



# Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 8 : Μιγαδικοί Αριθμοί & Ακολουθίες Αριθμών

Στέφανος Σγαρδέλης  
Τμήμα Βιολογίας



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





# Μιγαδικοί Αριθμοί & Ακολουθίες Αριθμών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Περιεχόμενα Ενότητας

1. Μιγαδικοί Αριθμοί
2. Εισαγωγή
3. Μιγαδικό Επίπεδο
4. Η απεικόνιση του  $W=\exp(z)$
5. Μιγαδικές Συναρτήσεις
6. Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών
7. Ορισμός Ακολουθίας Πραγματικών Αριθμών
8. Η ακολουθία Fibonacci



# Σκοποί Ενότητας

- Η Ενότητα 8 αποτελεί μια επανάληψη της ύλης του λυκείου και επέκταση σε ορισμένα θέματα που μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια. Περιλαμβάνει εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς και στις ακολουθίες αριθμών.



# Μιγαδικοί Αριθμοί: Εισαγωγή

Η φανταστική μονάδα ορίζεται ως  $i = \sqrt{-1}$

## Φανταστικοί Αριθμοί

$$z = \beta i \text{ με } \beta \in \mathbb{R}$$

## Μιγαδικοί Αριθμοί

$$z = \alpha + \beta i \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

## Μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$

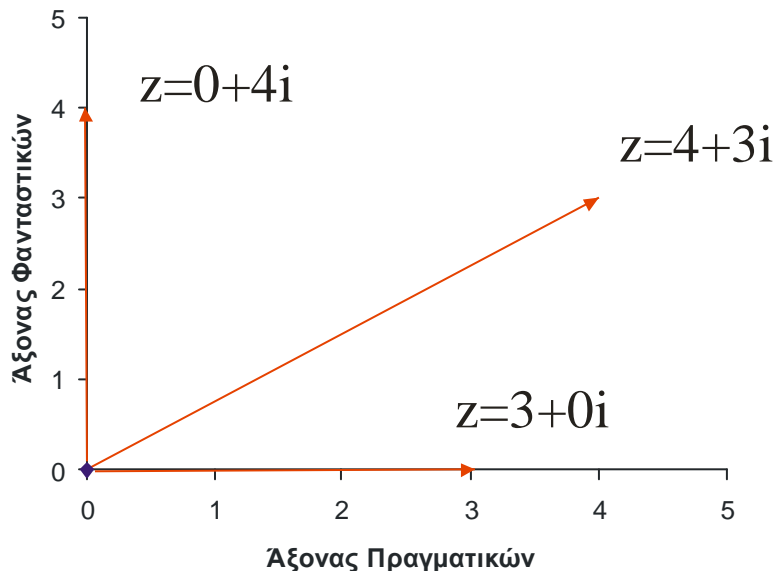
- Το  $\alpha$  είναι το πραγματικό του μέρος:  $Re(z)=\alpha$ ,
- Το  $\beta$  είναι το φανταστικό του μέρος:  $Im(z)=\beta$ .

Συζυγείς Μιγαδικοί:  $\alpha + \beta i$  και  $\alpha - \beta i$ :

Το σύνολο των μιγαδικών συμβολίζεται με το γράμμα  $\mathbb{C}$ .



# Μιγαδικό Επίπεδο



- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά στο **μιγαδικό επίπεδο** ως διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο το πραγματικό και δεύτερο το φανταστικό μέρος

## • Άρα

- ο μιγαδικός  $z=4+3i$  μπορεί να παρασταθεί ως σημείο Μ με συντεταγμένες (3,4)





# Η Εκθετική Μιγαδική Συνάρτηση $W=e^{zx}$

$$W(x) = e^{zx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bix}$$

Τι μορφή έχει ο όρος  $e^{zx}$ ;

Περισσότερα στο:

<https://www.pacifict.com/Exponential.html>

<https://www.pacifict.com/ComplexFunctions.html>



# Η Εκθετική Μιγαδική Συνάρτηση $W=e^z$

- Θεώρημα Euler (χωρίς απόδειξη)

Για κάθε φανταστικό αριθμό  $b$ , ισχύει ότι

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b$$

(sin=ημίτονο, cos= συνημίτονο)

- Πόρισμα

Θεωρώντας το  $b$  ως γωνία και εφαρμόζοντας για  $b=\pi$ :

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Περισσότερα στο

[http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula)



# Εφαρμογή (1 από 4)

- Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$Y = \text{Re}(e^{(a+bi)X})$$

όταν

- i)  $b=0, a>0$
- ii)  $b=0, a<0$
- iii)  $b\neq 0, a>0$
- iv)  $b\neq 0, a=0$
- v)  $b\neq 0, a<0$



# Εφαρμογή (2 από 4)

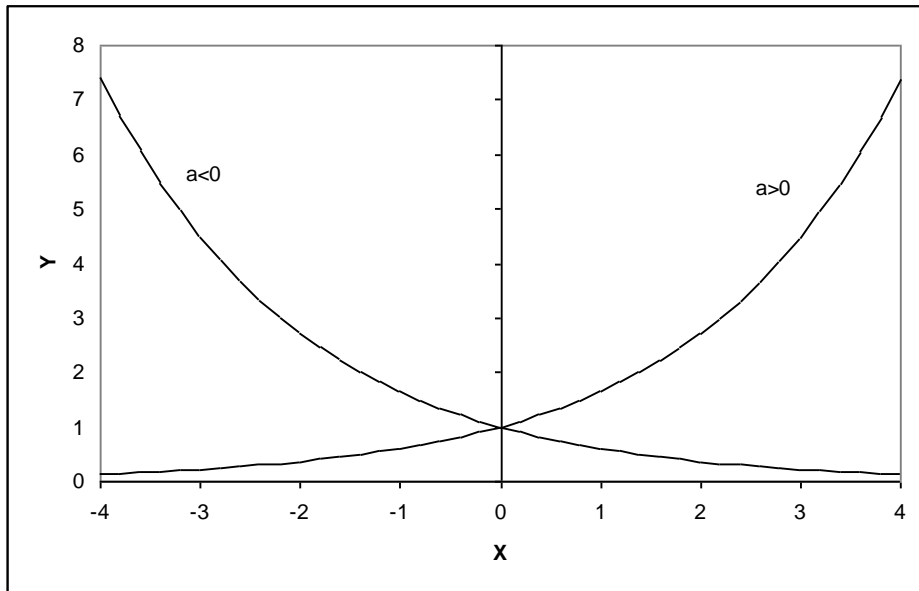
*i)  $b=0, a>0$  & ii)  $b=0, a<0$*

Για  $b=0$

$$Y = e^{aX}$$

(η γνωστή εκθετική συνάρτηση)

- $a>0$ : αύξουσα & τείνει ασυμπτωτικά στο άπειρο του  $X$  τείνοντας στο άπειρο
- $a<0$ : φθίνουσα & τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν του  $X$  τείνοντας στο άπειρο



Γραφική παράσταση της  $Y=e^{aX}$  για  $a=0.5$  &  $a=-0.5$



# Εφαρμογή (3 από 4)

iii)  $b \neq 0, a > 0$ , iv)  $b \neq 0, a = 0$ , v)  $b \neq 0, a < 0$

$$e^{(a+bi)X} = e^{aX} e^{biX} = e^{aX} [\cos(bX) + i \sin(bX)]$$

$$\operatorname{Re}(e^{(a+bi)X}) = e^{aX} \cos(bX)$$



# Εφαρμογή (4 από 4)

$$\operatorname{Re}(e^{(a+bi)X}) = e^{aX} \cos(bX)$$

- **$b \neq 0, \alpha > 0$**

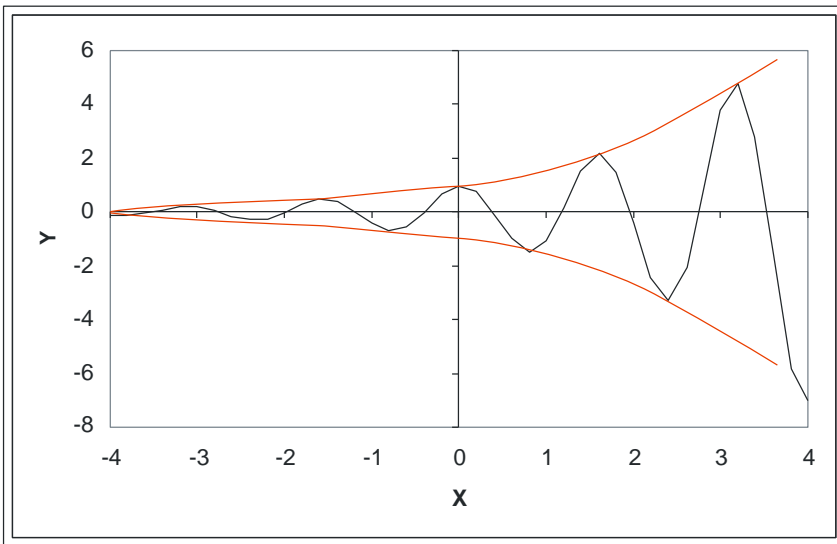
Προκύπτει το γινόμενο μιας αύξουσας εκθετικής επί μια τριγωνομετρική συνάρτηση με τιμές μεταξύ -1 και 1.

- **$b \neq 0, \alpha = 0$**

Ο εκθετικός όρος έχει σταθερή τιμή ίση με τη μονάδα & μένει ο τριγωνομετρικός όρος.

- **$b \neq 0, \alpha < 0$**

Ο εκθετικός όρος φθίνει προσεγγίζοντας το μηδέν



# Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

- Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται μια απεικόνιση  $g$  των φυσικών αριθμών  $N = \{1,2,3,\dots\}$  στο σύνολο  $R$  των πραγματικών αριθμών.
- Ο συμβολισμός  $a_n = g(n)$  αναφέρεται στον  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας  $g$ .



# Ορισμός Ακολουθίας Πραγματικών Αριθμών

- Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί είτε με τον αναδρομικό της τύπο ή με το γενικό της τύπο:

**Αναδρομικός τύπος**

$$\alpha_{v+1}=g(\alpha_v)$$

**Γενικός τύπος (λύση)**

$$\alpha_v=f(\alpha_1)$$





# Εφαρμογή

- Η αναδρομική σχέση  $a_{v+1} = 2a_v$  με  $a_0 = 1$  και  $v = 1, 2, 3, \dots$  ορίζει την ακολουθία 2, 4, 8 η οποία ορίζεται επίσης από τον γενικό τύπο  $X_v = 2^v$  για  $v = 1, 2, 3, \dots$



# Η Ακολουθία Fibonacci

- **Ακολουθία Fibonacci: 1,1,2,3,5,8...**
- Ο κάθε όρος της ακολουθίας από τον τρίτο και μετά είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων
- **Αναδρομικός τύπος**  $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ , αρχικές συνθήκες  $X_1 = X_2 = 1$
- **Γενικός τύπος**

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$



# Άσκηση

- Να μελετηθεί η ακολουθία με γενικό τύπο  $h_t = 2r^t$  αν
  - i.  $r = 0$ ,
  - ii.  $0 < r < 1$ ,
  - iii.  $r = 1$ ,
  - iv.  $r > 1$ ,
  - v.  $-1 < r < 0$ ,
  - vi.  $r = -1$  &
  - vii.  $r < -1$



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

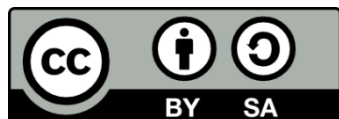
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου  
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

