



Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 10 : Δυναμικά Συστήματα

Στέφανος Σγαρδέλης
Τμήμα Βιολογίας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Δυναμικά Συστήματα



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

1. Ορισμός Συστήματος
2. Υποσυστήματα
3. Κλίμακα Μελέτης
4. Δυναμικά Συστήματα
5. Μεταβλητές Κατάστασης Συστήματος
6. Παράμετροι ή Σταθερές Συστήματος
7. Κανόνες Μετασχηματισμού Συστήματος
8. Ένα Απλό Δυναμικό Σύστημα: Το εκκρεμές
9. Διάγραμμα Φάσης Συστήματος
10. Προσδιοριστικά vs. Στοχαστικά Συστήματα
11. Ισορροπία Συστήματος
12. Μαθηματικά Μοντέλα
13. Εξισώσεις Διαφορών: Ορισμοί
14. Γενική Μέθοδος Λύσης

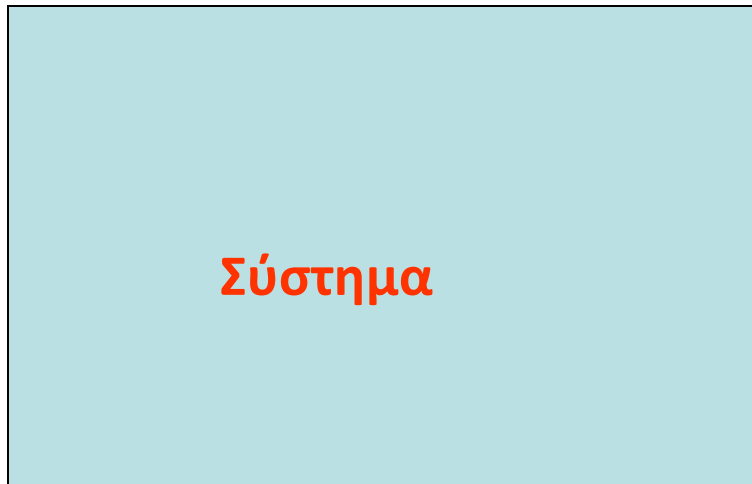


Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 10 παρουσιάζονται τα δυναμικά συστήματα. Τα φυσικά συστήματα τα οποία αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Βιολογίας είναι δυναμικά συστήματα. Στην ενότητα αυτή εισάγονται βασικοί όροι και παρουσιάζεται ο τρόπος κατασκευής μοντέλων φυσικών συστημάτων δηλ. μαθηματικών κατασκευών που έχουν σκοπό να μιμηθούν τη συμπεριφορά των δυναμικών φυσικών συστημάτων.



Ορισμός Συστήματος

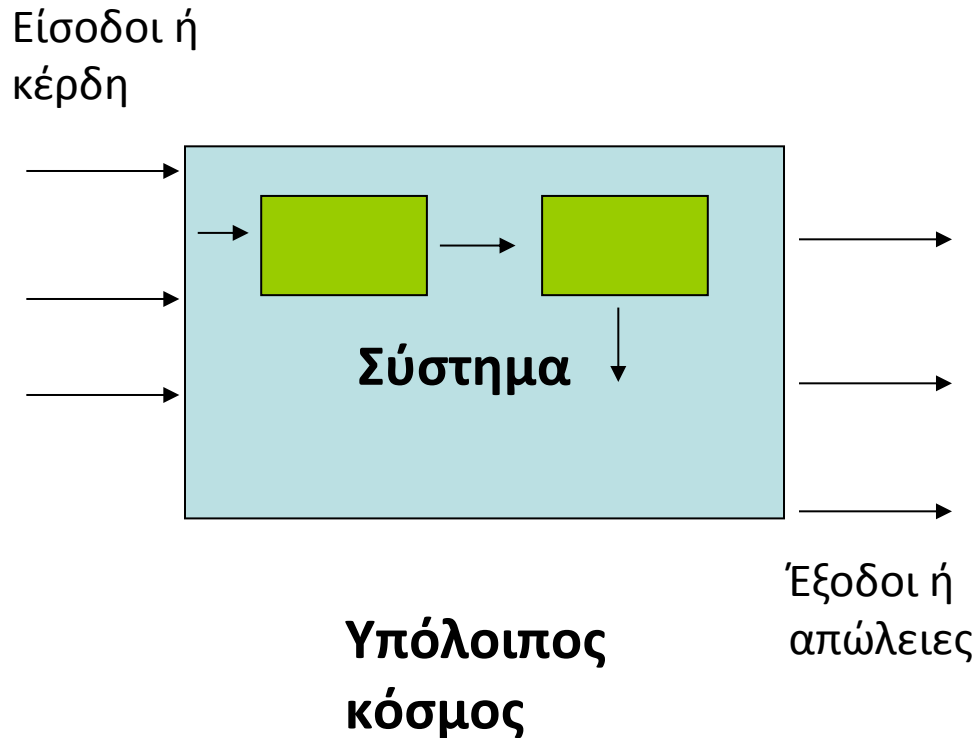


Υπόλοιπος κόσμος

- Ως **σύστημα** ορίζουμε το τμήμα του κόσμου που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε
- Τα όρια του συστήματος είναι αυθαίρετα, αλλά σαφώς ορισμένα από τον ερευνητή



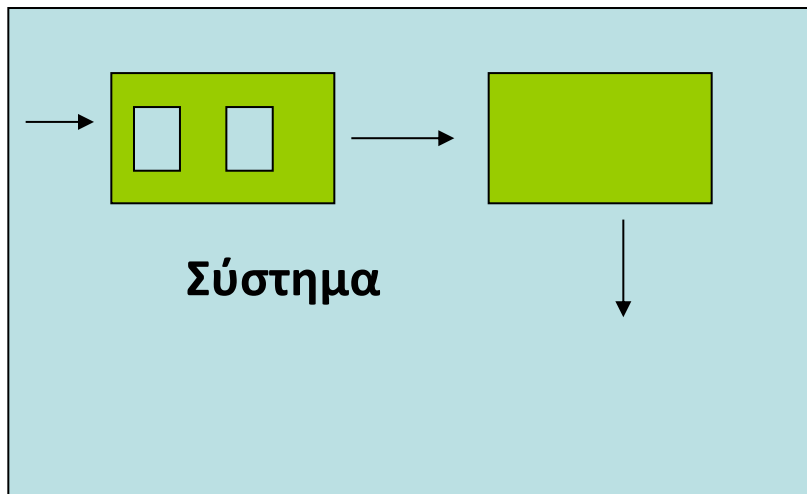
Υποσυστήματα



- Το σύστημα μπορεί να αποτελείται από υποσυστήματα.
- Ή μπορεί να αποτελεί υποσύστημα ευρύτερων συστημάτων.



Κλίμακα Μελέτης



Μελετούμε το σύστημα στην κλίμακα που μας ενδιαφέρει κάθε φορά

Υπόλοιπος κόσμος

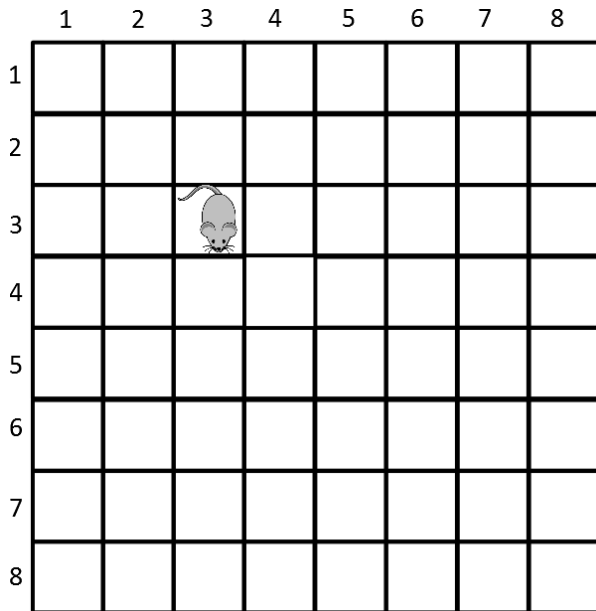


Δυναμικά Συστήματα

- Ένα σύστημα του οποίου κάποιες ιδιότητες μεταβάλλονται με το πέρασμα του χρόνου ονομάζεται **δυναμικό σύστημα**.
- Τα **φυσικά συστήματα** είναι δυναμικά συστήματα.



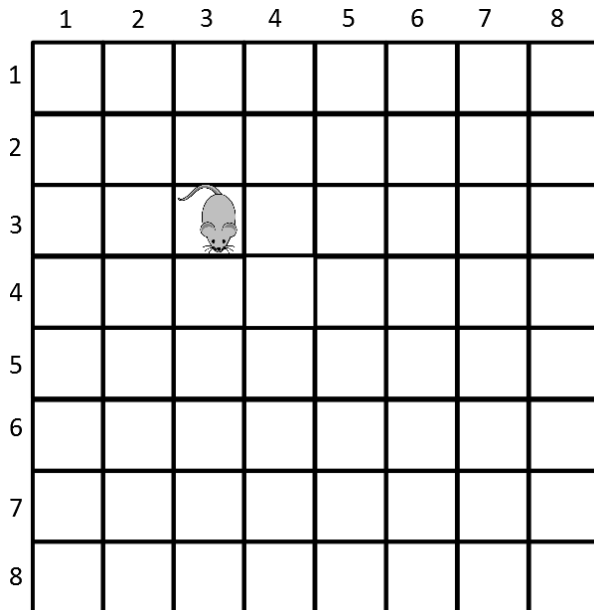
Μεταβλητές Κατάστασης Συστήματος



- Σε κάθε χρονική στιγμή t , η θέση του ζώου προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες τους ζώου X_t, Y_t .
- **Μεταβλητές Κατάστασης Συστήματος:**
Μεταβλητές που είναι αναγκαίες για την πλήρη περιγραφή της κατάστασης ενός συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή.



Παράμετροι ή Σταθερές Συστήματος



- Ο αριθμός δωματίων σε κάθε σειρά είναι μια σταθερά που δεν μεταβάλλεται με την κίνηση του ζώου, αλλά θέτει τα όρια στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές κατάστασης.
- **Παράμετροι ή Σταθερές Συστήματος:**
Ιδιότητες που δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, αλλά επηρεάζουν τη συμπεριφορά (δυναμική) του συστήματος.



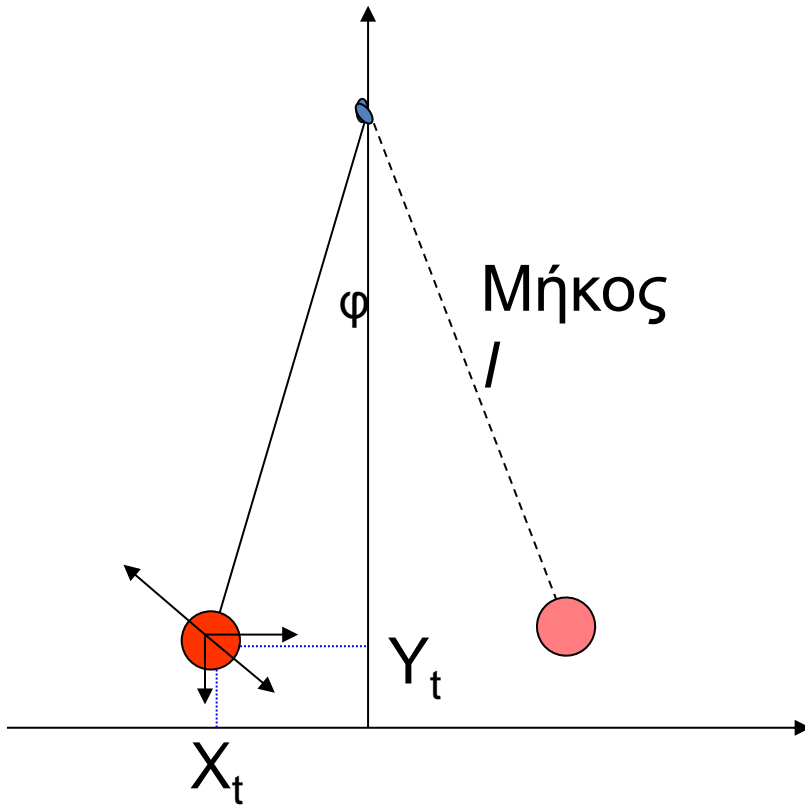
Κανόνες Μετασχηματισμού Συστήματος

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		3/2	4/3	5/4				
2		4/4	5/6	6/8	7/10			
3		5/6	6/9	7/12	8/15			
4			7/12	8/16	9/20			
5								
6								
7								
8								

- Επόμενη κίνηση ζώου:
 - X_t, Y_t τωρινή θέση & X_{t+1}, Y_{t+1} επόμενη θέση. Για κάθε μία από τις διπλανές θέσεις $Z = |X+Y-8|$
 Η επόμενη θέση \rightarrow ελάχιστη απόλυτη τιμή
 - Αν 2 από τις 8 δυνατές κινήσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα \rightarrow επόμενη θέση μέγιστο $(X \cdot Y)$.
- **Κανόνες Μετασχηματισμού Συστήματος:**
 Ιδιότητες που δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, αλλά επηρεάζουν τη συμπεριφορά (δυναμική) του συστήματος.



Ένα Απλό Δυναμικό Σύστημα: Το εκκρεμές

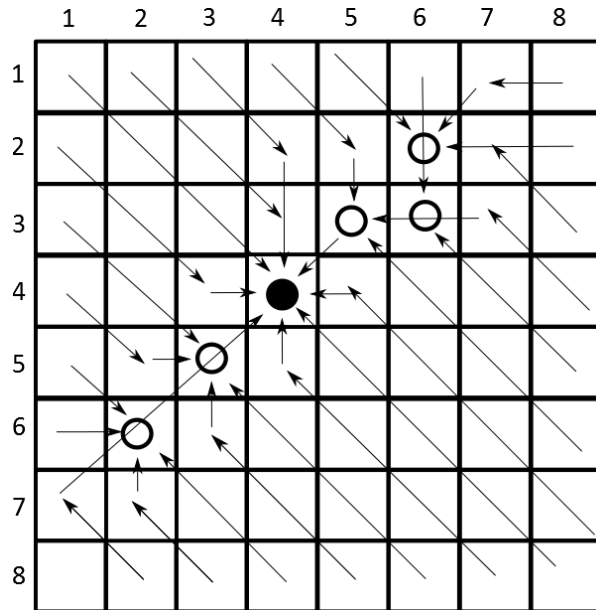


- **Μεταβλητές κατάστασης**
 - i. συντεταγμένες του σφαιριδίου X_t, Y_t ή
 - ii. γωνία-ορμή
- **Παράμετροι**
 - i. μήκος εκκρεμούς
 - ii. μάζα σφαιριδίου
- **Κανόνες Μετασχηματισμού:**

Επιλέγοντας τη γωνία ως μεταβλητή κατάστασης, μπορεί να υπολογιστεί δεδομένου του l & της μάζας του σφαιριδίου, την οριζόντια συνιστώσα της βαρύτητας & την ορμή του σφαιριδίου σε κάθε θέση (2η μεταβλητή κατάστασης)



Διάγραμμα Φάσης Συστήματος



- Όλες οι δυνατές πορείες (ή τροχιές) που θα ακολουθήσει το ζώο. Ακολουθώντας τα διανύσματα \rightarrow ακριβή πορεία \rightarrow τεθλασμένη γραμμή = **Δυναμική γραμμή ή τροχιά**
- **Διάγραμμα Φάσης Συστήματος:**
Γράφημα όπου στο επίπεδο των δύο αξόνων X, Y που παριστούν τις μεταβλητές κατάστασης συστήματος εμφανίζονται οι δυναμικές γραμμές συστήματος.



Προσδιοριστικά vs. Στοχαστικά Συστήματα

- **Προσδιοριστικά Συστήματα:**
Σύστημα με προβλέψιμη συμπεριφορά
- **Στοχαστικά Συστήματα:**
Σύστημα που η συμπεριφορά δεν είναι απολύτως προβλέψιμη, αλλά μπορεί μόνο να πιθανολογηθεί

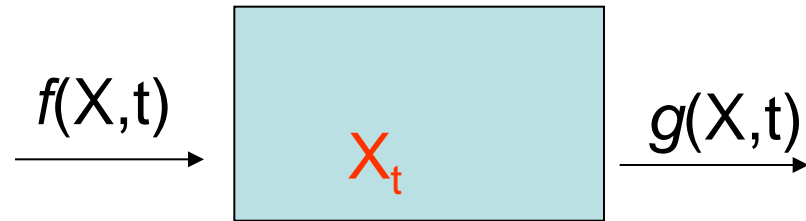


Ισορροπία Συστήματος

- Στο σημείο ισορροπίας ο ρυθμός μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος είναι ίσος με μηδέν.
- Μικρή διαταραχή του συστήματος από το σημείο ισορροπίας:
 - με την πάροδο του χρόνου οδηγεί στην επάνοδο του συστήματος στην ισορροπία → σημείο ευσταθούς ισορροπίας & ασυμπτωτική ευστάθεια
 - απομάκρυνση του συστήματος από την ισορροπία → ασυμπτωτικά ασταθής ισορροπία
 - ούτε επαναφορά ούτε απομάκρυνση του συστήματος από την ισορροπία → ουδέτερη ισορροπία (ευσταθής, αλλά όχι ασυμπτωτικά)



Μαθηματικά Μοντέλα (1 από 2)



- Υπάρχουν δύο τρόποι μαθηματικής περιγραφής ενός συστήματος, ανάλογα με τον τρόπο μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης:

- i. Συνεχείς μεταβολές, σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t) - g(x,t)$$

- i. Ασυνεχείς μεταβολές, σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = f(X,t) - g(x,t)$$

Με κατάλληλη επιλογή βήματος χρόνου ορίζουμε $\Delta t = 1$

$$X_{t+1} - X_t = f(X_t, t) - g(X_t, t)$$



Μαθηματικά Μοντέλα

(2 από 2)

$$X_{t+1} - X_t = f(X_t, t) - g(X_t, t)$$

$$X_{t+1} = f(X_t, t) - g(X_t, t) + X_t$$

$$X_{t+1} = h(X_t, t)$$

Συνάρτηση μετασχηματισμού
Κανόνας μετασχηματισμού

Ακολουθία πραγματικών ορισμένη με τον αναδρομικό της τύπο.

Για να παραχθεί αναδρομικά η ακολουθία πρέπει να γνωρίζω την τιμή στην αρχή των χρόνων (αρχική συνθήκη).



Εξισώσεις Διαφορών: Ορισμοί (1 από 3)

Τάξη εξίσωσης διαφορών: Από πόσα βήματα στο παρελθόν εξαρτάται η μελλοντική τιμή (παρόν = 1 βήμα χρόνου)

- 1^{ης} τάξης: η τιμή του X στο χρόνο $t+1$ εξαρτάται από την τιμή του X στο t

$$X_{t+1} = 3 X_t - 5$$

- 5^{ης} τάξης

$$X_{t+1} = a X_{t-5} + b X_{t-2} + c X_{t-1} + k X_t$$

- Η εξίσωση διαφορών όμως:

$$X_{t+6} = 2 X_{t+5}$$

είναι 1ης τάξης καθώς διατυπώνεται πιο απλά ως $X_{t+1} = 2 X_t$



Εξισώσεις Διαφορών: Ορισμοί (2 από 3)

$$X_{t+1} = h(X_t, t)$$

Βαθμός συνάρτησης: είναι ο βαθμός της συνάρτησης $h(X,t)$ ως προς X

- **1ου βαθμού**, γραμμική: περιλαμβάνει μόνο πρωτοβάθμιους όρους της μεταβλητής
 $X_{t+1} = 3X_t - 2$
- **2ου βαθμού**, μη γραμμική
 $X_{t+1} = 3X_t - 2t^3$
 $N_{t+1} = 3N_t(1 - N_t) \quad X_{t+1} = 3Ln(X_t) - 2$
- Οι εξισώσεις διαφορών ονομάζονται συχνά και ως απεικονίσεις



Εξισώσεις Διαφορών: Ορισμοί (3 από 3)

- Ο συμβολισμός $g^{[n]}(X_t)$ δηλώνει το n -οστό βήμα της απεικόνισης που εκκίνησε με αρχική τιμή X_t

$$X_{t+1} = g(X_t) = 3X_t - 2$$

$$X_{t+2} = 3X_{t+1} - 2 = 3(3X_t - 2) - 2 = 9X_t - 8$$

$$g^{[2]}(X_t) = 9X_t - 8$$

- Γενική Λύση Εξίσωσης Διαφορών

$$X_{t+n} = g^{[n]}(X_t) \quad \text{Γενικός τύπος της ακολουθίας}$$

Δίνει την τιμή στο n οστό βήμα, δεδομένης μιας αρχικής συνθήκης



Γενική Μέθοδος Λύσης

$$X_{t+1} = aX_t$$

$$X_{t+2} = aX_{t+1} = a(aX_t) = a^2 X_t$$

$$X_{t+3} = aX_{t+2} = a(a^2 X_t) = a^3 X_t$$

.....

$$X_{t+n} = a^n X_t$$



Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών:

$$p_{t+1} = \frac{p_t}{1 + p_t}$$

Αν p η συχνότητα ενός θανατογόνου αλληλομόρφου σε ένα πληθυσμό, το βήμα χρόνου είναι μια γενιά και σε μια χρονική στιγμή (γενιά) $p=0.2$,

A) να βρεθεί η συχνότητα του στην επόμενη γενιά

B) σε πόσες γενιές η συχνότητα του αλληλομόρφου θα έχει υποδιπλασιαστεί;



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

