak{N}_{\alpha\beta})^2}{\mathfrak{N}_{\alpha\beta}}$$

ακολουθεί κατανομή χ^2 – τετράγωνο βαθμού $\nu = (\kappa - 1)(\lambda - 1)$

$$\Xi = \left\{ \chi^2 > (\chi^2)_{\alpha}^{(\kappa-1)(\lambda-1)} \right\}, \quad P\left[\chi^2 > (\chi^2)_{\alpha}^{(\kappa-1)(\lambda-1)} \right] = \alpha$$

Pearson: $\alpha_{\beta} \geq$

Cochran: $\alpha_{\beta} \geq$ και το πολύ 20% των α_{β} μικρότερα του 5

Αλλιώς σύμπτυξη κλάσεων

6. Υπολογίζω την τιμή από το δείγμα

7. Συμπεραίνω

$\in \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 απορρίπτεται από τη Δοκιμή

$\notin \Xi \Rightarrow$ Η Υπόθεση H_1 δεν απορρίπτεται από τη Δοκιμή



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

