ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 7 : Στατιστική Ανάλυση και Μοντέλα

Ι. Αντωνίου, Χ. Μπράτσας
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Στατιστική Ανάλυση και Μοντέλα

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας (1 από 3)

Περιεχόμενα Ενότητας (2 από 3)

12. Μη Γραμμική Δυναμική
13. Εξισώσεις Διαφόρων
14. Γραμμικές Αναδρομικές Ακολουθίες 1ης τάξεως
15. Μη Γραμμικές Αναδρομικές Ακολουθίες 1ης τάξεως
16. Λογιστική Απεικόνιση
17. Απεικόνιση Σφήνας (Cusp)
18. Απεικόνιση Πλάστη (Baker)
19. Απεικόνιση Πλάστη (Baker)
20. Στατιστική Μη Αναστρεψιμότητα
21. Σχέση Διαφορικών Εξισώσεων και Εξισώσεων Διαφόρων
22. Euler Method

Περιεχόμενα Ενότητας (3 από 3)

Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 7 παρουσιάζονται μέθοδοι στατιστικής ανάλυσης και κατασκευής μοντέλων, καθώς και οι διαφορικές εξισώσεις και οι εξισώσεις διαφορών.

Στατιστική Ανάλυση και Μοντέλα

- **Πως Μεταβάλλεται μια Μεταβλητή;**

  Τι τιμές παίρνει;

  Πως κατανέμονται οι Τιμές;
- **Σχετίζονται 2 Μεταβλητές;**
- **Έλεγχος Υποθέσεων**

  Πως Ελέγχω μια Υπόθεση για την Μεταβλητή;

  Πως Ελέγχω μια Υπόθεση για την Σχέση 2 Μεταβλητών;

The Central Dogma of Molecular Biology (1 από 3)

- Crick F. 1956, On Protein Synthesis. Symp. Soc. Exp. Biol. XII, 139-163
- Crick F. 1970, Central dogma of molecular biology, Nature 227 (5258): 561–3
- CD1 Information cannot be transferred from protein to either protein or nucleic acid. In other words, 'once information gets into protein, it can't flow back to nucleic acid.'
- CD2 to transmit the genetic information between parents and progeny, the DNA must be replicated faithfully.
- Επιβεβαίωση

The Central Dogma of Molecular Biology (2 από 3)

- **Διάψευση**

Shen, P. S., Park, J., Qin, Y., Li, X., Parsawar, K., Larson, M. H., Cox, J., Cheng Y., Lambowitz A.M., Weissman, J.S., Brandman, O. & Frost, A. (2015). Rqc2p and 60S ribosomal subunits mediate mRNA-independent elongation of nascent chains. Science, 347(6217), 75-78.

The Central Dogma of Molecular Biology (3 από 3)

- In Eukarya, stalled translation induces 40S dissociation and recruitment of the ribosome quality control complex (RQC) to the 60S subunit, which mediates nascent chain degradation. Here we report cryo–electron microscopy structures revealing that the RQC components Rqc2p (YPL009C/Tae2) and Ltn1p (YMR247C/Rkr1) bind to the 60S subunit at sites exposed after 40S dissociation, placing the Ltn1p RING (Really Interesting New Gene) domain near the exit channel and Rqc2p over the P-site transfer RNA (tRNA). We further demonstrate that Rqc2p recruits alanine- and threonine-charged tRNA to the A site and directs the elongation of nascent chains independently of mRNA or 40S subunits. Our work uncovers an unexpected mechanism of protein synthesis, in which a protein—not an mRNA—determines tRNA recruitment and the tagging of nascent chains with carboxy-terminal Ala and Thr extensions. Η πρωτεΐνη Rqc2 μπορεί να συνδέει αμινοξέα χωρίς να λαμβάνει οδηγίες από το DNA ή από τον αγγελιοφόρο του, το mRNA.

Στατιστική Ανάλυση (1 από 4)

- **ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**
  0) Λαμβάνω το Δείγμα
  1) Προσδιορίζω το είδος των Μεταβλητών (Nominal, Ordinal, Scale ; SPSS)
  Περιγραφική Στατιστική Μιας Μεταβλητής
  3) Παρουσιάζω Γραφήματα για κάθε Μεταβλητή Για Nominal και Ordinal Μεταβλητές: Barplot, Pieplot
  Για Scale Μεταβλητές: Histograms, Boxplot
  4) Παρουσιάζω Πινάκες για κάθε Μεταβλητή
  Για Nominal και Ordinal Μεταβλητές:
  Frequency, Percent (Σχετική Συχνότητα), Cumulative Percent (Αθροιστική Σχετική Συχνότητα)
  Για Ordinal Μεταβλητές αν απαιτείται: Mean, Median, Range, Minimum, Maximum
  Για Scale Μεταβλητές που ακολουθουν Κανονική Κατανομή:
  Mean, Standard Deviation, Skewness, Kurtosis
  Για Scale Μεταβλητές που δεν ακολούθουν Κανονική Κατανομή:
  Median, Mode, Standard Error of Mean, Range, Minimum, Maximum, Percentiles

Στατιστική Ανάλυση (2 από 4)

- **Περιγραφική Στατιστική Ζεύγους Μεταβλητών**
  3΄) Παρουσιάζω Γραφήματα
  Για Ζεύγος Nominal , Ordinal Μεταβλητών: Barplot
  Για Ζεύγος Nominal η Ordinal με Scale Μεταβλητών: Boxplot
  Για Ζεύγος Scale Μεταβλητών: Scatterplot
  4΄) Συσχετίσεις Ζεύγους Scale Μεταβλητών
  Covariance Matrix
  Correlation Coefficient Pearson

  Ελεγχος Υποθέσεων
  5) Για Δείγμα Μετρήσεων μιας Scale Μεταβλητής
  Test of the Hypothesis for a given Sample Distribution
  Kolmogorov-Smirnov
  Q-Q-Plot
  Test for Outliers
  Αποτέλεσμα: Το Δείγμα ακολουθεί την επιλεγείσα Κατανομή, ή Το Δείγμα δεν ακολουθεί την επιλεγείσα Κατανομή

Στατιστική Ανάλυση (3 από 4)

Για Δείγμα Μετρήσεων μιας Scale Μεταβλητής που ακολουθεί Κανονική Κατανομή Test Μέσης Τιμής: One Sample T-Test

Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι Η Μέση Τιμή του Πληθυσμού με βάση το Δείγμα είναι μ με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

6) Για Δείγματα Μετρήσεων δυο Ανεξάρτητων Scale Μεταβλητών που ακολουθούν Κανονική Κατανομή

Levene Test for the Hypothesis of the equality of Variances:

Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

Οι Διασπορές των Πληθυσμών δεν διαφέρουν με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

For Equal Variances: Two Sample T-Test for the Hypothesis of the equality of Means For Different Variances: Two Sample T-Test for the Hypothesis of the equality of Means

7) Για Δείγματα Μετρήσεων δυο Αλληλοεξαρτωμένων Scale Μεταβλητών που ακολουθουν Κανονική Κατανομή

Paired Sample T-Test for the Hypothesis of the equality of Means

For Different Variances: Two Sample T-Test for the Hypothesis of the equality of Means

Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι Οι Μέσες Τιμές των Πληθυσμών δεν διαφέρουν με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

Στατιστική Ανάλυση (4 από 4)

Για Δείγματα Μετρήσεων μιας Nominal είτε Ordinal Μεταβλητής
Chi-square Test για Goodness of Fit της Κατανομής του Δείγματος σε Κλάσεις
Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η εκτιμώμενη κατανομή του πληθυσμού σε κλάσεις είναι αληθής με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

Για Δείγματα Μετρήσεων δυο Nominal είτε Ordinal Μεταβλητών
Chi-square Test για Independence
Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι οι Μεταβλητές είναι Ανεξάρτητες με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

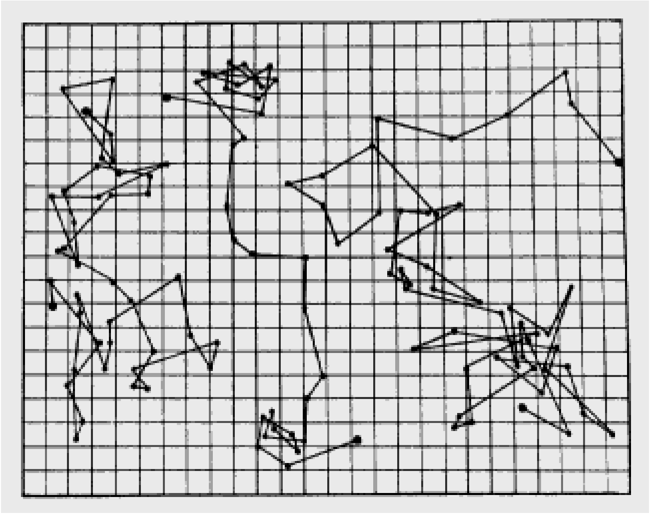
Γραμμική Παλινδρόμηση δυο Αριθμητικών Μεταβλητών
Define the Dependent and the Independent Variable
Test the Hypothesis that the slope (B_1) of the Regression Line is not zero ($B_1 \neq 0$)
Αν είναι δέκτη η Μηδενική Υπόθεση συμπεραίνουμε ότι οι Μεταβλητές δεν συνδέονται Γραμμικά με σημαντικότητα α (πχ 0,05)

Μοντέλα
(1 από 3)

Πως θα προβλέψω το Μέλλον (επόμενες τιμές);
Μοντέλα

OBSERVATIONS	HYPOTHESIS – EMPIRICAL LAW HOW?
Motion of Bodies	Aristotle Law of Motion 300 BC: Velocity is proportional to Force Galileo Law of Inertia 1630: Free Bodies move with Constant Velocity
Motion of Stars: Ancient Astronomers Tycho Brahe	Ptolemy 130 Almagest, Epicycles Kepler 1620, 3 Laws of planetary Motion
Floating Bodies in the Water	Archimedes 200BC, Law Buoyancy (Ανωσις)

Μοντέλα
(2 από 3)

OBSERVATIONS	HYPOTHESIS – EMPIRICAL LAW HOW;
Κίνηση Brown 1820	Vis Vitalis  Απεικόνιση Κίνησης Brown. Οι διαδοχικές θέσεις ανά 30 δευτερόλεπτα συνδέονται με ευθείες γραμμές. Perrin J. 1910, Brownian Movement and Molecular Reality Einstein 1910 Στοχαστικές Διαδικασίες Διάχυσης

Μοντέλα
(3 από 3)

- **Newton Mechanics 1667 explained and unified:**
  - the Motion of bodies,
  - the Motion of Stars,
  - Floating Bodies,
  - the Brownian Motion, Statistical Mechanics

Παρατήρηση, Υπόθεση, Εμπειρικός Νόμος

OBSERVATIONS	HYPOTHESIS – EMPIRICAL LAW HOW?
Evolution of Organisms in Ecosystems	Malthus 1798: the change of the population is: $\Delta N=\alpha N$, unlimited growth. Verhulst 1838 Correction: $\Delta N=\alpha N-\kappa N^2$, logistic growth, limit cycles, chaos Branching Processes 1870 Name preservation, Darwin Evolution, Stochastic processes
Collective Social Motion, Intelligence: Birds Fishes, Ants, Fireflies	Collective Spirit Patterns Classification Synchronization in ODE 1992, VIDEO Small World Networks
economic change	Law of Supply and Demand Denham-Steuard 1767, Adam Smith 1776 Pareto 1870 Bachelier 1900 Black-Scholes 1973, Martingales 1990 Network Economy
our co-evolution with the www	the WWW is Self-similar {Barabasi 1998, Discovery of new Graphs} Life Networks, BioWeb

Απαγωγή και Επαγωγή

<table>
<tr><td colspan="2">Ευθύ Πρόβλημα
Direct Problem</td><td>Αντίστροφο Πρόβλημα
Inverse Problem</td></tr>
<tr><td colspan="2">Απαγωγικός Συλλογισμός
(Deductive Reasoning)</td><td>Επαγωγικός Συλλογισμός
(Inductive Reasoning</td></tr>
<tr><td>Δυναμικά Μοντέλα

Διαφορικές Εξισώσεις
Εξισώσεις Διαφόρων

Υπολογισμός
των Τιμών των
Μεταβλητών

Προσομοίωση
Σεναρίων</td><td>Στοχαστικά Μοντέλα

Διαφορικές Εξισώσεις
Εξισώσεις Διαφόρων
Για τις Πιθανότητες

Υπολογισμός Πιθανοτήτων
Πιθανολογική Εκτίμηση
Των Τιμών των Μεταβλητών

Πιθανολογική Προσομοίωση
Σεναρίων</td><td>Στατιστική</td></tr>
</table>

Μοντέλα

1) **Πιθανότητα p_θ (Εκτίμηση)**

2) **Σχέση $Y= f(X)$**

$$Y= f(X_1 , X_2 ,…, X_N)$$

(Παλινδρόμηση, Data Fitting)

3) **Δυναμικά Μοντέλα = Σχέσεις- Νόμοι Μεταβολής στο Χρόνο**
   Διαφορικές Εξισώσεις
   Εξισώσεις Διαφόρων Αναδρομικές Ακολουθίες
   Σχέση Διαφορικών Εξισώσεων και Εξισώσεων Διαφόρων
   Στοχαστικές Διαδικασίες

Διαφορικές Εξισώσεις (1 από 3)

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}; \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{t})$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\begin{pmatrix}\mathbf{y_1}\\ \mathbf{y_2}\\ \vdots\\ \mathbf{y_N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{\Phi_1}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots \mathbf{y_N}; \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})\\ \mathbf{\Phi_2}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots \mathbf{y_N}; \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})\\ \vdots\\ \mathbf{\Phi_N}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots \mathbf{y_N}; \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{\zeta_1}(\mathbf{t})\\ \boldsymbol{\zeta_2}(\mathbf{t})\\ \vdots\\ \boldsymbol{\zeta_N}(\mathbf{t})\end{pmatrix}$$

y = (y_n), n=1,2,3,...,N πραγματικές μεταβλητές συναρτήσεις του χρόνου t

= (Φ_n), n=1,2,3,...,N οι Ρυθμοί (Ταχύτητες) Μεταβολής

θ= παράμετροι μοντέλου $\theta \in \Theta$

= (ζ_n), n=1,2,3,...,N Διέγερση (y Απόκριση στη Διέγερση)

Διαφορικές Εξισώσεις (2 από 3)

- **Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Ομογενείς**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\theta) & \Phi_{12}(\theta) & \cdots & \Phi_{1N}(\theta) \\ \Phi_{21}(\theta) & \Phi_{22}(\theta) & \cdots & \Phi_{2N}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{N1}(\theta) & \Phi_{N2}(\theta) & \cdots & \Phi_{NN}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

- **Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Μη Ομογενείς**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\theta) & \Phi_{12}(\theta) & \cdots & \Phi_{1N}(\theta) \\ \Phi_{21}(\theta) & \Phi_{22}(\theta) & \cdots & \Phi_{2N}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{N1}(\theta) & \Phi_{N2}(\theta) & \cdots & \Phi_{NN}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \vdots \\ \zeta_N(t) \end{pmatrix}$$

Διαφορικές Εξισώσεις (3 από 3)

- **Η απλούστερη Διαφορική Εξίσωση:**

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(\mathrm{t})$$
$$\mathrm{y}(\mathrm{t}_0) = y_0$$
$$\Leftrightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t} dt\Phi(\mathrm{t}) + \mathrm{y}(\mathrm{t}_0)$$

- **Πινάκες Ολοκληρωμάτων**
- **Προγράμματα**

Η Διαφορική Εξίσωση Newton

- **Η Διαφορική Εξίσωση Newton**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

$x(t_0)=x_0$
$v(t_0)=v_0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \dfrac{F(x)}{m} \\ \end{pmatrix}$$

$x(t_0)=x_0$
$v(t_0)=v_0$

Μεταφορά με Σταθερή Ταχύτητα

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \;\;,\;\; x(0)=x_0 \,,\; \dot{x}(0)=v_0$$

$$\Leftrightarrow \;\; \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \;\;,\; x(0)=x_0 \,,\; v(0)=v_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \int_0^t dt\, 0 + v(0) = v_0$$

$$x(t) = \int_0^t dt\, v_0 + x(0) = v_0 t + x_0$$

$$S^t\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t + x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Αρμονικός Ταλαντωτής

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\,, \quad x(0)=x_0\ ,\dot{x}(0)=v_0 \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, x(0)=x_0\ , v(0)=v_0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t + a) \\ -\omega A sin(\omega t + a) \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff S^t \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{x_0}^2}{\omega^2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\omega t - art\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)\right) \\ -\omega sin(\omega t - art(\frac{v_0}{\omega x_0})) \end{pmatrix}$$

$$\iff S^t \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Αρμονικός Ταλαντωτής με Γραμμική Τριβή (Απόσβεση)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0\,,\quad x(0)=x_0\ , v(0)=v_0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\binom{x}{v} = \binom{v}{-\omega^2 x - \gamma v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\binom{x}{v},\ \ x(0)=x_0\ , \dot{x}(0)=v_0$$

$$\Leftrightarrow\ \binom{x(t)}{v(t)} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t}A\cos(wt+a) \\ -e^{-\frac{\gamma}{2}t}A[\frac{\gamma}{2}\cos(wt+a) + w\sin(wt+a)] \end{pmatrix},\ w = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ S^t\binom{x_0}{v_0} = e^{-\beta wt}\begin{pmatrix} \cos wt & \frac{1}{w}\sin wt \\ -w\sin wt - \beta^2\cos wt & \cos wt - \beta\sin wt \end{pmatrix}\binom{x_0}{v_0},\ \ \beta = \frac{\gamma}{2w}$$

Μη Γραμμική Δυναμική

- **Πρόβλημα 3 Σωμάτων Poincare 1890**
- **Ατμοσφαιρική Κυκλοφορία Εξίσωση Lorenz 1967**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma x - \sigma y \\ -rx - y - xz \\ -bz + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & -\sigma & 0 \\ -r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Γραμμικο Μερος   Μη Γραμμικο Μερος

σ,r,b πραγματικοι αριθμοι

Lorenz: σ=10 , r=28 , b=8/3

Εξισώσεις Διαφόρων

- **Αναδρομικές Ακολουθίες r-τάξεως , r=1,2,3,…**

$y_{t+r} = S[y_{t+r-1}, y_{t+r-2}, \ldots, y_{t+1}, y_t]$, t=0,1,2,3,…

$y_0, y_2, \ldots, y_{r-1}$

- **Αναδρομικές Ακολουθίες 1ης τάξεως**

$y_{t+1} = S[y_t]$, t=0,1,2,3,…

y_0

Γραμμικές Αναδρομικές Ακολουθίες 1ης Τάξεως

- **$y_{t+1} = \alpha y_t + \omega, \ \alpha \neq 1$**
  y_0

Λύση: $y(\mathrm{t}) = \alpha^t y_0 + \omega \frac{1-\alpha^t}{1-a}$

Αριθμητική Πρόοδος

$y_{t+1} = y_t + \omega$, t=0,1,2,3,... , y_t Πραγματικοί Αριθμοί
Λύση: $y_t = y_0 + t\omega$

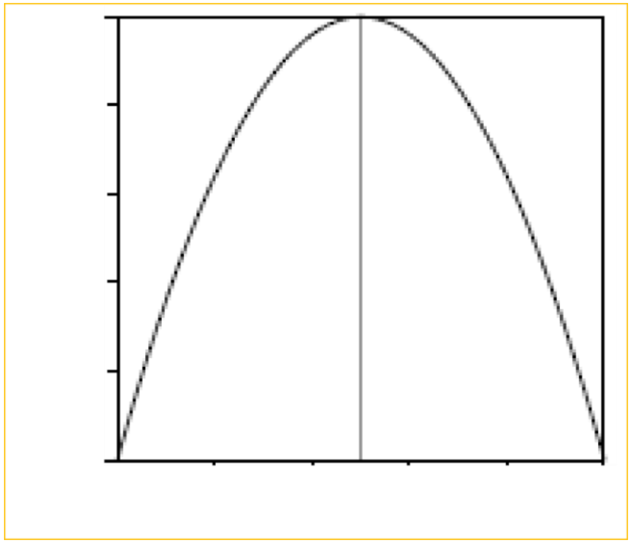
Γεωμετρική Πρόοδος

$y_{t+1} = \alpha y_t$, t=0,1,2,3,... , y_t Πραγματικοί Αριθμοί
Λύση: $y_t = \alpha^t y_0$

Μη Γραμμικές Αναδρομικές Ακολουθίες 1ης Τάξεως

- **Ακριβείς Λύσεις είναι γνώστες μόνο σε λίγες ειδικές περιπτώσεις**
- **Αριθμητικοί Υπολογισμοί**
- **Προσομοιώσεις**
- **Ασυμπτωτικά Συμπεριφορά: $t \to \infty$**
- Ευστάθεια: Δυναμική, Ασυμπτωτική, Δομική
- Στατιστικές ιδιότητες

Λογιστική Απεικόνιση



- Λογιστική Απεικόνιση (Logistic Map)

S: [0,1)→ [0,1):

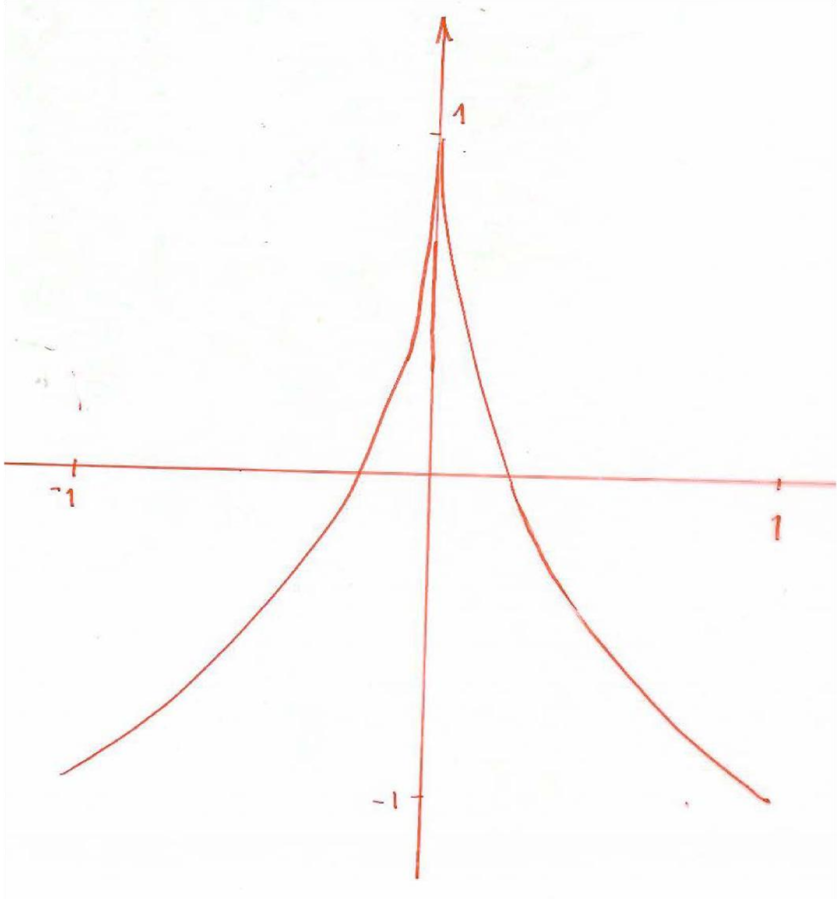
$y_{t+1} = \alpha\, y_t\, (1- y_t)$

Γνωστές Λύσεις μόνο για α=−2, 2 & 4

(πλήρες Χάος).

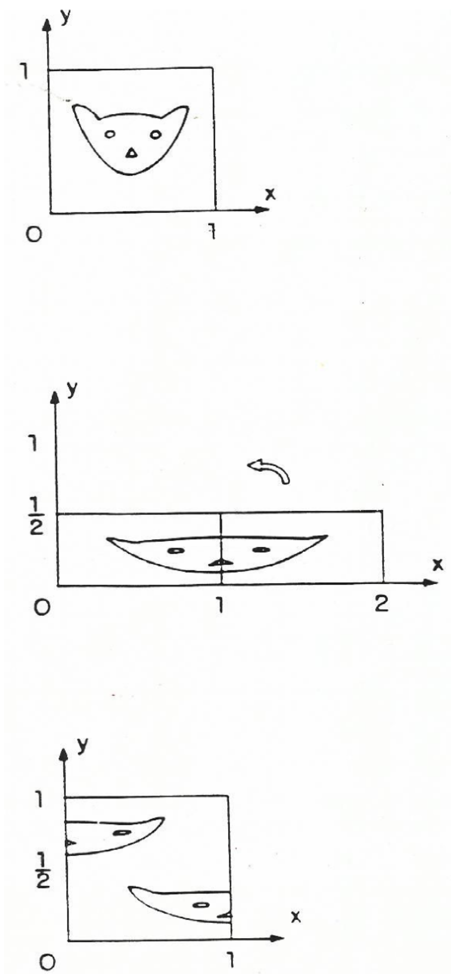
- Λύση Ulam-Von Neumann
- $y_t = \sin^2 (2^t \arcsin \sqrt{y_0})$, t=1,2,3,... **{0.2}**

Απεικόνιση Σφήνας (Cusp)



$$S:[-1,1] \rightarrow [-1,1]$$
$$y: \quad S(y) = 1 - 2\sqrt{|y|}$$

Απεικόνιση Πλάστη (Baker) (1 από 2)



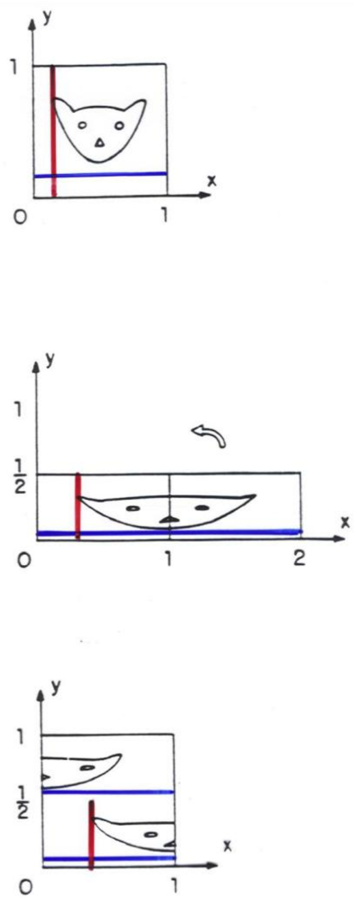
$B: [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \begin{pmatrix} 2x-1 \\ \frac{y+1}{2} \end{pmatrix} & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

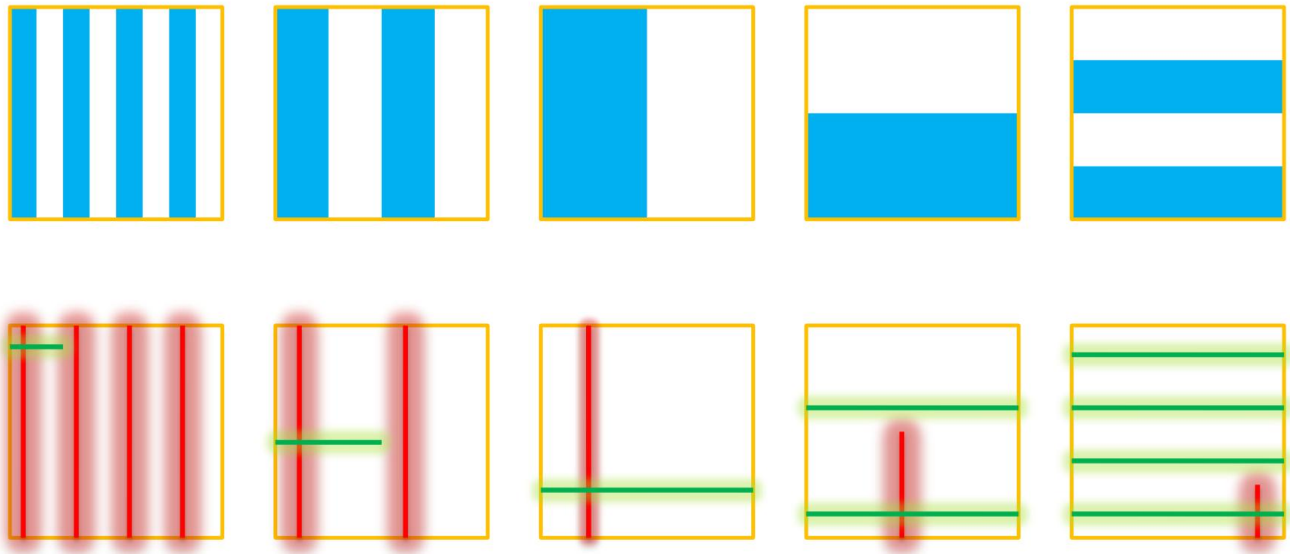
$B^{-1}: [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 2y \end{pmatrix} & , \quad y \in [0, \frac{1}{2}) \\ \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ 2y-1 \end{pmatrix} & , \quad y \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Απεικόνιση Πλάστη (Baker) (2 από 2)



Στατιστική Μη Αναστρεψιμότητα



Στατιστική Μη Αναστρεψιμότητα
Αστάθεια στην οριζόντια κατεύθυνση
Ευστάθεια στην κάθετη κατεύθυνση
Υπερβολική Δομή Τοπικό Γεωμετρικό Χαρακτηριστικό Χάους

Σχέση Διαφορικών Εξισώσεων και Εξισώσεων Διαφόρων

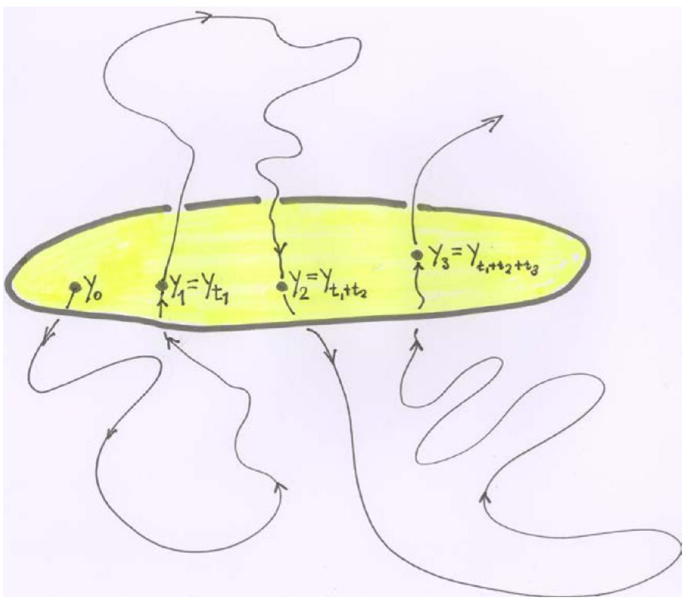
- **Διακριτοποίηση ΔΕ**
  - **Euler Method**
  - **Poincare Section**
  - **Symbolic Dynamics**

Euler Method

- The Euler 1-order Recurrence Equation of ODE
- The Euler ode of the ODE $\frac{dy}{dt} = \Phi(y(t))$, with y0 = y(t0) is the 1st-order RE (Αναδρομική Ακολουθία) : $y_{\nu+1} = y_\nu + \tau\Phi(\quad {}_{+\ \tau}) = S(y_\nu)$,

  $\nu = 0,1,2,\ldots$

Poincare Section



- The Poincare Return Map of the

  Recurrent set Ξ

  $Sy=y_1$: 1st return point in Ξ by S^t

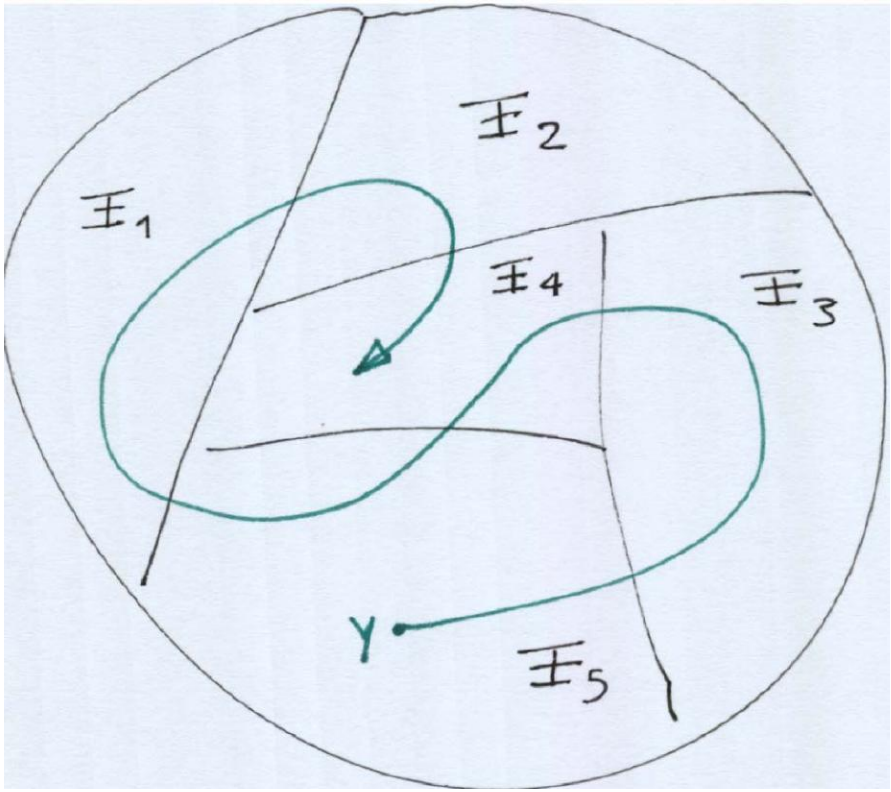
  $S^2y=y_2$: 2d return point in Ξ by S^t

  $S^my=y_m$: mth return point in Ξ by S^t

  Οι Χρόνοι Επαναδρομής ως Τυχαίες Μεταβλητές.

  Η Απεικόνιση Σφήνας ως Απεικόνιση Poincare της ΔΕ Lorenz.

Symbolic Dynamics



$S^t y$, t ≥ 0 η Τροχιά – Λύση της ΔΕ

$Ξ_5$, $Ξ_3$, $Ξ_4$, $Ξ_3$, $Ξ_1$, $Ξ_2$, $Ξ_4$, … η αντίστοιχη Συμβολική Ακολουθία

Στοχαστικές Διαδικασίες (1 από 2)

- (A_t) Τυχαίες Μεταβλητές, t συνεχής η διακριτός χρόνος

0-order

- Τα Δυναμικά Ντετερμινιστικά (Προσδιοριστικά) Μοντέλα

1-order

- Οι Διαδικασίες Bernoulli (Γεγονότα Ασυσχέτιστα $\supseteq$ Ανεξάρτητα)
- Λευκός Θόρυβος
- Τυχαίος περίπατος

Στοχαστικές Διαδικασίες (2 από 2)

- **2-order**
  - The Markov Processes (το επόμενο βήμα εξαρτάται μόνο από το παρόν):
  - Διαδικασίες Poisson: Ραδιενεργές Διασπάσεις
  - Διάχυση
  - Κίνηση Brown
  - Χημικές Αντιδράσεις – Δυναμική Πληθυσμών
  - Αντιδράσεις με Διάχυση Αυτό-Οργάνωση
  - Οι Μη Αναστρέψιμες Διαδικασίες Markov είναι Προβολές Χαοτικών Δυναμικών Συστημάτων σε Χώρους μεγαλυτέρων διαστάσεων.

    [Αντωνίου, Χρηστιδης, Gustafson 2004]

- **3-order**
  - Μη-Markov Διαδικασίες: Είναι προβολές Διαδικασιών Markov σε Χώρους μεγαλυτέρων διαστάσεων.

Βιβλιογραφία
(1 από 5)

- **Οι αναφορές του Βιβλίου του κ. Σγαρδέλη (Μαθηματικά Μοντέλα στη Βιολογία, University Studio Press) και επιπλέον**
- **General**

  - Kondepudi D., Prigogine I. 1998, Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures, Wiley, New York .
  - Mosconi F., Julou T., Desprat N., Sinha D.K., Allemand J.-F., Croquette V. and Bensimon D. 2008. Some Nonlinear Challenges in Biology, Nonlinearity 21, T131–T147 doi:10.1088/0951-7715/21/8/T03.
  - Prigogine I. 1980, From Being to Becoming, Freeman, New York.
  - Prigogine I. 2003, Is Future given;, World Scientific ,Singapore. Ελλην. Μετάφραση Κάτοπτρο .
  - Strogatz S.1994, Non-Linear Dynamics and Chaos, Perseus, Massachusetts.
  - Strogatz S.2003, Sync: the emerging science of spontaneous order, Hyperon, New York.

Βιβλιογραφία
(2 από 5)

- **Ordinal Differential Equations**
  - Arnold V.I. 1978, Ordinary Differential Equations, MIT Press, Cambridge, MA .
  - Arnold V.I. 1990: Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhauser , Basel.
  - Hirsch M., Smale S. 1974, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, London.
  - Παντελίδης Γ. , Κραββαρίτης Δ., Χατζησάββας Ν. 1997, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδ. Ζήτη, Αθήνα.
  - Polyanin A.D., Zaitsev V.F. 2002, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, CRC Press.
  - Σιαφαρίκας Π. 2000, Εφαρμογές των Συνηθών Διαφορικών Εξισώσεων Ι, ΙΙ , Πάτρα.

Βιβλιογραφία
(3 από 5)

- **Partial Differential Equations**
    - Δάσιος Γ. , Κυριακή Κ. 2004, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα.
    - Gustafson K. 1999, Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, Dover, New York.
    - Sobolev S. 1989, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Dover, New York.
    - VVesdsnsky D. 1992, Partial Differential Equations with Mathematica, Addison Wesley, New York.

Βιβλιογραφία
(4 από 5)

- **Difference Equations Discrete Systems**
- Galor O. 2007, Discrete Dynamical Systems, Springer, Berlin.
- Kolaczyk E. 2009, Statistical Analysis of Network Data. Methods and Models, Springer, New York.
- Kulesovic M.R.S., Merino O. 2002, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematicα, CRC Press.
- Κυβεντίδης Θ. 2001, Εξισώσεις Διαφορών και Διακριτά Συστήματα, Ζήτης, Θεσσαλονίκη.
- Κυβεντίδης Θ. 2001, Δυναμική Πληθυσμών. Διακριτά Μοντέλα, Ζήτης, Θεσσαλονίκη.
- Lewis T. 2009, Network Science. Theory and Practice, Wiley, New York.
- Van der Hofstad R. 2011, Random Graphs and Complex Networks, www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf
- Wolfram S. 2002, A New Kind of Science, Wolfram Media, Champaign, Illinois.

Βιβλιογραφία (5 από 5)

- **Stochastic processes**
- Antoniou I., Christidis Th., Gustafson K. 2004, Probability from Chaos, Int. J. Quantum Chemistry 98,150-159.
- Bharucha-Reid A. T. 1960, Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, McGraw-Hill, New York.
- Gardiner C. 1983, Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer Verlag, Berlin (1983).
- Goel N., Richter-Dyn 1974, Stochastic Models in Biology, Academic Press, New York.
- Risken H. 1984, The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications, Springer, Berlin.
- Σπηλιώτης Ι. 2004, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις , Συμεών , Αθήνα.
- Σταυρακάκης Ν. 1997, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- Van Kampen N. 1981, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland, Amsterdam
- Whittle P. 2000, Probability via Expectation, Penguin (1970); 4th edition, Springer, New York
- Wilkinson D. L. 2006, Stochastic Modeling for Systems Biology, Chapman and Hall/CRC, London, UK

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

BY SA

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.