ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 9 : Παράγωγοι Συναρτήσεων

Στέφανος Σγαρδέλης
Τμήμα Βιολογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Παράγωγοι Συναρτήσεων

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας (1 από 2)

1. Παράγωγος Συνάρτησης
2. Συμβολισμοί Παραγώγου
3. Σημασία Παραγώγου
4. Ταχύτητα ή Ρυθμός Μεταβολής
5. Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων
6. Ιδιότητες Παραγώγου
7. Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης
8. Χρήση Παραγώγων στα Προβλήματα Μεγιστοποίησης- Ελαχιστοποίησης
9. Μεγιστοποίηση Κέρδους από Καλλιέργεια
10. Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών
11. Συναρτήσεις Δύο Μεταβλητών

Περιεχόμενα Ενότητας (2 από 2)

Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 9 παρουσιάζονται βασικοί κανόνες παραγώγισης και ολοκλήρωσης συναρτήσεων.

Παράγωγος Συνάρτησης

- Έστω συνάρτηση f(x) ορισμένη σε διάστημα Δ και σημείο $\alpha \in$ Δ.
- Ονομάζουμε παράγωγο της f στο σημείο α το όριο (εφόσον υπάρχει)

$$\lim_{x->a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Η παράγωγος συνάρτησης σ' ένα σημείο είναι ένας αριθμός, η παράγωγος μιας συνάρτησης σε διάστημα είναι μια άλλη συνάρτηση.

Συμβολισμοί Παραγώγου

- Αν **Y=f(X)** μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του X οι συμβολισμοί αποδεκτοί συμβολισμοί της παραγώγου της *Y=f(X)* είναι:

$$Y', \quad f'(X), \quad \frac{dY}{dX}, \quad \frac{df(X)}{dX}, D_X f(X), \quad D_X Y$$

Σημασία Παραγώγου

- Η παράγωγος εκφράζει το στοιχειώδη ρυθμό (ταχύτητα) μεταβολής.
- Σε πολλά φαινόμενα που παρατηρούμε στη φύση, είναι ευκολότερο να μετρήσουμε την ταχύτητα της μεταβολής των μεγεθών που τα χαρακτηρίζουν, παρά το ίδιο το αποτέλεσμα των μεταβολών αυτών.

Ταχύτητα ή Ρυθμός Μεταβολής

i. **Μέσος ρυθμός μεταβολής** $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

Η ακρίβεια αυξάνει όσο μειώνεται το διάστημα X_2-X_1. Του διαστήματος αυτού τείνοντος στο μηδέν ο ρυθμός μεταβολής που υπολογίζουμε είναι ο **απόλυτος ρυθμός μεταβολής.**

ii. Απόλυτος ρυθμός μεταβολής $\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$

Αν *Y=f(X)* συνεχής συνάρτηση σε διάστημα που περιλαμβάνει το σημείο X_0 , ο απόλυτος ρυθμός μεταβολής στο σημείο X_0 είναι η παράγωγος της *f* στο δεδομένο σημείο.

ii. Σχετικός ρυθμός μεταβολής $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dX}$

Ανά μονάδα του *Y* ρυθμός μεταβολής. Αν η μεταβλητή *Y* αναφέρεται στα άτομα ενός πληθυσμού, τότε ονομάζεται **κατά κεφαλήν ρυθμός μεταβολής.**

Παράδειγμα

Ο πληθυσμός Ν των μικροβίων σε μια καλλιέργεια διπλασιάζεται κάθε εβδομάδα. Ο μέσος ημερήσιος ρυθμός μεταβολής είναι:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1} = \frac{2N_1 - N_1}{7} = \frac{N_1}{7}$$

Αν μια συνάρτηση περιγράφει τις μεταβολές του Ν στο χρόνο: $N_t = ce^{rt}$

Απόλυτος ρυθμός μεταβολής του Ν $\frac{dN}{dt} = (ce^{rt})' = rce^{rt} = rN$

Σχετικός ρυθμός μεταβολής του Ν $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$

Στην αρχή του χρόνου (*t=0)* ισχύει ότι $N_0 = ce^0 \Rightarrow c = N_0$

Για βήμα χρόνου μιας εβδομάδας $N_1 = N_0 e^r \Rightarrow 2N_0 = N_0 e^r \Rightarrow r = \ln(2) \Rightarrow \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \ln(2)$

απόλυτος ρυθμός μεταβολής $\frac{dN}{dt} = \ln(2) N$

Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Αν *c, a, k* σταθερές, ισχύουν τα παρακάτω

$$(c)' = 0$$

$$(aX)' = a$$

$$(X^k)' = kX^{k-1}$$

$$(e^X)' = e^X$$

$$(a^X)' = a^X Ln(a)$$

$$Ln(X)' = \frac{1}{X}$$

$$Log_a(X)' = \frac{1}{XLn(a)}$$

$$\cos(X)' = -\sin(X)$$

$$\sin^{-1}(X)' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$\cos^{-1}(X)' = \frac{-1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$\tan^{-1}(X)' = \frac{1}{1+X^2}$$

Ιδιότητες Παραγώγου

- **Αν α,β σταθερές και f(x),g(x) παραγωγίσημες συναρτήσεις ισχύουν οι παρακάτω κανόνες**

$$(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

- **Ο κανόνας παραγώγου σύνθετης συνάρτησης,**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dX}$$

Παράδειγμα
(1 από 2)

- **Πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του βάρους της καρδιάς ενός ζώου;**

  Έστω H το βάρος της καρδιάς και W το βάρος του σώματος.

  Γνωρίζω το σχετικό ρυθμό μεταβολής του βάρους του σώματος του ζώου

  $$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}$$

  και θέλω να υπολογίσω το σχετικό ρυθμό μεταβολής του βάρους της καρδιάς

  $$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}$$

  Ισχύει ότι

  $$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dW} \cdot \frac{dW}{dt}$$

  άρα πρέπει να βρω το

  $$\frac{dH}{dW}$$

Παράδειγμα (2 από 2)

Έστω ότι μετά από πειραματικές μετρήσεις βρίσκω ότι η σχέση που συνδέει το βάρους της καρδιάς και του σώματος του ζώου είναι:

$H = 0.5W^{0.75}$ οπότε $\dfrac{dH}{dW} = \dfrac{3}{8}W^{-\frac{1}{4}}$

Αντικαθιστώντας

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dW} \cdot \frac{dW}{dt} = \frac{3}{8}W^{-\frac{1}{4}} \frac{dW}{dt}$$

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = \frac{1}{H}\frac{3}{8}W^{-\frac{1}{4}}\frac{dW}{dt} = \frac{1}{0.5W^{\frac{3}{4}}}\frac{3}{8}W^{-\frac{1}{4}}\frac{dW}{dt} = \frac{3}{4}W^{-1}\frac{dW}{dt} = \frac{3}{4}\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}$$

ο σχετικός ρυθμός αύξησης του βάρους της καρδιάς είναι ίσος με τα ¾ του σχετικού ρυθμού αύξησης του βάρους του σώματος του ζώου.

Χρήση Παραγώγων στα Προβλήματα Μεγιστοποίησης- Ελαχιστοποίησης

- Περίφραξη ορθογώνιου τμήματος αγρού στο σύνορο ποταμού με περιορισμένου μήκους συρματόπλεγμα L

  Ζητούμενο: η περίφραξη να περικλείει το **μέγιστο εμβαδόν Ε**

  Συνάρτηση κριτήριο: **Ε = XY**

  Περιορισμός: η μία πλευρά δε χρειάζεται περίφραξη εξαιτίας του ποταμού

  L = 2X + Y και άρα **Y = L – 2X**

  Οπότε **Ε = X(L-2X)**

  Για ποια τιμή του Χ το Ε μεγιστοποιείται;

  $E' = L - 4X$

  $E' = 0$ όταν $X = L/4$ (ακρότατο)

  $E'' = -4$ (μέγιστο)

Μεγιστοποίηση Κέρδους από Καλλιέργεια (1 από 4)

- Το μεικτό κέρδος είναι ανάλογο του βάρους του εκτρεφόμενου ζώου τη στιγμή της πώλησης.
- Το βάρους των ζώων αυξάνει αρχικά αλλά στη συνέχεια σταθεροποιείται.
- Το κόστος εκτροφής περιλαμβάνει ένα αρχικό κόστος αγοράς νεαρών ζώων και το ημερήσιο κόστος που είναι ανάλογο του χρόνου εκτροφής.
- Καθαρό κέρδος = Μεικτό κέρδος –Συνολικό κόστος
- Αν σταματήσω την καλλιέργεια νωρίς τα ζώα δεν θα έχουν κερδίσει αρκετό βάρος , αλλά αν συνεχίσω την καλλιέργεια πέραν ενός σημείου τα ζώα θα κερδίζουν βάρους με μικρό ρυθμό ενώ τα έξοδα εκτροφής θα αυξάνουν συνεχώς

Μεγιστοποίηση Κέρδους από Καλλιέργεια (2 από 4)

Αρχικό κόστος αγοράς γόνου: $\mathbf{K_{\alpha}}$ Ευρώ /άτομο

Αρχικό βάρος κάθε ατόμου: $\mathbf{W_0}$

Τα ζώα αυξάνουν το βάρος τους με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση (α, m σταθερές)

$$W_t = a + (W_0 - a)\mathrm{e}^{-mt}$$

Ημερήσιο κόστος εκτροφής/άτομο: $\mathbf{K_{\varepsilon}}$ Ευρώ /άτομο

Τιμή πώλησης: **E** ευρώ/κιλό

Σε πόσες ημέρες από την έναρξη της εκτροφής πρέπει να πουλήσουμε τα ζώα για να επιτύχουμε το μέγιστο καθαρό κέρδος;

Μεγιστοποίηση Κέρδους από Καλλιέργεια (3 από 4)

Κέρδος πώλησης κάθε ζώου

$$EW_t = E(a + (W_0 - a)e^{-mt})$$

Κόστος καλλιέργειας κάθε ζώου

$$K_a - K_e t$$

Καθαρό κέρδος από κάθε ζώο

$$E(a + (W_0 - a)e^{-mt}) - K_a - K_e t$$

Πρώτη παράγωγος καθαρού κέρδους

$$(E(a + (W_0 - a)e^{-mt}) - K_a - K_e t)' = -mEae^{-mt} - mEW_0 e^{-mt} + mEae^{-mt} - K_e =$$

$$-mEW_0 e^{-mt} - K_e$$

Μεγιστοποίηση Κέρδους από Καλλιέργεια (4 από 4)

Στο ακρότατο, η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται και άρα

$$-mEW_0e^{-mt} - K_e = 0 \Rightarrow -mEW_0e^{-mt} = K_e \Rightarrow e^{-mt} = -\frac{K_e}{mEW_0}$$

$$-mt = \ln\left(-\frac{K_e}{mEW_0}\right) \Rightarrow t = -\frac{\ln\left(-\frac{K_e}{mEW_0}\right)}{m}$$

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

- Οι συναρτήσεις μιας μεταβλητής απεικονίζουν ένα υποσύνολο (πεδίο ορισμού) του συνόλου R των πραγματικών αριθμών σε ένα σύνολο (πεδίο) τιμών που είναι επίσης υποσύνολο του R.
- Απεικόνιση ενός διατεταγμένου ζεύγους πραγματικών αριθμών σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό R ⍰ Συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού υποσύνολο του επιπέδου R2
- Απεικόνιση n-διάστατου πραγματικού χώρου Rn σε ένα σημείο του R → Συνάρτηση πολλών μεταβλητών

Συμβολισμοί

- Απεικόνιση Rn στο R μέσω της f

$$R^n \xrightarrow{f} R$$

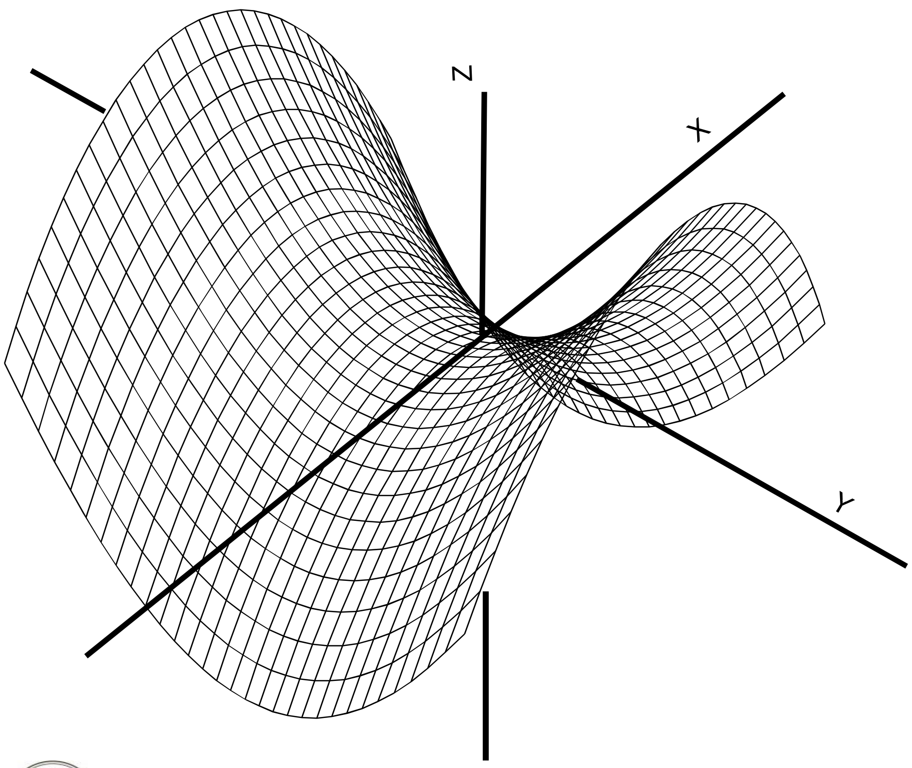
- Συνάρτηση n μεταβλητών

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

- Συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$Z = f(X, Y)$$

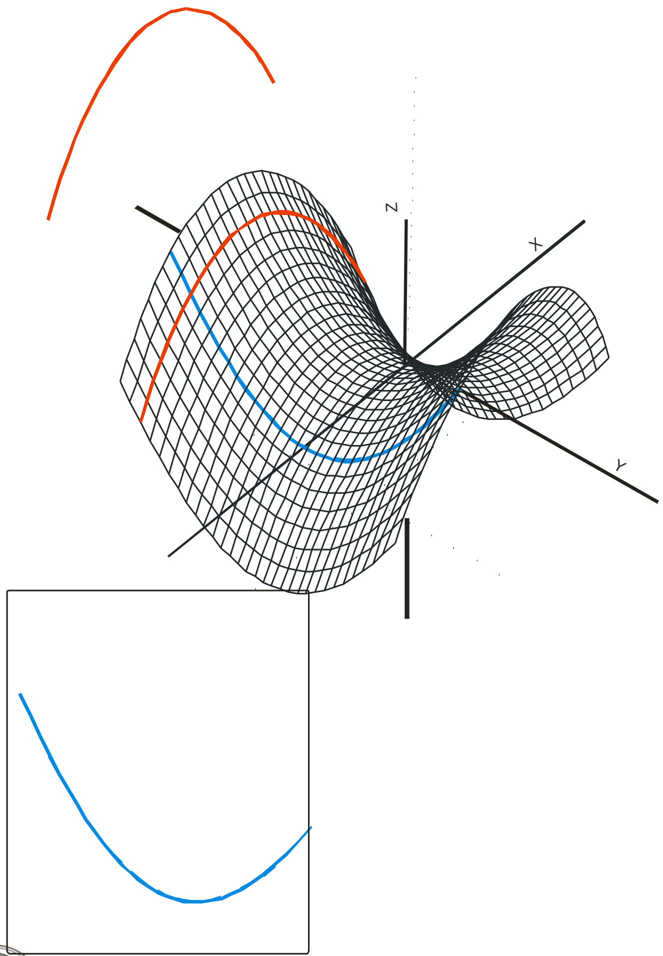
Συναρτήσεις Δύο Μεταβλητών (1 από 2)



$$Z = f(X,Y) = Y^2 - X^2$$

- Γράφημα συναρτήσεων δύο μεταβλητών: επιφάνεια που εμπεριέχεται σε χώρο 3 διαστάσεων (X,Y,Z)
- Αναγωγή στη μελέτη συναρτήσεων μιας μεταβλητής.
- Κάθετες τομές της επιφάνειας σε συγκεκριμένα σημεία.
- Διατήρηση σταθερών τιμών των δύο μεταβλητών και εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται η τρίτη μεταβλητή.

Συναρτήσεις Δύο Μεταβλητών (2 από 2)



- Y=α =σταθερά, τότε

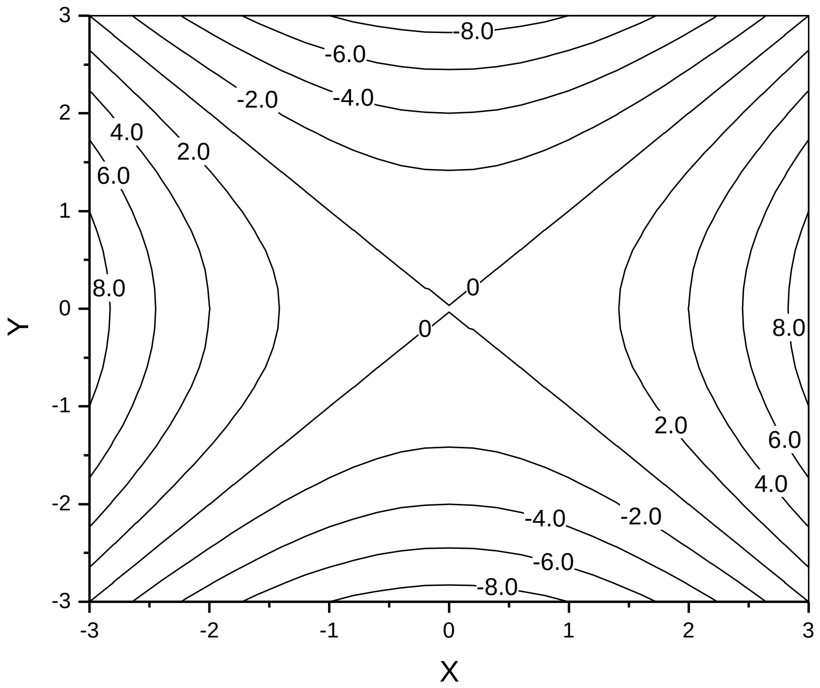
  $$Z = f(X, a) = a^2 - X^2$$

  παραβολή που έχει μέγιστο στο σημείο **X=0, Y=α, Z= α^2**
- X=α =σταθερά, τότε

  $$Z = f(a, Y) = Y^2 - a^2$$

  παραβολή που έχει ελάχιστο στο σημείο **X=α, Y=0, Z= -α^2**
- Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε κάθετες τομές στον άξονα Z

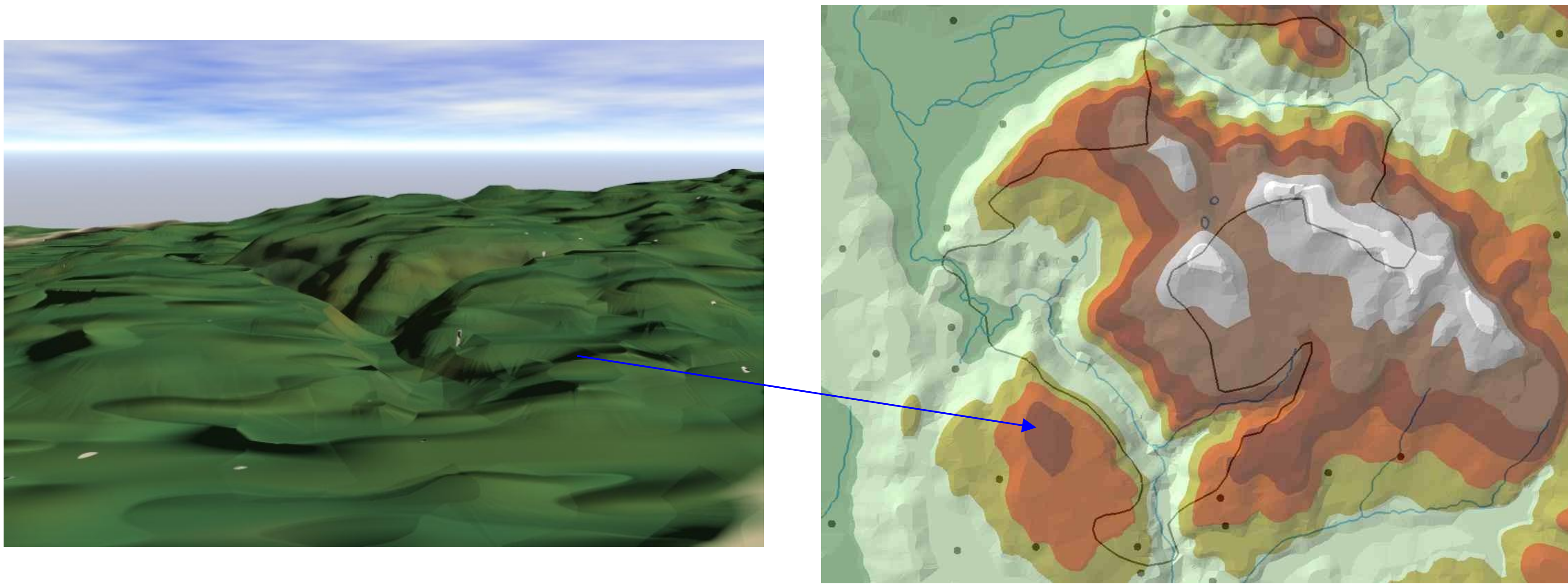
Διάγραμμα Ισοσταθμικών



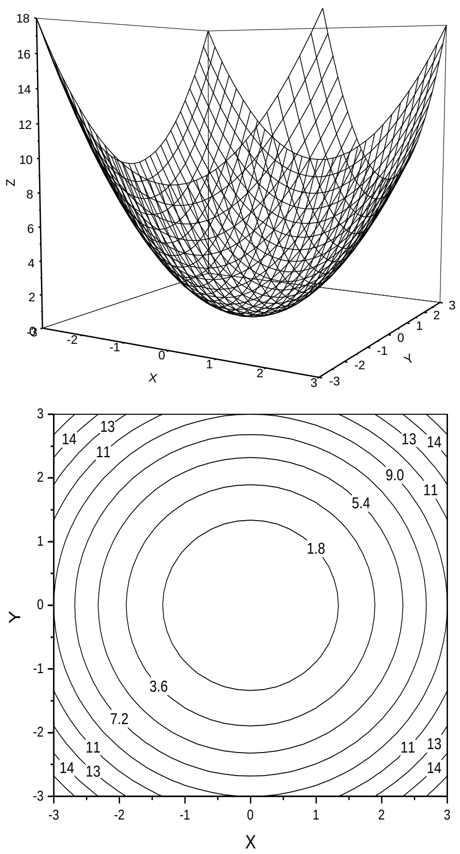
Z =σταθερά

- π.χ. για Z=2 τότε
  $$4 = Y^2 - X^2 \Rightarrow Y^2 = X^2 + 4$$
  $$\Rightarrow Y = \pm\sqrt{X^2 + 4}$$
- Κατασκευάζω το διάγραμμα της συνάρτησης.
- Επαναλαμβάνω για τις τιμές του Z.
- **Ισοσταθμικές καμπύλες (contour lines)** π.χ. ισοϋψείς καμπύλες τοπογραφικών χαρτών, ισοθερμικές καμπύλες κλιματικών χαρτών.

Ισοσταθμικές Καμπύλες



Παράδειγμα



$$Z = f(X,Y) = Y^2 + X^2$$

- Τομές σε ύψος Z=α, οπότε

$$Z = a \Rightarrow a = Y^2 + X^2 \Rightarrow$$
$$Y^2 + X^2 = (\sqrt{a})^2$$

Μερική Παράγωγος

- Συμβολίζει την μεταβολή της **εξαρτημένης** μεταβλητής Z όταν μεταβάλλεται μία από τις **ανεξάρτητες** μεταβλητές, των υπολοίπων θεωρουμένων σταθερών.
- Αν Z=f(X,Y)
- Μερική ως προς το X παράγωγος

$$\frac{\partial Z}{\partial X}$$

- Μερική ως προς το Y παράγωγος

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης:

$$Z = f(X,Y) = Y^2 + X^2$$

  - το Y θεωρήθηκε σταθερά, η παράγωγος του ως προς το X είναι μηδέν

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial (Y^2 + X^2)}{\partial X} = 0 + 2X = 2X$$

  - το X θεωρήθηκε σταθερά

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial (Y^2 + X^2)}{\partial Y} = 2Y$$

Ασκήσεις

$$f_1(N_1, N_2) = N_1(1 - \frac{N_1}{K} - aN_2)$$

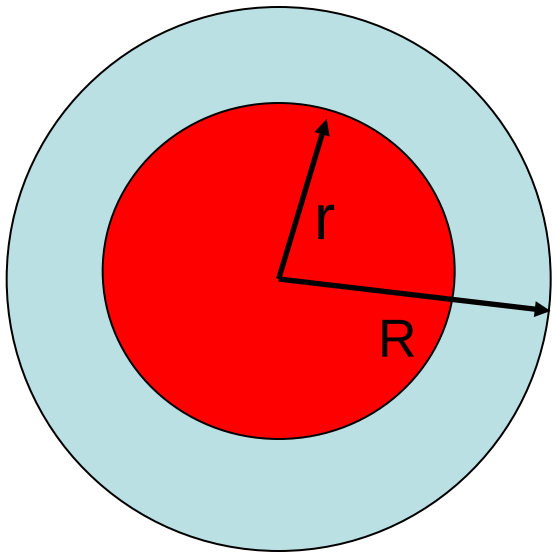
$$f_2(N_1, N_2) = N_2(bN_1 - 1)$$

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial N_2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial N_2}$$

Ταχύτητα Μεταβίβασης Σήματος από Νευρώνες



- **X=r/R , 0<X<1**
  Ταχύτητα διάδοσης σήματος σε μονωμένους αγωγούς.

- **$U=-aX^2LnX$, a=**σταθερά
  Σε ποια τιμή X μεγιστοποιείται η ταχύτητα ; Στους άξονες των νευρώνων ~ X=0.6

Αόριστο Ολοκλήρωμα

- **Η ολοκλήρωση είναι αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης**

$$\frac{d}{dX}\int f(X)dX = f(X)+c$$

Κανόνες Ολοκλήρωσης (1 από 4)

- Προκύπτουν με αντιστροφή των κανόνων παραγώγισης.
- **Κανόνας Παραγώγισης**

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$$

- **Κανόνας Ολοκλήρωσης**

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int xe^{x^2}dx = \int \frac{1}{2}2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Κανόνες Ολοκλήρωσης (2 από 4)

- **Κανόνας Παραγώγισης**

$$\ln(|f(x)|\ )' = f'(x) / f(x)$$

- **Κανόνας Ολοκλήρωσης**

$$\int f'(x) / f(x) dx = \ln(|f(x)|) + c$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \ln(|1+x^2|) + c$$

Κανόνες Ολοκλήρωσης (3 από 4)

- **Κανόνας Παραγώγισης**

$$(f(x)^n)' = nf'(x)f(x)^{n-1}$$

- **Κανόνας Ολοκλήρωσης**

$$\int nf'(x)f(x)^{n-1}dx = f(x)^n + c$$

$$\int(1+x)^5 dx = \int 1(1+x)^5 dx = \int(1+x)'(1+x)^5 dx = \frac{1}{6}(1+x)^6 + c$$

Κανόνες Ολοκλήρωσης (4 από 4)

- Μέθοδος αλλαγής μεταβλητής
- **<u>Κανόνας Παραγώγισης</u>**

$$f'(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$

- **<u>Κανόνας Ολοκλήρωσης</u>**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

Ανάπτυγμα Taylor (1 από 2)

- Έστω συνάρτηση **f(x)** συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] με συνεχείς παραγώγους έως και n-1 τάξεως στο [α,β] και υπάρχει η παράγωγος n τάξεως της **f** στο ανοιχτό διάστημα (α,β). Αποδεικνύεται (θεώρημα του Taylor) ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο **ξ** στο (α,β) τέτοιο ώστε:

$$f(\beta) = f(\alpha) + f'(\alpha)(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

όπου $n! = n(n-1)! = 1x2x3xxxn$

Παρατηρήστε ότι για n = 1 ο τύπος του Taylor γίνεται

$$f(\beta) = f(\alpha) + f'(\xi)(\beta-\alpha)$$

(θεώρημα μέσης τιμής)

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Ο τελευταίος όρος λέγεται υπόλοιπο.

Χρήση του τύπου του Taylor είναι η προσέγγιση της τιμής μιας συνάρτησης **f(x)** με ένα πολυώνυμο βαθμού n-1 (πολυώνυμο Taylor). Στην περίπτωση αυτή το υπόλοιπο ονομάζεται σφάλμα (της προσέγγισης).

Ανάπτυγμα Taylor (2 από 2)

Αν στον τύπο του Taylor θέσουμε α=0 , β = χ τότε έχουμε

$$f(\chi) = f(0) + f'(0)\chi + \frac{f''(0)}{2!}\chi^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\chi^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\chi^n$$

Για τυχόντα **χ, χ+h** του διαστήματος (α,β) ο τύπος του Taylor παίρνει τη μορφή

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n$$

αν το **h** είναι πολύ μικρός αριθμός (πολύ κοντά στο μηδέν), οι ανώτεροι πολυωνυμικοί όροι συμμετέχουν ελάχιστα στην εκτίμηση της τιμής f(x+h). Δεχόμαστε άρα ότι:

$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h$$

όπου $f'(x)$ η τιμή της παραγώγου της f στο σημείο x.

Αναπτύγματα Μερικών Στοιχειωδών Συναρτήσεων σε Πολυωνυμικές σειρές

$$\sin(0+x)=\sin(0)+\sin'(0)x+\sin''(0)\frac{x^2}{2}+\sin'''(0)\frac{x^3}{2\bullet 3}+....$$

Μετά από λίγες αντικαταστάσεις έχουμε τελικά

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}....+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$$

ομοίως

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}........+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

και

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}............+\frac{x^n}{n!}+...$$

Για χ κοντά στο μηδέν ισχύουν οι παρακάτω προσεγγίσεις

$$\sin(x)\cong x,\quad \cos(x)\cong 1-\frac{x^2}{2},\quad \tan(x)\cong x$$

$$(1+x)^n\cong 1+nx,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}}\cong 1+\frac{x}{n}$$

- Άσκηση: με βάση τα τρία αναπτύγματα αποδείξτε τον τύπο του Euler $e^{bi}=\cos b+i\sin b$

Ανάπτυγμα Taylor Συναρτήσεων Δύο Μεταβλητών

- Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, ο γραμμικός όρος του αναπτύγματος Taylor έχει τη μορφή:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0}$$

όπου

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0}$$

οι τιμές της μερικής παραγώγου της f ως προς x και y αντίστοιχα στο σημείο x0 , y0 .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.